2. přednáška: Bilineární formy

Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. **Lineární forma** je lineární zobrazení

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Typická lineární forma na $\mathbb{R}^n$ je

$$\varphi(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = (a_1\ a_2 \dots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bilineární forma na vekt. prostoru U je zobrazení

$$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$$

takové, že

$$(1) \quad f(au+bv, w) = a f(u,w) + b f(v,w)$$

$$(2) \quad f(u, av+bw) = a f(u,v) + b f(u,w).$$

To znamená, že f je lineární v obou složkách.

Příklady ① $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

$$= (a_{11} y_1 + a_{12} y_2) x_1 + (a_{21} y_1 + a_{22} y_2) x_2 \quad \text{linearita v } x$$

$$= (a_{11} x_1 + a_{21} x_2) y_1 + (a_{12} x_1 + a_{22} x_2) y_2 \quad \text{linearita v } y$$

② $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$.

③ $f : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R} : f(p,q) = p(1) \cdot q'(2)$

Zde jde o součin 2 lineárních forem

$$p \longmapsto p(1)$$

a

$$q \longmapsto q'(2).$$

Ne všechny bilineární formy jsou tohoto tvaru.

④ $U = C[a,b] \quad F: \; C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

Každá čtvercová matice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A=(a_{ij})$ určuje bilineární formu

$$f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j$$

To lze zapsat pomocí maticového násobení takto:

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \right) y_j =$$

$$= (x_1\ x_2 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$= x^T A y$, kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

bereme jako sloupce.

Matice bilineární formy $f: U \times U \to \mathbb{K}$ v bázi α prostoru U

Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je báze prostoru U. Matice bilineární formy f v bázi α je čtvercová matice $A = (a_{ij})$ taková, že

$$a_{ij} = f(u_i, u_j).$$

NEZAPISUJEME JI POMOCÍ SYMBOLU

$(f)_{\alpha,\alpha}$!!

Bilineární forma je těmito hodnotami jednoznačně určena:
Nechť $u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \in U$. Pak

$$f(u,v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum y_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \, f(u_i,u_j) \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f(u_i,u_j)\, x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

$$= x^T A y = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha$$

Ukázali jsme si, že pro matici bilineární formy platí

$$\boxed{f(u,v) = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha}$$

Matice bilin. formy v různých bazích

Mějme vekt. prostor U s dvěma bázemi

$$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$
$$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Nechť matice f v bázi α je A
a matice f v bázi β je B,
tj. platí

$$f(u,v) = x^T A y, \quad f(u,v) = \bar{x}^T B \bar{y},$$

kde

$$x = (u)_\alpha, \quad y = (v)_\alpha, \quad \bar{x} = (u)_\beta, \quad \bar{y} = (v)_\beta.$$

Odvodíme vztah mezi A a B.
Nechť $P = (id)_{\alpha\beta}$ je matice přechodu. Pak

$$x = P\bar{x}, \qquad y = P\bar{y}$$

Toto dosadíme do rovnice
$$f(u,v) = x^T A y = \bar{x}^T B \bar{y}$$
Dostaneme
$$\bar{x}^T B \bar{y} = x^T A y = (P\bar{x})^T A (P\bar{y}) = \bar{x}^T P^T A P \bar{y}$$

$$\bar{x}^T B \bar{y} = \bar{x}^T (P^T A P) \bar{y}$$
Odtud
$$B_{ij} = e_i^T B e_j = e_i^T (P^T A P) \bar{e}_j = (P^T A P)_{ij}$$

Odvodili jsme rovnost

$$\boxed{B = P^T A P, \text{ kde } P = (id)_{\alpha\beta}}$$

Čtvercové matice C a P, pro které platí
$$D = P^T C P,$$
kde P je regulární matice (tj. $\det P \neq 0 \Leftrightarrow P^{-1}$ existuje), nazýváme kongruentní.

Kongruence je relace ekvivalence (tj. relace reflexivní, symetrická a tranzitivní).

Symetrické a antisymetrické bilin. formy

Bilin. forma $f : U \times U \to \mathbb{K}$ je symetrická, jestliže
$$\forall u, v \in U \qquad f(u,v) = f(v,u).$$

Lemma: Bilin. forma $f: U \times U \to \mathbb{K}$ je symetrická, právě když pro její matici $A = (a_{ij})$ v bázi α platí
$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Dokážeme $\Rightarrow$ $a_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = a_{ji}$, kde $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Bilin. forma $f: U \times U \to \mathbb{K}$ je antisymetrická, jestliže $\forall u, v \in U: f(u,v) = -f(v,u)$.

Analogicky: f je antisymetrická, jestliže pro její matici $A = (a_{ij})$ platí $a_{ij} = -a_{ji}$.

Matice symetrické formy je symetrická $A = A^T$
Matice antisymetrické formy je antisymetrická
$$A = -A^T$$

CÍL: dokázat větu:

VĚTA: Pro každou symetrickou bilineární formu $f: U \times U \to \mathbb{K}$ existuje báze $\mathcal{B}$ v prostoru U taková, že pro všechna $u, v \in U$ je
$$f(u,v) = b_{11} x_1 y_1 + b_{22} x_2 y_2 + \dots + b_{nn} x_n y_n,$$
kde $(u)_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$ a $(v)_{\mathcal{B}} = (y_1, y_2, \dots y_n)^T$.

Jinými slovy: V bázi $\mathcal{B}$ má f diagonální matici.

Pro nalezení báze $\mathcal{B}$ a příslušné diagonální matice máme algoritmus, který si odvodíme:

Je-li e elementární řádková operace, pak pro čtvercovou matici A a jednotkovou matici E platí

$$e(A) = e(E) \cdot A .$$

Viz. 1. semestr.

Analogicky můžeme definovat elementární sloupcové operace. Označíme-li takovou operaci $\bar{e}$, platí

$$\bar{e}(A) = A \cdot \bar{e}(E) .$$

Lemma: Pro řádkovou operaci e a stejnou elementární sloupcovou operaci $\bar{e}$ platí

$$e(E) = \bar{e}(E)^T$$

Důkaz: (1) e je vynásobení 1. řádku číslem $a \neq 0$.
$\bar{e}$ je vynásobení 1. sloupce číslem $a \neq 0$.

Platí

$$e(E) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \bar{e}(E) = \bar{e}(E)^T$$

(2) e je výměna 1. a 2. řádku, $\bar{e}$ je výměna 1. a 2. sloupce

$$e(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \bar{e}(E) = \bar{e}(E)^T$$

(3) e ... k 2. řádku přičteme a-násobek 1. řádku
$\bar{e}$ .. k 2. sloupci přičteme a-násobek 1. sloupce

Platí

$$e(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{e}(E) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy
$$e(E) = \bar{e}(E)^T$$

Věta Nechť matice B vznikne ze symetrické matice A řádu $n \times n$ provedením stejných řádkových a sloupcových operací. Pak jsou A a B kongruentní, tj. existuje regulární matice Q taková, že
$$B = P^T A P$$

Důkaz: Provedení stejné řádkové i sloupcové operace je realizováno násobením nějakou elementární maticí zprava (sloupcová operace) a její transponovanou maticí zleva. Proto:

$$\begin{aligned} B &= P_k^T\left(\ldots\left(P_2^T\left(P_1^T A P_1\right) P_2\right)\ldots\right)P_k \\ &= \left(P_1 P_2 \ldots P_k\right)^T A \left(P_1 P_2 \cdots P_k\right) = P^T A P \end{aligned}$$

$\boxed{\text{ALGORITMUS:}}$ nalezne pro každou sym. bilin. formu $f: U \times U \to \mathbb{K}$ bázi β, v níž má f symetrickou matici.

Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ je nějaká báze a A matice f v této bázi. Napišme schéma

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{ij} = f(u_i, u_j) & u_i \\ \hline u_j & \end{array}\right)$$ a na řádky matice $\left(\begin{array}{c|c} A & \alpha^T \\ \hline \alpha & \end{array}\right)$

provádějme stejné el. řádkové a sloupcové operace. Ty lze dělat tak, abychom dostali na místě matice A diagonální matici B (viz. příklad dále). Dostaneme

$$\begin{array}{c|c} B & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \\ \hline v_1 v_2 \dots v_n & \end{array}$$

kde $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je hledaná báze a B hledaná diagonální matice. $B = P^T A P$

Navíc $(v_1\, v_2 \dots v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)\, P$, tedy $P = (id)_{\alpha,\beta}$

Schématicky

$$\begin{array}{c|c} A & \alpha^T \\ \hline \alpha & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|c} P^T A P & P^T \alpha^T \\ \hline \alpha P & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|c} B & \beta^T \\ \hline \beta & \end{array}$$

Příklad: Máme $f: U \times U \to \mathbb{R}$, kde $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je báze U. V ní má f matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Postupujme podle schématu tak, abychom získali diagonální matici.

$$10 = f(u_1+u_2, u_3) = f(u_1,u_3) + f(u_2,u_3) = 4 + 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & u_1 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 4 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & \end{array}\right) \underset{2.ř}{\overset{k\ 1.ř.\ \text{přičteme}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 10 & u_1+u_2 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 4 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & \end{array}\right) \overset{\text{stejně sloupc}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 10 & u_1+u_2 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 10 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline u_1+u_2 & u_2 & u_3 & \end{array}\right)$$

$$\underset{2\times 3.\text{řádek}}{\overset{2\times 2.\text{řádek}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 10 & u_1+u_2 \\ 4 & 0 & 12 & 2u_2 \\ 20 & 12 & 0 & 2u_3 \\ \hline u_1+u_2 & u_2 & u_3 & \end{array}\right) \underset{2\times 3.\text{sloupec}}{\overset{2\times 2.\text{sloupec}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 10 & u_1+u_2 \\ 4 & 0 & 24 & 2u_2 \\ 20 & 24 & 0 & 2u_3 \\ \hline u_1+u_2 & 2u_2 & 2u_3 & \end{array}\right) \sim$$

odečteme od 2. řádku první řádek

od 3. řádku 5 × 1. řádek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 20 & u_1+u_2 \\ 0 & -4 & 4 & -u_1+u_2 \\ 0 & 4 & -100 & -5u_1-5u_2+2u_3 \\ \hline u_1+u_2 & 2u_2 & 2u_3 & \end{array}\right) \sim$$

stejná operace

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & u_1+u_2 \\ 0 & -4 & 4 & -u_1+u_2 \\ 0 & 4 & -100 & -5u_1-5u_2+2u_3 \\ \hline u_1+u_2 & -u_1+u_2 & -5u_1-5u_2+2u_3 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & u_1+u_2 \\ 0 & -4 & 4 & -u_1+u_2 \\ 0 & 0 & -96 & -6u_1-4u_2+2u_3 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & u_1+u_2 \\ 0 & -4 & 4 & -u_1+u_2 \\ 0 & 0 & -96 & -6u_1-4u_2+2u_3 \\ \hline \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & 0 & 0 & \beta^T = P^T \alpha^T \\ 0 & b_{22} & 0 & \\ 0 & 0 & b_{33} & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\beta = \alpha P} & \end{array}\right)$$

stejné vektory

kde
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (id)_{\alpha,\beta}$$

Tedy v souřadnicích báze β má forma f vyjádření

$$f(u,v) = 4x_1y_1 - 4x_2y_2 - 96x_3y_3$$

kde
$$(u)_\beta = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad (v)_\beta = (y_1, y_2, y_3)^T.$$