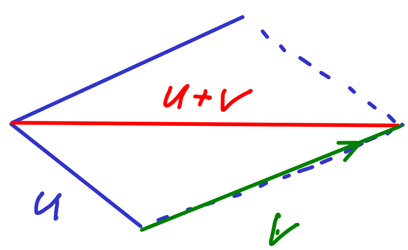
3. přednáška Prostory se skalárním součinem

U bude vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$
$\langle \, , \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ skalární součin

Minule: Cauchyova nerovnost $|\langle u,v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Z Cauchyovy nerovnosti plyne trojúhelníková nerovnost:

$$\forall u,v \in U : \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$



Důkaz:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2 \leq$$
$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Rovnost nastane právě když u a v jsou lineárně závislé.

Jestliže $u \neq \vec{o}$ a $v \neq \vec{o}$, pak Cauchyova nerovnost říká, že

$$-1 \leq \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1$$

To umožňuje definovat odchylku vektorů u a v jako úhel $\alpha \in [0, \pi]$ splňující

$$\cos \alpha = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou ortogonální, jestliže

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \text{pro } i \neq j.$$

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou ortonormální, jestliže

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(tj $\|u_i\| = 1$).

Lemma: Jsou-li vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ ortogonální a nenulové, jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: Nechť $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \vec{0}$. Rovnici skalárně vynásobíme vektorem u_j (j pevné).

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \langle u_i, u_j \rangle = \langle \vec{0}, u_j \rangle$$

$$a_j \langle u_j, u_j \rangle = 0$$

Protože $\|u_j\| \neq 0$, je $a_j = 0$, a to platí pro všechna j. Tedy vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lin. nezávislé.

Grammův–Schmidtův ortogonalizační proces

je algoritmus, který lin. nezávislým vektorům $u_1, u_2, \dots, u_k$ přiřadí ortogonální vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ s vlastnostmi

$$[u_1, u_2, \dots, u_j] = [v_1, v_2, \dots, v_j] \text{ pro } 1 \le j \le k,$$

přitom $v_1, v_2, \dots, v_k$ hledáme takto:

$$v_1 = u_1$$
$$v_{l+1} = u_{l+1} - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_l v_l$$

pro $1 \le l \le k-1$, kde koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_l$ volíme tak, aby v_{l+1} byl kolmý na $v_1, \dots, v_l$.

$$0 = \langle v_{l+1}, v_j \rangle = \langle u_{l+1}, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{l} a_i \langle v_i, v_j \rangle$$
$$= \langle u_{l+1}, v_j \rangle - a_j \langle v_j, v_j \rangle,$$

tedy
$$a_j = \frac{\langle u_{l+1}, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

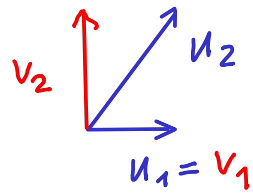
Příklad: V $\mathbb{R}^3$ máme $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,2,0)$, $u_3 = (1,1,2)$.

najděte v_1, v_2, v_3

$$v_1 = u_1 = (1,0,0)$$
$$v_2 = u_2 - a v_1 = (1,2,0) - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$
$$= (0,2,0)$$

$$v_3 = u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2 = (1,1,2) - b_1 (1,0,0) - b_2 (0,2,0)$$
$$= (1,1,2) - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} (1,0,0) - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} (0,2,0) =$$

$$= (1,1,2) - (1,0,0) - \tfrac{1}{2}(0,2,0) = (0,0,2).$$



ORTONORMÁLNÍ BÁZE je báze tvořená systémem ortonormálních vektorů.

Věta: V každém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

Důkaz: Nechť $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ je nějaká báze v U. Provedeme Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces. Dostaneme bázi $v_1, v_2, \dots, v_n$ tvořenou ortogonálními vektory. Tuto bázi „znormalizujeme":

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots \quad w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, \dots, w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}.$$

Platí $\|t u\| = |t|\,\|u\|$, proto $\left\| \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\| = 1$.

ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK množiny $M \subseteq U$ je množina

$$M^{\perp} = \{u \in U : \forall v \in M : \langle u, v \rangle = 0\}$$

$M^\perp$ je vždy vektorový podprostor.
$u_1, u_2 \in M^\perp$, $a, b \in \mathbb{K}$. Potom pro všechna $v \in M$ platí

$$\langle au_1 + bu_2, v\rangle = a\langle u_1, v\rangle + b\langle u_2, v\rangle = a\cdot 0 + b\cdot 0 = 0.$$

Tedy $au_1 + bu_2 \in M^\perp$.

VĚTA: Nechť $V \subseteq U$ je vektorový podprostor. Pak platí

$$V \oplus V^\perp = U.$$

Důkaz: Součet je direktní, tj. $V \cap V^\perp = \{\vec{o}\}$.
Nechť $u \in V \cap V^\perp$, pak $u \in V$, $u \in V^\perp$, proto

$$\langle u, u\rangle = 0 \implies u = \vec{o}.$$

Součet $V + V^\perp$ je U:
Nechť V má ortonormální bázi $v_1, v_2, \dots, v_k$.
Tu lze doplnit na ortonormální bázi
$v_1, \dots v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ celého U. Přitom

$$v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n \perp v_1, \dots v_k,$$

tedy

$$v_{k+1}, \dots, v_n \in V^\perp$$

Každý vektor $u \in U$ lze psát ve tvaru

$$u = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k}_{\in V} + \underbrace{a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n}_{\in V^\perp}$$

Kolmá projekce na podprostor V je lineární zobrazení

$$P : U \longrightarrow V$$

takové, že

$$(*) \qquad Pu \in V \quad a \quad u - Pu \in V^\perp$$

tj.

$$u = \underbrace{Pu}_{\in V} + \underbrace{u - Pu}_{\in V^\perp}$$

Vlastností $(*)$ je zobrazení určeno jednoznačně.

Trochu jinak: jestliže $U = V \oplus V^\perp$, tak pro každé $u \in U$ $\exists!\, v \in V$ a $\exists!\, w \in V^\perp$ tak, že

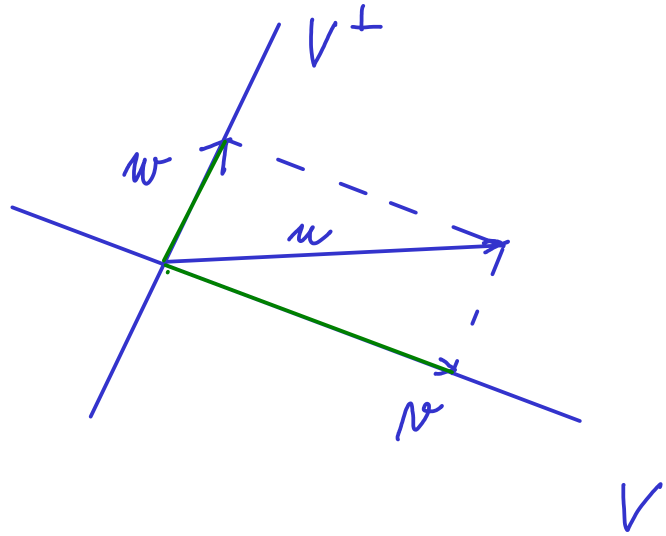
$$u = v + w$$

Definujeme projekci na V předpisem

$$P_V u = v$$

a projekci na $V^\perp$ předpisem

$$P_{V^\perp} u = w.$$



Výpočet kolmé projekce

Nechť $V = [v_1, v_2, v_3]$, $u \in U$. P kolmá projekce musí být

$$Pu = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

a

$$u - Pu \perp V$$

Jestliže v_1, v_2, v_3 tvoří ortonormální bázi podprostoru V, je výpočet koeficientů a_1, a_2, a_3 jednoduchý:

$$\langle u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle u, v_1 \rangle - a_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{\shortparallel \atop 1} - a_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{\shortparallel \atop 0} - a_3 \underbrace{\langle v_3, v_1 \rangle}_{\shortparallel \atop 0} = 0$$

Tedy $a_1 = \langle u, v_1 \rangle$,

analogicky $a_2 = \langle u, v_2 \rangle$,

$a_3 = \langle u, v_3 \rangle$.

Jestliže v_1, v_2, v_3 nejsou ortonormální, pak dostáváme 3 rovnice pro neznámé a_1, a_2, a_3:

$$\langle u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle \text{———}''\text{———}, v_2 \rangle = 0$$

$$\langle \text{———}''\text{———}, v_3 \rangle = 0$$

Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
\langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_3, v_1 \rangle & \langle u, v_1 \rangle \\
\langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle u, v_2 \rangle \\
\langle v_1, v_3 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle & \langle u, v_3 \rangle
\end{array}\right)$$

Matice vlevo se nazývá Grammova matice.

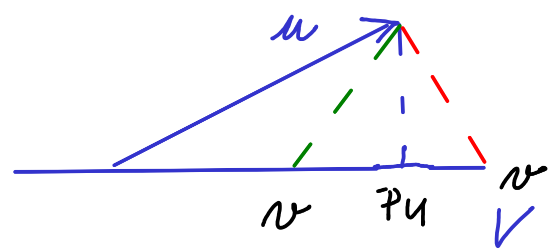
Vzdálenost dvou vektorů u a v je $\|u-v\|$.

Věta – vlastnosti kolmé projekce

Nechť V je podprostor v prostoru U, nechť $u \in U$ a Pu je kolmá projekce do V.

Pu je jediný vektor z V, který minimalizuje vzdálenost $\|u-v\|$ pro všechny vektory $v \in V$:

$$\|u - Pu\| = \min_{v \in V} \|u-v\|.$$



Důkaz:

Položme: $v \in V$

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u-Pu+Pu-v, u-Pu+Pu-v\rangle$$

$$= \langle u-Pu, u-Pu\rangle + \langle \underbrace{u-Pu}_{\in V^\perp}, \underbrace{Pu-v}_{\in V}\rangle + \langle \underbrace{Pu-v}_{\in V}, \underbrace{u-Pu}_{\in V^\perp}\rangle$$

$$+ \langle Pu-v, Pu-v\rangle = \|u-Pu\|^2 + \|Pu-v\|^2$$

Tedy pro $v \in V$ nabývá $\|u-v\|^2$ svého minima právě když $v = Pu$.

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

zabývá se vzdálenostmi a odchylkami.
U bude vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem.

Vzdálenost dvou bodů $A, B \in U$ je

$$\operatorname{dist}(A,B) = \| A - B \|$$

Nechť $\mathcal{N} \subseteq U$ je afinní podprostor a $A \in U$ je bod. Definujeme vzdálenost bodu A a afinního podprostoru $\mathcal{N}$ jako

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) &= \inf_{N \in \mathcal{N}} \operatorname{dist}(A, N) \\ &= \inf_{N \in \mathcal{N}} \| A - N \| \end{aligned}$$

Nechť $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq U$ jsou dva afinní podprostory. Pak jejich vzdálenost definujeme jako

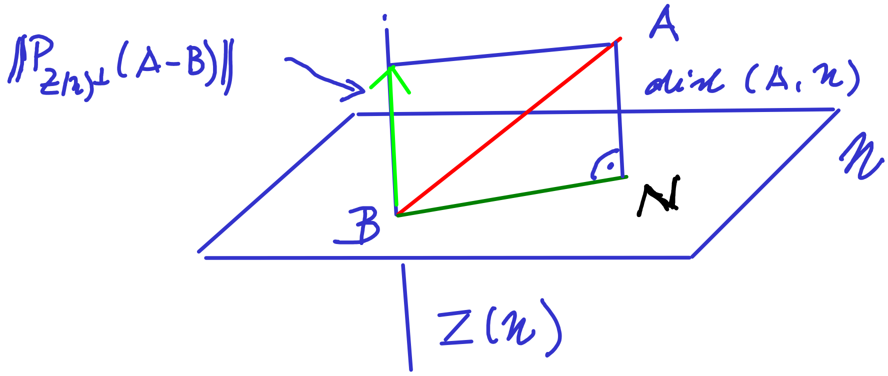
$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ N \in \mathcal{N}}} \operatorname{dist}(M, N) = \inf_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ N \in \mathcal{N}}} \| M - N \|$$

Výpočty ale provádíme pomocí kolmých projekcí.

Věta - vzdálenost bodu od afinního podprostoru

Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ je rovna velikosti vektoru kolmé projekce vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{N})^{\perp}$

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \| P_{Z(\mathcal{N})^{\perp}} (A - B) \|$$



Pro $N \in \mathcal{N}$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) $\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \| A - N \|$

(2) $A - N \perp Z(\mathcal{N})$

(3) $N = B + P_{Z(\mathcal{N})} (A - B)$

Důkaz 1. části:

Nechť $X = B + u$ je libovolný bod z $\mathcal{N}$, tj. $u \in Z(\mathcal{N})$. Potom podle předchozí věty je

$$\|A - X\| = \|A - B - u\| \geq \|(A-B) - P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)\| = \| P_{Z(\mathcal{N})^{\perp}} (A-B)\| .$$

<u>Důkaz 2. části</u>

Nechť nyní $N = B + u \in \mathcal{N}$, tj. $u \in Z(\mathcal{N})$.
Z předchozího víme, že
$\|A - N\| = \|(A-B) - u\|$ nabývá svého minima
pro $u = P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)$.

Tedy z (1) plyne
$N = B + u = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)$, tj. (3)

(3) $\Rightarrow$ (2) $\quad A - N = A - B - P_Z(A-B) = P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B)$
což je vektor kolmý na $Z(\mathcal{N})$.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad$ Platí $A - N \perp Z(\mathcal{N})$. Pro $u \in Z(\mathcal{N})$ je

$$\|\underbrace{A-N}_{Z(\mathcal{N})^\perp} - \underbrace{u}_{Z(\mathcal{N})}\|^2 = \|A-N\|^2 + \|u\|^2 \geq \|A-N\|^2$$

Odtud plyne, že $\|A - N\| = \mathrm{dist}(A, \mathcal{N})$,
což je (1).

V důkazu jsme použili Pythagorovu větu
je-li $u \perp v$, pak

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$
$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underset{0}{\underset{\|}{\langle u,v\rangle}} + \underset{0}{\underset{\|}{\langle v,u\rangle}} + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Příklad: V $\mathbb{R}^4$ spočtěte vzdálenost bodu $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ od nadroviny n: $ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 + e = 0$, kde $a^2+b^2+c^2+d^2 > 0$.

Podle předchozí věty je

$$\operatorname{dist}(A, n) = \| P_{Z(n)^\perp}(A-B) \|$$

Předpokládejme, že $d \neq 0$. Pak lze volit $B \in n$

$$B = \left[0, 0, 0, -\frac{e}{d}\right]$$

$Z(n)$ je: $ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 = 0$

Vektor $u = (a, b, c, d) \perp Z(n)$

Tedy $Z(n)^\perp = [u = (a, b, c, d)]$

Spočítáme kolmou projekci $A-B$ do $Z(n)^\perp$.

$$P_{Z(n)^\perp}(A-B) = \alpha \cdot u \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$A - B - P_{Z(n)^\perp}(A-B) \perp u$$

$$\langle A-B-\alpha u, u \rangle = 0$$

Odtud

$$\alpha = \frac{\langle A-B, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+e}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

Tedy

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\| =$$

$$= \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$$= \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

S podobnou formulkou jste se mohli setkat na střední škole při výpočtu vzdálenosti bodu od roviny v $\mathbb{R}^3$.

Vzdálenost dvou afinních podprostorů

Nechť $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$ a $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ jsou dva afinní podprostory v U.

Věta – vzdálenost dvou afinních podprostorů

(a) Vzdálenost podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A - B$ do $(Z(\mathcal{N}) + Z(\mathcal{M}))^{\perp}$.

(b) Pro body $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ jsou následující výroky ekvivalentní:

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \|M - N\|$

(2) $M - N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

(3) $$M - N = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$$

__Důkaz (a):__

$\operatorname{dist}(m,n) = \operatorname{dist}(A+Z(m), B+Z(n)) = \operatorname{dist}(A, B+Z(m)+Z(n)) \overset{\text{podle předch. věty}}{=}$

$= \| P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)\|$

__Důkaz (b):__ (1) ⇒ (3) $M = A+u$, $N = B+v$

$\| M-N\| = \| A-B+\underbrace{u-v}_{\in Z(m)+Z(n)}\|$ nabývá minima pro $v-u = P_{Z(m)+Z(n)}(A-B)$

Tedy, je-li velikost $\|M-N\|$ minimální, je

$$M-N = A-B-P_{Z(m)+Z(n)}(A-B) =$$
$$= P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$$

(3) ⇒ (2) Z $M-N = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$ plyne

$$M-N \perp Z(m)+Z(n)$$

(2) ⇒ (1) Nechť $M-N \perp Z(m)+Z(n)$, $u \in Z(m)$, $v \in Z(n)$:

Potom

$$\|(M+u)-(N+v)\|^2 = \|\underbrace{(M-N)}_{\in (Z(m)+Z(n))^\perp} + \underbrace{(u-v)}_{\in Z(m)+Z(n)}\|^2 = \|M-N\|^2 + \|u-v\|^2$$

Tedy $\|M-N\| = \operatorname{dist}(m,n)$.