4. přednáška – Eukleidovská geometrie

zabývá se vzdálenostmi a odchylkami.
$\mathcal{U}$ bude vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem.

Vzdálenost dvou bodů $A, B \in \mathcal{U}$ je

$$\operatorname{dist}(A, B) = \|A - B\|$$

Nechť $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{U}$ je afinní podprostor a $A \in \mathcal{U}$ je bod. Definujeme vzdálenost bodu A a afinního podprostoru $\mathcal{N}$ jako

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \inf_{N \in \mathcal{N}} \operatorname{dist}(A, N) = \inf_{N \in \mathcal{N}} \|A - N\|$$

Nechť $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathcal{U}$ jsou dva afinní podprostory. Pak jejich vzdálenost definujeme jako

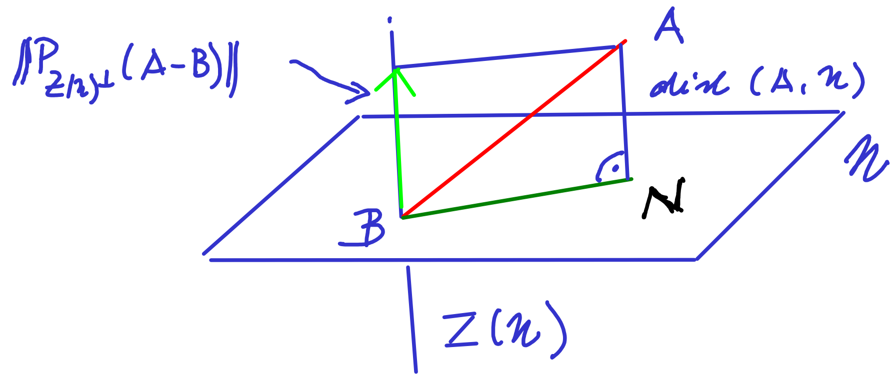
$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ N \in \mathcal{N}}} \operatorname{dist}(M, N) = \inf_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ N \in \mathcal{N}}} \|M - N\|$$

Výpočty ale provádíme pomocí kolmých projekcí.

Věta - vzdálenost bodu od afinního podprostoru

Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ je rovna velikosti vektoru kolmé projekce vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{N})^\perp$

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \| P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B) \|$$



Pro $N \in \mathcal{N}$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) $\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \| A - N \|$

(2) $A - N \perp Z(\mathcal{N})$

(3) $N = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A - B)$

Důkaz 1. části:

Nechť $X = B + u$ je libovolný bod z $\mathcal{N}$, tj. $u \in Z(\mathcal{N})$. Potom podle předchozí věty je.

$$\begin{aligned} \|A - X\| = \|A - B - u\| &\geq \|(A-B) - P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)\| \\ &= \| P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B) \| . \end{aligned}$$

<u>Důkaz 2. části</u>

Nechť nyní $N = B + u \in \mathcal{N}$, tj. $u \in Z(\mathcal{N})$.
Z předchozího víme, že
$\|A - N\| = \|(A - B) - u\|$ nabývá svého minima
pro $u = P_{Z(\mathcal{N})}(A - B)$.

Tedy z (1) plyne
$N = B + u = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A - B)$, tj. (3)

(3) ⟹ (2) $\quad A - N = A - B - P_Z(A - B) = P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A - B)$
což je vektor kolmý na $Z(\mathcal{N})$.

(2) ⟹ (1) $\quad$ Platí $A - N \perp Z(\mathcal{N})$. Pro $u \in Z(\mathcal{N})$
je
$$\|\underbrace{A - N}_{Z(\mathcal{N})^\perp} \underbrace{- u}_{Z(\mathcal{N})}\|^2 = \|A - N\|^2 + \|u\|^2 \geq \|A - N\|^2$$
Odtud plyne, že $\|A - N\| = \operatorname{dist}(A, \mathcal{N})$,
což je (1).

V důkazu jsme použili Pythagorovu větu
je-li $u \perp v$, pak

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$
$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \underbrace{\langle u, v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, u\rangle}_{=0} + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Příklad: V $\mathbb{R}^4$ spočtěte vzdálenost bodu $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ od nadroviny $\mathcal{N}$: $\quad ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 + e = 0$, kde $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$.

Podle předchozí věty je

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \| P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B) \|$$

Předpokládejme, že $d \neq 0$. Pak lze volit $B \in \mathcal{N}$

$$B = \left[0, 0, 0, -\frac{e}{d}\right]$$

$Z(\mathcal{N})$ je: $\quad ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 = 0$

Vektor $u = (a, b, c, d) \perp Z(\mathcal{N})$

Tedy $Z(\mathcal{N})^\perp = [u = (a, b, c, d)]$

Spočítáme kolmou projekci $A - B$ do $Z(\mathcal{N})^\perp$.

$$P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B) = \alpha \cdot u \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$A - B - P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B) \perp u$$

$$\langle A - B - \alpha u, u \rangle = 0$$

Odtud

$$\alpha = \frac{\langle A-B, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Tedy

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{N}) = \|\alpha u\| = |\alpha|\cdot\|u\| =$$

$$= \frac{|ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+e|}{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$$= \frac{|ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

S podobnou formulkou jste se mohli setkat na střední škole při výpočtu vzdálenosti bodu od roviny v $\mathbb{R}^3$.

Vzdálenost dvou afinních podprostorů

Nechť $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$ a $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ jsou dva afinní podprostory v U.

Věta – vzdálenost dvou afinních podprostorů

(a) Vzdálenost podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do $(Z(\mathcal{N})+Z(\mathcal{M}))^\perp$.

(b) Pro body $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ jsou následující výroky ekvivalentní:

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \|M-N\|$

(2) $M-N \perp Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N})$

$$(3) \qquad M - N = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$$

Důkaz (a):

$\operatorname{dist}(m,n) = \operatorname{dist}(A+Z(m), B+Z(n)) = \operatorname{dist}(A, B+Z(m)+Z(n)) \overset{\text{podle předch. věty}}{=}$

$$= \|P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)\|$$

Důkaz (b): (1) $\Rightarrow$ (3) $\quad M = A+u, \quad N = B+v$

$\|M-N\| = \|A-B+\underbrace{u-v}_{\in Z(m)+Z(n)}\|$ nabývá minima pro $v-u = P_{Z(m)+Z(n)}(A-B)$

Tedy, je-li velikost $\|M-N\|$ minimální, je

$$M - N = A - B - P_{Z(m)+Z(n)}(A-B) =$$

$$= P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$$

(3) $\Rightarrow$ (2) Z $M-N = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$ plyne

$$M - N \perp Z(m) + Z(n)$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Nechť $M-N \perp Z(m)+Z(n)$, $u \in Z(m)$, $v \in Z(n)$:

Potom

$$\|(M+u)-(N+v)\|^2 = \|\underbrace{(M-N)}_{\in (Z(m)+Z(n))^\perp} + \underbrace{(u-v)}_{\in Z(m)+Z(n)}\|^2 = \|M-N\|^2 + \|u-v\|^2$$

Tedy $\|M-N\| = \operatorname{dist}(m,n)$.