

Přednáška 5a

# INVARIANTNÍ PODPROSTORY

## Lineární operátory a jejich invariantní podprostory

Lineární operátor (transformace, endomorfismus) je lineární zobrazení vektorového prostoru  $U$  do téhož prostoru  $U$

$$\varphi : U \rightarrow U$$

Invariantní podprostor lin. operátoru  $\varphi : U \rightarrow U$  je vektorový podprostor  $V \subseteq U$  takový, že

$$\varphi(V) \subseteq V.$$

Triviální invariantní podprostory každého lin. operátoru  $\varphi : U \rightarrow U$  jsou  $\{\vec{0}\}$  a  $U$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{0}) &= \vec{0} \Rightarrow \varphi(\{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\} \\ \varphi(U) &\subseteq U \end{aligned}$$

Příklad  $U = \mathbb{R}^4$ ,  $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ukážeme, že podprostor

$$V = \left[ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

je invariantní.

Ukážeme, že  $\varphi(V) \subseteq V$ .

-2-

$$\varphi(v_1) = A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + 2v_2 \in V$$

$$\varphi(v_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 \in V$$

$$\varphi(av_1 + bv_2) = a \underset{\substack{\uparrow \\ V}}{\varphi(v_1)} + b \underset{\substack{\uparrow \\ V}}{\varphi(v_2)} \in V$$

Opakování: Matice lin. zobrazení v bázích  $\alpha, \beta$

Nechť  $\varphi: U \rightarrow V$  je lineární,  $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  báze  $U$  a  $\beta$  báze prostoru  $V$ .  
Matice  $\varphi$  v bázích  $\alpha, \beta$  je

$$(\varphi)_{\beta, \alpha} = \left( (\varphi(u_1))_{\beta}, (\varphi(u_2))_{\beta}, \dots, (\varphi(u_n))_{\beta} \right)$$

Je-li  $\varphi: U \rightarrow U$  lineární operátor, můžeme  
vzít  $\beta = \alpha$  a mluvíme o matici  
lin. operátoru v bázi  $\alpha$ ;

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left( (\varphi(u_1))_{\alpha}, (\varphi(u_2))_{\alpha}, \dots, (\varphi(u_n))_{\alpha} \right)$$

-3-

Vraťme se k předchozímu příkladu

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = A \cdot x$$

$$\varepsilon = (e_1, e_2, e_3, e_4) \quad \text{stand. báze}$$

$$\begin{aligned} (\varphi)_{\varepsilon, \varepsilon} &= ((A \cdot e_1)_{\varepsilon}, (A \cdot e_2)_{\varepsilon}, (A \cdot e_3)_{\varepsilon}, (A \cdot e_4)_{\varepsilon}) \\ &= (s_1 A, s_2 A, s_3 A, s_4 A) = A \end{aligned}$$

Definováni jsme  $V = [v_1 = e_1, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]$

Vraťme si bázi  $B = (v_1, v_2, e_3, e_4)$  vektorů  $\mathbb{R}^4$ .

$$\begin{aligned} (\varphi)_{B, B} &= ((\varphi(v_1))_B, (\varphi(v_2))_B, (\varphi(e_3))_B, (\varphi(e_4))_B) \\ &= \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right), \quad \text{neboli} \end{aligned}$$

$$\varphi(v_1) = v_1 + 2v_2 = 1 \cdot v_1 + 2v_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\varphi(v_2) = (-2)v_1 + v_2 = (-2)v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 4e_3 + (-1)e_4$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-3)v_1 + 2v_2 + 1 \cdot e_3 + 4e_4$$

Věta: Necht'  $\varphi: U \rightarrow U$  a  $V \subseteq U$  je invariantní podprostor. Necht'  $v_1, v_2, \dots, v_k$  je báze  $V$  a necht'  $B = (v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m)$  je báze celého prostoru  $U$ . Pak

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} A & B \\ \hline 0 & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} A & B \\ \hline 0 & C \end{pmatrix}} \right\} k \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} A & B \\ \hline 0 & C \end{pmatrix}} \right\} m-k \end{matrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{m-k}$

Důkaz: Zde je zachycena situace z předchozího příkladu. Protože  $\varphi(v_j) \in V$ , platí

$$\varphi(v_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{kj}v_k + 0 \cdot u_{k+1} + \dots + 0 \cdot u_m$$

a tedy matice vlevo dole je nulová!

Pokračování příkladu  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi(x) = A \cdot x$

$V = [v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]$  je inv. podprostor

$W = [w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$  je rovněž inv. podprostor, neboť

$$\varphi(w_1) = 4w_1 - w_2$$

$$\varphi(w_2) = 1 \cdot w_1 + 4w_2$$

Napíšeme bázi  $\alpha = (v_1, v_2, w_1, w_2)$

$$\begin{aligned}
 (\varphi)_{\alpha, \alpha} &= ((\varphi(v_1))_{\alpha}, (\varphi(v_2))_{\alpha}, (\varphi(w_1))_{\alpha}, (\varphi(w_2))_{\alpha}) \\
 &= \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Věta: Necht'  $\varphi: V \rightarrow V$  a necht'  $V$  a  $W$  jsou invariantní podprostory  $\varphi$ , že  $V = V \oplus W$ .

Necht'  $v_1, \dots, v_k$  je báze  $V$  a  $w_1, \dots, w_{n-k}$  je báze  $W$ . Pak v bázi

$$\alpha = (v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k})$$

ma'  $\varphi$  matici

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left( \begin{array}{cc|cc} A & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & C & \\ \hline & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} A \\ \hline \\ \hline \end{array}} \right\} k \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \hline \\ \hline \end{array}} \right\} n-k \end{array}$$

$k$ 
 $n-k$

Nás budou zajímat především jednodimenzio-  
nální invariantní podprostory  $[v]$ ,  $v \in V \setminus \{0\}$ .  
Pro vektor  $v$  a takhle podprostorů platí,  
že existuje  $\lambda \in K$  tak, že  
 $\varphi(v) = \lambda v$ .