Přednáška 5b: VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

Minule: lineární operátor $\varphi: U \to U$, invariantní podprostor $V \subseteq U$, $\varphi(V) \subseteq V$.

Důležité jsou invariantní podprostory tvaru $V = [v]$, kde $v \in U \setminus \{\vec{o}\}$. V tomto případě

$$\varphi(v) \in V$$

a tedy existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Definice: Vektor $v \in U \setminus \{\vec{o}\}$ se nazývá vlastní vektor operátoru φ, jestliže existuje číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Číslo λ se nazývá vlastní číslo operátoru φ.

Výpočet vlastního čísla a vlastního vektoru

Charakteristický polynom operátoru φ je polynom v proměnné λ

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)$$

kde $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je matice operátoru φ v nějaké bázi α. Tato definice je nezávislá na volbě báze α a polynom je stupně $n = \dim U$.

Důkaz nezávislosti: $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$, $B = (\varphi)_{\beta,\beta}$.
Pak $B = (\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\beta}$

$$= (id)^{-1}_{\alpha,\beta} \, (\varphi)_{\alpha,\alpha} \, (id)_{\alpha,\beta} = P^{-1} A P$$

Je-li mezi maticemi B a A vztah $B = P^{-1}AP$, říkáme, že jsou podobné. Podobnost je relace ekvivalence.

Podobné matice mají stejný charakteristický polynom, tj.

$$\det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$$

<u>Důkaz:</u> $\det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP)$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) = \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot$$

$$\cdot \det P = \det(A - \lambda E)$$

Kořen polynomu $p(\lambda)$ je číslo $\lambda_0 \in K$ takové, že $p(\lambda_0) = 0$.

<u>LEMMA:</u> Číslo λ_0 je vlastní číslo operátoru φ, právě když λ_0 je kořenem jeho charakteristického polynomu.

<u>Důkaz:</u> následující tvrzení jsou ekvivalentní

- $\exists u \in U \setminus \{\vec{o}\} \quad \varphi(u) = \lambda u$
- Pro nějakou bázi α a nějaké $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ je $(\varphi)_{\alpha,\alpha} (u)_\alpha = \lambda (u)_\alpha$

- $\exists u \in U \setminus \{\vec{o}\} \quad \left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)(u)_\alpha = 0$
- $\exists x \in K^n \setminus \{0\} \quad \left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) x = 0$
- Homogenní rovnice $\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)x = 0$ má netriviální řešení (tj $x \neq 0$).
- $$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = 0$$
- λ je kořenem charakteristického polynomu operátoru φ.

Příklad: $\quad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Char. polynom: vezmeme stand. bázi $\varepsilon = (e_1, e_2)$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(\lambda-3) + 4$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -1$

Spočítáme vlastní vektory

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = t \end{matrix}$$

Všechny vl. vektory k vl. číslu $\lambda_1 = 2$ jsou $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

Vlastní vektory k vl. číslu $\lambda_2 = -1$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 4t \end{matrix}$$

Vlastní vektory k vl. číslu $\lambda_2 = -1$ jsou $t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

Základní informace o kořenech polynomů

Polynom $p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$ s $a_n \neq 0$ má stupeň n.

Nulový polynom $p(\lambda) = 0$ má stupeň $-\infty$.

Pro stupně polynomů platí

$$\mathrm{st}\,(p \cdot q) = \mathrm{st}\,p + \mathrm{st}\,q$$

Věta 1: λ_0 je kořenem polynomu p st ≥ 1, právě když
$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda),$$
kde $q(\lambda)$ je polynom stupně st $p - 1$.

Věta 2: nechť $p(\lambda) = \pm\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$,
kde $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ jsou celá čísla.
Jestliže $p(\lambda)$ má racionální kořen λ_0, pak tento kořen dělí koeficient a_0, tj λ_0 / a_0.

Charakteristické polynomy budou velmi často s celočíselnými koeficienty a u nejvyšší mocniny budou mít koeficient $(-1)^n$, kde n = dimense prostoru. Proto jejich vlastní čísla budeme hledat mezi děliteli absolutního členu a_0. Takových dělitelů je konečný počet.

Příklad $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Char. polynom je

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Kořeny hledáme mezi děliteli čísla 6, tj. mezi čísly $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$p(1) = -1+6-11+6 = 0$

Tedy

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)$$

a najdeme kořeny polynomu $\lambda^2-5\lambda+6$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3$$

Vlastní vektor k $\lambda_1 = 1$ $\qquad (A-E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & +1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_2 = p \\ x_3 = 2p \\ x_1 = p \end{matrix}$$

$v_1 = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pro $p \neq 0$ je vl. vektor k vl. číslu 1

Analogicky

k $\lambda_2 = 2$ $\qquad v_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

k $\lambda_3 = 3$ $\qquad v_3 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vektory $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

tvoří bázi α prostoru $\mathbb{R}^3$. V této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ neboť $\varphi(v_1) = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$

$\varphi(v_2) = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor. Nechť vlastní vektory tvoří bázi α prostoru U. Pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla příslušná vlastním vektorům.

Věta: Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ různá vlastní čísla operátoru $\varphi : U \to U$, pak příslušné vlastní vektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz matematickou indukcí podle k.

Pro $k = 1$ je $v_1 \neq \vec{o}$ a věta platí.

Nechť věta platí pro $k \geq 1$. Dokážeme ji pro $k+1$.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ různá vlastní čísla

$v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ příslušné vlastní vektory.

Nechť

$$(0) \quad a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} = \vec{o}$$

Vynásobíme λ_{k+1}

$$(1) \quad \lambda_{k+1} a_1 v_1 + \cdots + \lambda_{k+1} a_k v_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} v_{k+1} = \vec{o}$$

Na původní rovnici (0) aplikujeme φ

$$a_1 \varphi(v_1) + \cdots + a_k \varphi(v_k) + a_{k+1} \varphi(v_{k+1}) = \vec{o}$$

tj. $(2) \quad a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_k \lambda_k v_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = \vec{o}$

Odečteme (2) − (1) a dostaneme

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) a_1 v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1}) a_k v_k = \vec{o}$$

Použijeme ind. předpoklad, že $v_1 \dots v_k$ jsou lin. nezávislé. Dostaneme

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) a_1 = \dots = (\lambda_k - \lambda_{k+1}) a_k = 0$$

Protože $\lambda_1 - \lambda_{k+1} \neq 0, \dots, (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \neq 0$, je

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Dosazení do původní rovnice (0) dostaneme také $a_{k+1} = 0$.

Tedy $v_1, \dots v_{k+1}$ jsou lin. nezávislé.

Důsledek: Nechť $\dim_K U = n$. Nechť $\varphi : U \to U$ má n různých vlastních čísel. Pak v U existuje báze α složená vlastními vektory a platí

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou příslušná vl. čísla.

Spektrum lineárního operátoru = množina všech vlastních čísel lin. operátoru.