

## Přednáška 6a: Vlastní čísla a vektory II

### Algebraická násobnost vlastního čísla $\lambda_0$

je skalerní číslo  $k$ , se platí

$$\text{char. polynom} = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda), \quad q(\lambda_0) \neq 0.$$

Ta je algebraická násobnost  $\lambda_0$  jako kořene charakteristického polynomu.

### Geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda_0$

je dimenze podprostoru  $\text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \text{id})$

$$\begin{aligned} \text{Neboť } \varphi(u) = \lambda_0 u &\Leftrightarrow (\varphi - \lambda_0 \text{id})u = 0 \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \text{id}) \end{aligned}$$

Prostor  $\text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \text{id})$  se nazývá vlastní podprostor příslušný vl. číslu  $\lambda_0$ .

Lemma 1: Součet alg. násobností vl. čísel operátoru  $\varphi: V \rightarrow V$ ,  $\dim V = n$ , je menší nebo roven  $n$ .

Lemma 2: Alg. násobnost vl. čísla  $\geq$  geom. násobnost vl. čísla.

- 2 -

Příklad ①  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Char. polynom  $\chi: (2-\lambda)^3$   $\text{Ker}(\varphi - 2\text{id}) = \mathbb{R}^3$

alg. násobnost = 3 = geom. násobnost

Příklad ②  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Char. polynom  $\chi: (2-\lambda)^3$

$\text{Ker}(\varphi - 2\text{id}) = [e_2, e_3]$

alg. násobnost = 3 > 2 = geom. násobnost

Příklad ③  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Char. polynom  $(2-\lambda)^3$

$\text{Ker}(\varphi - 2\text{id}) = [e_3]$

alg. násobnost = 3 > 1 = geom. násobnost

Dúčas, se' alq. ma's  $\cong$  geom. ma's.

Mějme vl. číslo  $\lambda_0$  s geom. násobkí  $k$ .

Tj. existují lin. nezávislé vl. vektory

$$v_1, v_2, \dots, v_k$$

$$\varphi(v_i) = \lambda_0 v_i.$$

Tyto vektory doplníme do báze a celého prostoru

$$\alpha = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$$

v této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \lambda_0 & 0 & \vdots & 0 & & \\ 0 & \lambda_0 & \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & \\ 0 & \dots & \vdots & \lambda_0 & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & & D \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_0 & 0 & \vdots & 0 & & \\ 0 & \lambda_0 & \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & \\ 0 & \dots & \vdots & \lambda_0 & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & & D \end{array}} \right\} k \\ \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_0 & 0 & \vdots & 0 & & \\ 0 & \lambda_0 & \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & \\ 0 & \dots & \vdots & \lambda_0 & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & & D \end{array}} \right\} n-k \end{array}$$

Pak

$$\det((\varphi)_{\alpha, \alpha} - \lambda E) = \det \left( \begin{array}{ccc|ccc} \lambda_0 - \lambda & & \dots & & & \\ & \dots & & & & \\ & & & \lambda_0 - \lambda & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & & D - \lambda E \end{array} \right)$$

$$= \det \left( \begin{array}{ccc|ccc} \lambda_0 - \lambda & & \dots & 0 & & \\ & \dots & & & & \\ & & & 0 & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & D - \lambda E \end{array} \right) \cdot \det(D - \lambda E)$$

$$= (\lambda_0 - \lambda)^k \det(D - \lambda E).$$

Tedy alg. na'rdnové vl. čísla  $\lambda_0$  je  
aspoň  $k$ .