# Přednáška 6b – Ortogonální a unitární operátory

**Definice:** Nechť $U$ je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor, který splňuje

$$\forall u, v \in U \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle .$$

Takový operátor se nazývá
ortogonální, je-li $U$ nad $\mathbb{R}$,
unitární, je-li $U$ nad $\mathbb{C}$.

**Příklad:** $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

je ortogonální operátor, neboť

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \left( \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \langle x, y \rangle .$$

Jde o otočení o úhel $\alpha$ kolem počátku v $\mathbb{R}^2$. Tento operátor zachovává velikosti vektorů a odchylky vektorů.

## Vlastnosti ortogonálních a unitárních operátorů

- $\|\varphi(u)\| = \|u\|$
- $\sphericalangle(\varphi(u), \varphi(v)) = \sphericalangle(u, v)$
- $\varphi$ zobrazuje ortonormální bázi před na ortonormální bázi.

## Jak vypadají unitární operátory $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

Každý takový je jistě tvaru $\varphi(x) = Ax$, kde $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Platí

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$(Ax)^T \overline{(Ay)} = x^T \overline{y}$$

$$x^T (A^T \overline{A}) \overline{y} = x^T E \overline{y}$$

$$A^T \overline{A} = E,$$

kde pruh $\overline{\phantom{x}}$ značí komplexní sdružování ve složkách

$$\overline{\begin{pmatrix} 1+i & 3-2i \\ 4i & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1-i & 3+2i \\ -4i & 2 \end{pmatrix}.$$

Výše uvedené podmínky jsou ekvivalentní.

Jak vypadají ortogonální operátory $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

- analogicky odvodíme, že jsou to tvaru
$$\varphi(x) = Ax,$$
kde $A^T A = E$.

Definice: Čtvercová komplexní matice $A$ se nazývá unitární, jestliže
$$A^T \overline{A} = E$$
(ekvivalentně $A^{-1} = \overline{A}^T$).

Čtvercová reálná matice $A$ se nazývá ortogonální, jestliže
$$A^T A = E$$
(ekvivalentně $A^{-1} = A^T$).

Tvrzení: Je-li $\varphi : U \to U$ ortogonální (unitární) a $\alpha$ je ortonormální báze v $U$, pak
$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$
je ortogonální (unitární) matice.

Důkaz: Nad $\mathbb{R}$ pro všechna $u, v \in U$ je:
$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$
$$(\varphi(u))_\alpha^T \cdot (\varphi(v))_\alpha = (u)_\alpha^T (v)_\alpha$$
$$((\varphi)_{\alpha,\alpha} (u)_\alpha)^T \cdot ((\varphi)_{\alpha,\alpha} (v)_\alpha) = (u)_\alpha^T \cdot (v)_\alpha$$

$$(u)_\alpha^T \underbrace{(\varphi)_{\alpha,\alpha}^T \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha}} (v)_\alpha = (u)_\alpha^T \underbrace{E} (v)_\alpha$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}^T (\varphi)_{\alpha,\alpha} = E$$

Tedy $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je ortogonální matice.

## Jak na matici poznáme, že je ortogonální?

- platí $A^T A = E$ (nebo $A A^T = E$)
- pro sloupce matice $A$ platí
$$\langle s_i(A), s_j(A) \rangle = \begin{matrix} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{matrix}$$
- pro řádky matice $A$ platí
$$\langle r_i(A), r_j(A) \rangle = \begin{matrix} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{matrix}$$

**Lemma 1**

- determinant ortogonální matice je 1 nebo -1.
- determinant unitární matice je komplexní číslo s absolutní hodnotou 1.

Důkaz: Nad $\mathbb{C}$:

$$A^T \overline{A} = E \quad / \det$$
$$\det(A^T \overline{A}) = \det E$$
$$\det A^T \cdot \det \overline{A} = 1$$
$$\det A \cdot \overline{\det A} = 1$$
$$|\det A|^2 = 1.$$

**Lemma 2** Vlastní čísla a vektory unitárních a ortogonálních operátorů

(1) Vlastní čísla mají absolutní hodnotu 1.

(2) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

**Důkaz nad $\mathbb{C}$:**

(1) Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $u \neq \vec{o}$. Potom

$$\langle u, u\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle u, u\rangle = |\lambda|^2 \langle u, u\rangle$$

Protože $\langle u, u\rangle \neq 0$, je $|\lambda|^2 = 1$.

(2) Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $\varphi(v) = \omega v$, $\lambda \neq \omega$, $u \neq \vec{o}$, $v \neq \vec{o}$. Potom

$$\langle u, v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle \lambda u, \omega v\rangle = \lambda\bar{\omega}\langle u, v\rangle$$

Protože $\lambda \neq \omega$ a $|\lambda| = |\omega| = 1$, tj. $\lambda\bar{\lambda} = 1$, $\omega\bar{\omega} = 1$, dostáváme $1 - \lambda\bar{\omega} \neq 0$ a

$$(1 - \lambda\bar{\omega})\langle u, v\rangle = 0$$

Tedy $\langle u, v\rangle = 0$. Příslušné vlastní vektory jsou na sebe kolmé.

## Věta o unitárních operátorech (pro ortog. neplatí !)

Pro každý unitární operátor $\varphi : U \to U$ existuje v $U$ ortonormální báze $\alpha$ tvořená vlastními vektory. V této bázi

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla.

## Důkaz indukcí podle $n = \dim U$.

Pro $\dim U = 1$ je $\varphi(u) = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{C}$ a tedy $\frac{u}{\|u\|}$ $(u \neq \vec{o})$ je hledaná báze.

Nechť věta platí v prostorech dimenze $n-1$. Mějme prostor $U$, $\dim U = n$, a $\varphi : U \to U$ unitární.

Char. polynom operátoru $\varphi$ je stupně $n \geq 1$ a má proto (podle základní věty algebry) kořen $\lambda_1$ v $\mathbb{C}$. $\lambda_1$ je vlastní číslo a označme $v_1$ příslušný vlastní vektor v $U$ takový, že $\|v_1\| = 1$.

Uvažujme podprostor $[v_1]^\perp \subset U$ dimenze $n-1$. Dokážeme, že $[v_1]^\perp$ je invariantní pod -

prostor operátoru $\varphi$.

Nechť $u \in [v_1]^\perp$. Spočítáme $\langle \varphi(u), v_1 \rangle$. $|\lambda_1| = 1$.

$$\langle \varphi(u), v_1 \rangle = \langle \varphi(u), \frac{1}{\lambda_1} \underset{\lambda_1 v_1}{\underset{\shortparallel}{\varphi(v_1)}} \rangle = \overline{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} \langle \varphi(u), \varphi(v_1) \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle u, v_1 \rangle = \lambda_1 \cdot 0 = 0.$$

Tedy $\varphi(u) \in [v_1]^\perp$.

Nyní vezmeme operátor $\varphi$ zúžený na podprostor $[v_1]^\perp$

$$\varphi / [v_1]^\perp : [v_1]^\perp \longrightarrow [v_1]^\perp$$

Tento operátor zachovává skalární součin, je tedy unitární a my na něj můžeme aplikovat indukční předpoklad. Podle tohoto předpokladu existuje ve $[v_1]^\perp$ (prostor dimenze $n-1$) ortonormální báze $v_2, v_3, \dots, v_n$ tvořená vlastními vektory. Proto $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$.

Tedy $v_1, v_2, \dots, v_n$ je báze celého prostoru $U$ tvořená vlastními vektory.

Pro ortogonální operátory věta obecně neplatí:

Uvažujme $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

s $\alpha \neq k\pi$. Potom char. polynom operátoru $\varphi$ je

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha$$

$$= \lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + 1$$

Jeho diskriminant je

$$D = (-2\cos\alpha)^2 - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) < 0.$$

Nemá tedy reálné kořeny, pouze komplexní, a to

$$\cos\alpha \pm i\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha.$$

## ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY V DIMENZI 2

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x) = Ax$,

kde $A$ má sloupce velikosti 1 navzájem kolmé. Mohou nastat 2 možnosti:

(1) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ kde $a^2 + b^2 = 1$.

V tomto případě je

$$\det A = a^2+b^2 = 1 .$$

Můžeme najít $\alpha \in [0, 2\pi)$ takové, že

$$a = \cos\alpha \quad , b = \sin\alpha$$

Pak $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a zobrazení $\varphi(x) = Ax$ je otočení kolem počátku o úhel $\alpha$ (proti směru hodinových ručiček).

Všimněte si, že otočení zachovává orientaci ($\det A > 0$).

(2) $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \text{ kde } a^2+b^2$$

V tomto případě $\det A = -a^2 - b^2 = -1$.

Charakteristický polynom je

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+a)(\lambda-a) - b^2 =$$

$$= \lambda^2 - a^2 - b^2 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

Operátor má reálná vlastní čísla 1 a -1 s vlastními vektory

k $\lambda_1 = 1$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$

a $\lambda_2 = -1$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$

Vidíme (a již víme), že $v_1 \perp v_2$.

Tedy operátor $\varphi(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, kde $a^2+b^2=1$,

je symetrie podle přímky se směrovým vektorem $v_1$. V tomto případě $\varphi$ nezachovává orientaci ($\det A < 0$).

## ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY V DIMENZI 3

mají charakteristický polynom

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \text{ kde } a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

- Takový polynom má aspoň jeden kořen v $\mathbb{R}$. Podle lemmatu 2 je tento kořen 1 nebo $-1$.

- Jestliže tento polynom má kořen $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pak má vmězí kořen $\overline{\lambda_0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Jestliže $p(\lambda_0) = 0$, pak $\overline{p(\lambda_0)} = 0$, ale

$$0 = \overline{p(\lambda_0)} = -\overline{\lambda_0^3} + \overline{a_2}\,\overline{\lambda_0^2} + \overline{a_1}\,\overline{\lambda_0} + \overline{a_0} =$$
$$= -\overline{\lambda_0}^3 + a_2\overline{\lambda_0}^2 + a_1\overline{\lambda_0} + a_0$$

Tedy i $\overline{\lambda_0}$ je kořen.

- Jestliže $\varphi(x) = Ax$ má char. polynom s kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, pak

$$\pm 1 = \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

$$\det A = \det(A - 0 \cdot E) = p(0)$$

Současně $\quad p(\lambda) = -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$

Proto $\quad p(0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

Tedy $\quad \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

Mohou nastat tyto dvě možnosti:

① $\det A = 1$, pak $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$.

Ortogonální operátor $\varphi(x) = Ax$ je identita na podprostoru $[u]$, kde $u$ je vlastní vektor k vl. číslu $1$ a na podprostoru $[u]^{\perp}$ je $\varphi$ otočení.

Tedy $\varphi$ na $\mathbb{R}^3$ je otočení kolem osy procházející počátkem se směrovým vektorem $u$ o úhel $\alpha$. Tento úhel zjistíme tak, že vezmeme vektor $v \perp u$, $v \neq \vec{0}$, spočítáme $\varphi(v)$ a úhel $\alpha$ bude takový $\alpha \in [0, \pi]$, že

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\| \, \|\varphi(v)\|}.$$

② $\det A = -1$, pak $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$

Ortogonální operátor $\varphi(x) = Ax$ je pak na prostoru $[u]$, kde $u$ je vlastní vektor k $-1$, roven $-$identitě. Na ortogonálním doplňku $[u]^{\perp}$ je $\varphi$ otočení.

Tedy $\varphi$ na celém $\mathbb{R}^3$ je složení

(a) symetrie podle roviny procházející počátkem a kolmé k vlastnímu vektoru $u$ k vlastnímu číslu $-1$ a

(b) otočení kolem přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $u$. Úhel otočení $\alpha$ spočítáme tak, že vezmeme vektor $v \perp u$, $v \neq \vec{o}$, spočítáme $\varphi(v)$ a určíme úhel $\alpha \in [0, \pi]$ takový, že

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v) \rangle}{\|v\| \, \|\varphi(v)\|}.$$

Příklady na cvičení.