

Přednáška 7a

ORTOGONÁLNÍ A UNITÁRNÍ OPERÁTORY

ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY V DIMENZI 3

mají charakteristický polynom

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \text{ kde } a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

- Takový polynom má aspoň jeden kořen v \mathbb{R} . Podle lemmatu 2 je tento kořen 1 nebo -1.
- Jestliže tento polynom má kořen $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pak má i konjugovaný kořen $\overline{\lambda_0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Jestliže $p(\lambda_0) = 0$, pak $\overline{p(\lambda_0)} = 0$, ale

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{p(\lambda_0)} = -\overline{\lambda_0^3} + \overline{a_2} \overline{\lambda_0^2} + \overline{a_1} \overline{\lambda_0} + \overline{a_0} = \\ &= -\overline{\lambda_0}^3 + a_2 \overline{\lambda_0}^2 + a_1 \overline{\lambda_0} + a_0 \end{aligned}$$

Tedy i $\overline{\lambda_0}$ je kořen.

- Jestliže $\varphi(x) = Ax$ má char. polynom s kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, pak

$$\pm 1 = \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

$$\det A = \det (A - 0 \cdot E) = p(0)$$

Současně $p(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$

Proto $p(0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

Tedy $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

Mohou nastat tyto dvě možnosti:

- ① $\det A = 1$, pak $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$.

Ortogonalní operátor $\varphi(x) = Ax$ je identita na podprostoru $[u]$, kde u je vlastní vektor k vl. číslu 1 a na podprostoru $[u]^\perp$ je φ otáčení.

Tedy φ na \mathbb{R}^3 je otáčení kolem osy procházející počátkem se směrovým vektorem u o úhel α . Tento úhel zjistíme tak, že zvolíme vektor $v \perp u$, $v \neq \vec{0}$, spočítáme $\varphi(v)$ a úhel α bude kolony $\alpha \in [0, \pi]$, že

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, \varphi(v) \rangle}{\|v\| \|\varphi(v)\|}.$$

②

deb $A = -1$, pak $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$

Ortogonalní operátor $\varphi(x) = Ax$ je pak na prostoru $[u]$, kde u je vlastní vektor k -1 , roven -identitě. Na ortogonalním doplňku $[u]^\perp$ je φ otočení.

Tedy φ na celém \mathbb{R}^3 je složení

(a) symetrie podle roviny určené vektoru u a kolmé k vlastnímu vektoru u k vlastnímu číslu -1 a

(b) otočení kolem přímky určené vektoru u . Uhel otočení α spočítáme tak, že vezmeme vektor $v \perp u$, $v \neq \vec{0}$, spočítáme $\varphi(v)$ a učíme uhel $\alpha \in [0, \pi]$ takový, že

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, \varphi(v) \rangle}{\|v\| \|\varphi(v)\|}.$$

Příklady na cvičení.