Přednáška za

Samoadjungované operátory a kvadratické formy

<u>Poznámka</u>: Každá reálná symetrická matice A určuje nejen samoadjungované zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ale také samoadjungované zobrazení $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

<u>Důsledek 1: (Věta o spektrálním rozkladu samoadj. operátorů)</u>

(Spektrum lineárního operátoru je množina jeho vlastních čísel.)

Každý samoadjungovaný operátor $\varphi: U \to U$ lze psát ve tvaru

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k ,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla operátoru φ a $P_1, P_2, \dots, P_k$ jsou kolmé projekce na vlastní podprostory $\ker(\varphi - \lambda_i id)$,

$\ker(\varphi - \lambda_2 \mathrm{id}), \ldots, \ker(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})$. Tyto podprostory jsou navzájem kolmé.

Důkaz: Víme již, že U má bázi tvořenou vlastními vektory. Potom pro $u \in \ker(\varphi - \lambda_i u)$ platí

$$\varphi(u) = \lambda_i u = \underbrace{\lambda_1 P_1(u)}_{=\,o} + \ldots + \lambda_i P_i(u) + \ldots + \underbrace{\lambda_k P_k(u)}_{=\,o} =$$
$$= (\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k)(u)$$

Protože rovnost $\varphi(u) = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i\right)(u)$ platí pro všechny vektory dané báze, platí

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$$

na celém U.

Důsledek 2:

Každou symetrickou reálnou matici A můžeme psát ve tvaru

$$A = P^T D P$$

kde P je ortogonální matice a

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A.

Důkaz: Uvažujme zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$. φ je samoadjungované zobrazení, neboť A je symetrická matice. Nechť α je ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$ tvořená vlastními vektory. Potom

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A \qquad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D.$$

Platí

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\varepsilon}$$

$$(1) \qquad A = P^{-1} D P$$

Matice $P = (id)_{\alpha,\varepsilon}$ je ortogonální, neboť je maticí přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi. Proto

$$(2) \qquad P^{-1} = P^T$$

Dáme-li dohromady (1) a (2) dostaneme

$$A = P^T D P,$$

kde $P^T = (id)_{\varepsilon,\alpha}$ vznikne zapsáním standardních souřadnic vektorů báze α do sloupců.

$$P^T = P^{-1} = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \left((u_1)_\varepsilon (u_2)_\varepsilon \dots (u_n)_\varepsilon \right).$$

Důsledek 3 pro kvadratické formy:

Pro každou kvadratickou formu $q : U \to \mathbb{R}$ na prostoru U nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem existuje ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ v U taková, že v souřadnicích této báze je

$$q(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 ,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice kvadratické formy v nějaké ortonormální bázi β.

Důkaz: Nechť $f : U \times U \to \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma, která zadává kvadratickou formu

$$q(u) = f(u, u).$$

V souřadnicích nějaké ortonormální báze β je matice této symetrické formy symetrická matice B.

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (u)_\beta^T \, B \, (v)_\beta = (u)_\beta^T \, B^T (v)_\beta \\ &= \left(B (u)_\beta\right)^T \cdot (v)_\beta = \\ &= \left((\varphi)_{\beta,\beta} (u)_\beta\right)^T \cdot (v)_\beta \\ &= \langle \varphi(u), v \rangle , \end{aligned}$$

kde $\varphi : U \to U$ je lineární zobrazení, které má v bázi β matici B. Protože B je symetrická, je φ samoadjungované.

Proto v U existuje ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ tvořená vlastními vektory. Matice f v bázi α je

$$A_{ij} = f(u_i, u_j) = \langle \varphi(u_i), u_j \rangle$$
$$= \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \begin{cases} \lambda_i & i = j \quad \text{(vlastní číslo)} \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Tedy vyjádření f v souřadnicích báze α je

$$f(u, v) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n .$$

Pro kvadratickou formu je

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 .$$

<u>Důležitá poznámka:</u> Již dříve jsme ukázali, že pro kvadratickou formu existuje báze taková, že v jejích souřadnicích je

$$g(u) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

<u>ALE</u>, taková báze <u>NEBYLA ortonormální</u>. Algoritmus stejných řádkových a sloupcových úprav nám <u>NEDÁ</u> ortonormální bázi (ani ortogonální)!