Přednáška 9a: Singulární rozklad a pseudoinverzní matice

Příklad:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(x) = Ax : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

má vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Jednotkové vlastní vektory

$$\lambda_1 = 1 \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6 \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = (u_1, u_2)$$

Proto $Q = (id)_{\varepsilon_2, \alpha}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dále
$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \varphi(u_1) = \frac{1}{\sqrt{1}} A u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \varphi(u_2) = \frac{1}{\sqrt{6}} A u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektor v_3 zvolíme tak, aby $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ byla ortonormální báze v $\mathbb{R}^3$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = (id)_{\varepsilon_3, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

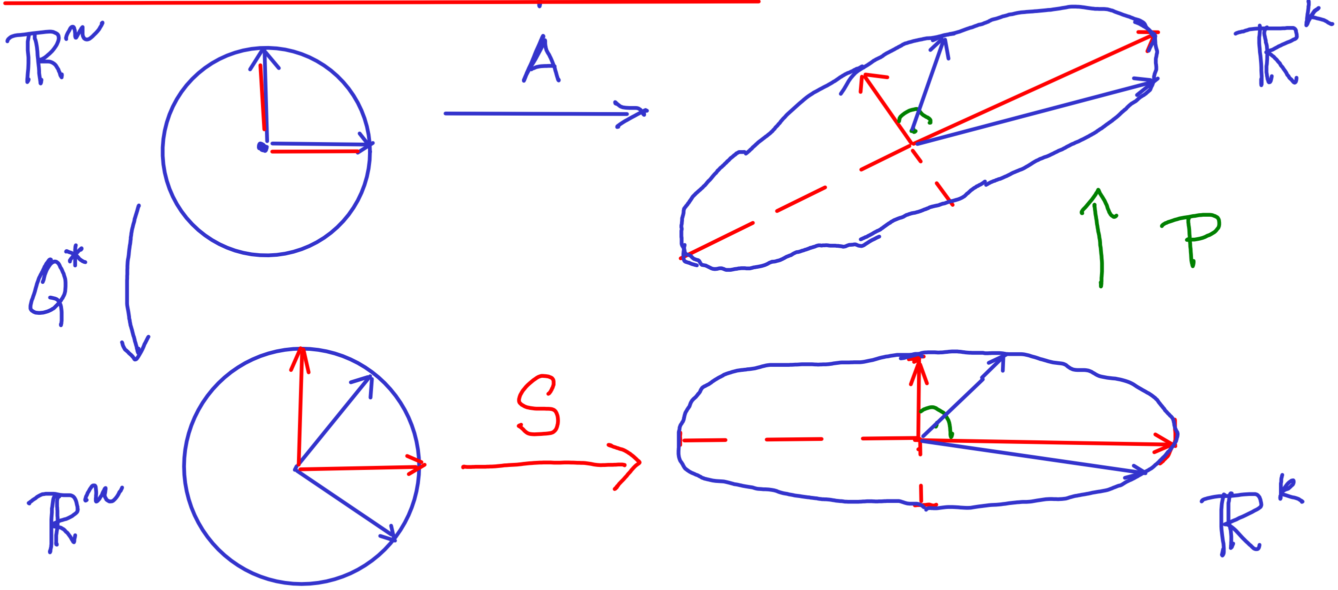
Dále

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Platí

$$A = P \cdot S \cdot Q^T.$$

Geometrická interpretace



Pseudoinverzní matice

Nechť A je invertibilní matice $n \times n$. Pak má singulární rozklad

$$A = P S Q^*$$

kde $S = \begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n \end{pmatrix}$ a $s_i > 0$ pro všechna i.

Platí $S^{-1} = \begin{pmatrix} s_1^{-1} & & & 0 \\ & s_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n^{-1} \end{pmatrix}$

P a Q jsou regulární. Proto

$$A^{-1} = (P S Q^*)^{-1} = (Q^*)^{-1} S^{-1} P^{-1}$$
$$= (Q^*)^* S^{-1} P^* = Q S^{-1} P^{-1}.$$

To je singulární rozklad inverzní matice.

Definice pseudoinverzní matice $A^{(-1)}$ k A (toto je pragmatická definice, lze definovat i pomocí vlastností)

Je-li sing. rozklad matice $A = P S Q^*$, pak
$$A^{(-1)} = Q S^{(-1)} P^*$$

kde $$S^{(-1)} \underset{def}{=} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} s_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & s_r^{-1} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)}_{k} \Bigg\} n$$

Vlastnosti pseudoinverzní matice

(1) Je-li A invertibilní, je $A^{(-1)} = A^{-1}$.

(2) $\left(A^{(-1)}\right)^{(-1)} = A$

(3) $A^{(-1)} \cdot A$ a $A \cdot A^{(-1)}$ jsou samoadjungované (hermitovské nebo symetrické) matice

(4) Je-li $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$, $\varphi(x) = Ax$
a $\varphi^{(-1)} : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$, $\varphi^{(-1)}(y) = A^{(-1)} y$,
pak
$$\varphi^{(-1)} \circ \varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \quad \varphi^{(-1)} \circ \varphi(x) = A^{(-1)} A x$$
je kolmá projekce $\mathbb{K}^n$ na podprostor $(\ker \varphi)^{\perp}$.

(5) $\varphi \circ \varphi^{(-1)} : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k \quad \varphi \circ \varphi^{(-1)}(y) = A A^{(-1)} y$

je kolmá projekce $\mathbb{K}^k$ na podprostor $\operatorname{im} \varphi$.

(6) Platí $$A A^{(-1)} A = A$$ $$A^{(-1)} A A^{(-1)} = A^{(-1)}$$

(7) $A^{(-1)} = (A^* A)^{(-1)} A^*$ důležité početně

Poznámka Pseudoinverzní matici bychom mohli (z teoretického hlediska lépe) definovat tak, že splňuje vlastnosti (4) a (5).
Z těchto vlastností plyne jednoznačnost $A^{(-1)}$, a pak se dokáže, že matice $Q S^{(-1)} P^*$ má vlastnosti (4) a (5). Tedy musí být $A^{(-1)} = Q S^{(-1)} P^*$

Důsledek (1) a (7) Početně důležitý.

Je-li A^*A invertibilní matice, je

$$A^{(-1)} = (A^*A)^{-1} \cdot A^*$$

Příklad na tento důsledek

nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pak $A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

je invertibilní. Proto

$$A^{(-1)} = (A^*A)^{-1} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 \\ -1/3 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$