

11. přednáška JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Dodatek k minulé přednášce: Každá kleslá matice má právě jednu kladnou vlastní čísla.

Motivace: Existují lineární operátory, které nelze diagonalizovat, tj. neexistují báze α tvořící vlastními vektory, ve které je $(\varphi)_{\alpha, \alpha}$ diagonální.

Příklad: $\varphi(x) = Ax$, $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla 2 je alg. násobnost 2, ale geometrické násobnost 1.

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$

ale dim řešení soustavy $(A - 2E)x = 0$

je 1. Třechy vlastní vektory jsou násobky vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Motivace - přečtení: Cílem je najít po vektorů tudle operátoru bázi α k tomu, že

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha}$$

je co nejjednodušší. To bude **Jordanův kanonický tvar**.

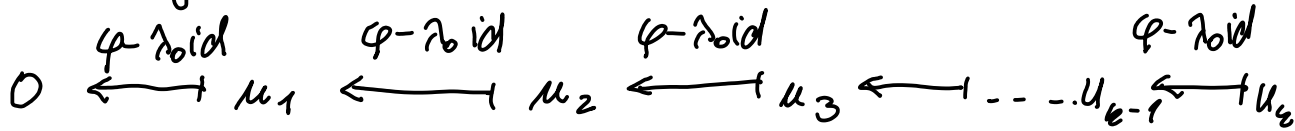
$$\varphi(u_1) - \lambda_0 u_1 = 0$$

$$\varphi(u_2) - \lambda_0 u_2 = u_1$$

$$\varphi(u_3) - \lambda_0 u_3 = u_2$$

$$\varphi(u_k) - \lambda_0 u_k = u_{k-1}$$

Schématicky budeme postupovat



Všimněme si, že u_1 je vlastní vektor
ke vlastnímu číslu λ_0 .

Lemma: Vektory u_1, u_2, \dots, u_k jsou lineárně
nezávislé.

Důkaz indukci podle k :

Pro $k=1$ je u_1 vlastní vektor, $u_1 \neq \vec{0}$ je LN.

Necht' platí pro $k-1 \geq 1$ a u_1, \dots, u_{k-1} je řešení.

$$(*) \quad \sum_{i=1}^k a_i u_i = \vec{0}$$

Aplikujeme $\varphi - \lambda_0 \text{id}$, tudíž $(\varphi - \lambda_0 \text{id})(u_i) = u_{i-1}$
pro $i \geq 2$ a $(\varphi - \lambda_0 \text{id})u_1 = 0$, dostaneme

$$\sum_{i=2}^k a_i u_{i-1} = \vec{0}$$

Podle ind. předpokladu jsou u_1, \dots, u_{k-1}
LN, proto $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$.

Dosazení m do původní rovnice (*), dostaneme

$$a_1 u_1 = \vec{0}.$$

Dobře $u_1 \neq \vec{0}$, je $a_1 = 0$ a tedy

u_1, u_2, \dots, u_k jsou LN.

Souvislost řetězce s Jord. buňkou

Nechtě u_1, u_2, \dots, u_k je řetězec po m. č. do λ_0 operátorem φ

$$V = [u_1, u_2, \dots, u_k]$$

Platí

$$\varphi(V) \subseteq V$$

neboli

$$\varphi(u_1) = \lambda_0 u_1$$

$$\varphi(u_2) = \lambda_0 u_2 + u_1$$

$$\varphi(u_k) = \lambda_0 u_k + u_{k-1}$$

Vezmeme tedy $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_k)$
a spočítáme

$$\varphi/V : V \rightarrow V$$

matici

$$(\varphi/V)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$= J_k(\lambda_0).$$

Věta o Jordanově kan. tvaru

Nechť U je vekt. prostor dimenze n nad K . Nechť $\varphi: U \rightarrow U$ je lineární operátor takový, že součet algebraických násobností jeho vlastních čísel je n .

Potom v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = J$$

je matice v Jordanově kanonickém tvaru. Tento tvar je určen jednoznačně, až na pořadí buněk.

Poznámka 1: Báze α NEMÍ určena jednoznačně!

Poznámka 2: Báze α je posloupnost různých řetězců k vlastnímu číslu λ operátoru φ .

Dodatek k větě: Je-li U vektorový prostor nad \mathbb{C} , má každý char. polynom operátoru $\varphi: U \rightarrow U$ v komplexních číslech reálné násobnosti. Proto je podmínka z věty v tomto případě vždy splněna.

Věta o Jord. kanonickém tvaru - maticová verze

Nechť $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$, jejíž char. polynom má n kořenů včetně násobků.

Pak A je podobná matici J v jordanově kanonickém tvaru, tj.

$$J = P^{-1} A P$$

kde P je nějaká regulární matice. Matice J je určena jednoznačně, až na pořadí buněk.

Obě verze jordanovy věty jsou ekvivalentní!

Další věta: rese je operátor \Rightarrow maticová verze

Nechť $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$. Uvažujme operátor

$$\varphi: K^n \rightarrow K^n \quad \varphi(x) = Ax.$$

Nechť α je báze v K^n báze, se

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = J \quad \text{matice v JKT.}$$

Pak

$$\begin{aligned} J &= (\varphi)_{\alpha, \alpha} = (\text{id})_{\alpha, \varepsilon_n} (\varphi)_{\varepsilon_n, \varepsilon_n} (\text{id})_{\varepsilon_n, \alpha} = \\ &= P^{-1} A P. \end{aligned}$$

Důsledek: Dvě komplexní matice A, B tvaru $n \times n$ jsou podobné, právě když mají stejný jordanův kanonický tvar (až na pořadí úvňek).

Jordanův kanonický tvar je invariant podobnosti!

PŘÍKLADY

Příklad 1a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Chceme najít JKT pro matici A

Char. polynom je $\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2$

Vl. čísla $\lambda_1 = 2$
 $\lambda_2 = 1$

vl. vektor $v_1 = (1, -2, 3)^T$

alg. nás. 2

geom. nás. 2

vlastní vektory $v_2 = (3, 6, -8)^T$
 $v_3 = (1, -1, 1)^T$

Seznamme bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

$$J = (\varphi)_{\alpha, \alpha} = (\text{id})_{\alpha, \varepsilon_3} (\varphi)_{\varepsilon_3, \varepsilon_3} (\text{id})_{\varepsilon_3, \alpha}$$

$$= P^{-1} A P$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Ikauška $PJ = AP$
 (bez pūitā'mi' inverse P^{-1}).

Pūklad 1b

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x) = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2$$

$$\text{Vl. ā'slu } \lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 1 \text{ alg. ma's. } 2$$

Vlastni' vektory

$$\lambda_1 = 2 \quad v_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\lambda_2 = 1 \quad v_2 = (1, -1, 0)^T \quad \text{geom. ma's. } 1$$

Maximāle nāji'k i'ebenes de'ļny 2 h vl.
 ā'slu $\lambda_2 = 1$

$$\vec{0} \xleftarrow{A - 1E} v_2 = (1, -1, 0)^T \xleftarrow{A - 1 \cdot E} v_3$$

$$\text{Pē'nime saukaru } (A - E)v_3 = v_2.$$

Ma' n'ac řešení. Vybereme jedno

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Vektory v_1, v_2, v_3 tvoří bázi α

Platí $\varphi(v_1) = 2v_1$

$\varphi(v_2) = v_2$

$\varphi(v_3) = v_2 + v_3$

Přide $(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$ je matice v JKT.

Opět

$$J = (\varphi)_{\alpha, \alpha} = (\text{id})_{\alpha, E_3} (\varphi)_{E_3, E_3} (\text{id})_{E_3, \alpha} = P^{-1} A P$$

PRAVIDLO 1

JKT matice A obsahuje na diagonále vlastní čísla matice A , každé s libi volnou násobností, kolik čísel má násobnost.

PRAVIDLO 2

V JKT matice A je počet Jordanových buněk s λ číslem λ_0 roven geometrické násobnosti λ_0 čísla.

Každé matice odpovídá 1 řešení. Me sčítlem
každé řešení řešení mají vlastní vektor.

$$\left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Tato dvě pravidla umožňují pomocí algebrai-
cké a geometrické metody najít JKT
matic 2x2 a 3x3. Pro matice 4x4
někdy má metoda!

Klasifikace JKT pro matice 3x3

① 3 různá vl. čísla

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

②A 2 různá vlastní čísla

λ_1 alg. n. s. 1
 λ_2 alg. n. s. 2
geom. n. s. 2

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

②B 2 různá vl. čísla

λ_1 alg. n. s. 1
 λ_2 alg. n. s. 2
geom. n. s. 1

$$J = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right)$$

3A) jedine! vl. číslo alq. n.á's 3, geom. n.á's. 3

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

3B) jedine! vl. číslo alq. n.á's. 3, geom. n.á's. 2

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

3C) jedine! vl. číslo alq. n.á's 3, geom. n.á's. 1

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Je třeba najít matici P tak, aby
 $J = P^{-1} A P$.

K tomu musíme hledat řešení!

Příklad 2 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda A) = (2 - \lambda)^3$$

$\lambda_1 = 2$ je vl. číslo alg. nás. 3, geom. nás. 1
Vlastní vektor $u_1 = (2, 1, 2)^T$.

Maximálně najít řešení délky 3 pro vl. číslo 2.
Ten vlastní vektorem u_1

$$(A - 2E)u_2 = u_1$$

$$(A - 2E)u_3 = u_2$$

Jedno z možných řešení je

$$u_2 = (5, 2, 1)^T, \quad u_3 = (3, 1, 0)^T$$

Matice φ v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je

$$\begin{aligned} (\varphi)_{\alpha|\alpha} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J = (\text{id})_{\alpha, \varepsilon_3} (\varphi)_{\varepsilon_3, \varepsilon_3} (\text{id})_{\varepsilon_3, \alpha} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matice P není *určena jednoduše*, protože

soustava $(A - 2E)u_2 = u_1$

$$(A - 2E)u_3 = u_2$$

ma' více řešení!

Příklad 3 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)^3$$

vl. číslo $\lambda_1 = 2$ alg. nás. 3, geom. nás. 2
s vlastními vektory $au + bv$

$$u = (2, -1, 0)^T, \quad v = (0, 0, 1)^T$$

Víme, že JKT je

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \text{Báze } \alpha \text{ kalorá, ře} \\ J = (\varphi)_{\alpha, \alpha}$$

se skládá se dvou
řetězců po vl. čísla 2. Jeden má
délku 1, druhý délku 2. Musíme
spíšit, kterým vlastní vektorem seřídá
řetězec délky 2. Pořídáme sádem

$$(A - 2E)w = aw + bv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Tala sustara
ma' ieremi, ma' ve
rdyri

$$2a+b=0.$$

Pido ardlme $a=1, b=-2$ nyisne sustara

$$(A-2E)w = u-2v$$

Ta nede na $(1 \ 2 \ 0 \ | \ 1)$

Moime' ieremi je $w = (-1, 1, 0)$

Veklong

$$0 \xleftarrow{A-2E} u-2v \xleftarrow{A-2E} w$$

"

$$(2, -1, -2) \xleftarrow{\quad} (-1, 1, 0)$$

Imi ieriac de' lly 2.

Neamome ba'ri $\alpha = (\underbrace{u}_{\text{ieriac de' lly 1}}, \underbrace{u-2v}_{\text{ieriac de' lly 2}}, w)$

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) = J = (\text{id})_{\alpha, \mathcal{E}_3} \quad \wedge \quad (\text{id})_{\mathcal{E}_3, \alpha}$$

||

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice 4x4 JKT nelse jiv' najit' pomai' alg. a geom. n'arvosti v jiv'ade, se matice ma' jidno ml. čisto alg. n'arvosti 4 a geom. n'arvosti 2.

Maime 2 n'arvosti

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & & \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \hline & & \lambda_1 & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_1 \end{array} \right)$$

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \\ \hline 0 & & & \lambda_1 \end{array} \right)$$

Příklad 4 $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (1 + \lambda)^4$$

$\lambda_1 = -1$ ml. čisto alg. n'arvosti 4, geom. n'arvosti 2

Vlastni' vektory $a u + b v$

$$u = (1, 0, 3, 0)^T \quad v = (0, 0, 1, -2)^T$$

Hledáme řešení de'lhuj' aspoň 2.

$$(A + E)w = au + bv$$

V tomto křipadě má soustava řešení pro všechna a a b . (Udělejte si sami!) Tedy řešitelné pro obě soustavy

$$(A+E)u_1 = u \quad , \quad (A+E)v_1 = v$$

Dokážeme 2 řešení děleky 2. Try
 první bázi α

$$\alpha = \left(\underbrace{u_1, u_1}_{1. \text{ řešení}} \quad \underbrace{v_1, v_1}_{2. \text{ řešení}} \right)$$

Např. $u_1 = (0, -1, 0, 3)^T$, $v_1 = (0, -2, 0, 5)^T$

$$(P)_{\alpha, \alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & 0 \\ 0 & -1 & & \\ \hline & & -1 & 1 \\ 0 & & 0 & -1 \end{array} \right) = J = \begin{matrix} (\text{id})_{\alpha, E_4} & A & (\text{id})_{E_4, \alpha} \\ \text{"P"} & & \end{matrix}$$

$$= P^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Kontrola správnosti výpočtu matice P:

Ověříme $P J = A P$.

Příklad 5

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi(x) = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^4$$

Uk. číslo $\lambda = 1$ alg. nás 4, geom. nás 2
Vlastní vektory $au + bv$

$$u = (0, 1, 0, 1)^T, \quad v = (-2, 0, 3, 0)^T$$

Řešíme soustavu $(A - E)w = au + bv$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & 0 & -2 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array} \right)$$

Soustava má řešení, právě když $a + 6b = 0$.

Zvolíme $b = 1, a = -6$
 $-6u + v = (-2, -6, 3, -6)^T$
je základní řešení dimenze 3.

$$(A - E)w = -6u + v$$

$$w = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0 \right)^T + a_1 u + b_1 v$$

pro všechna řešení. Hledáme 3. vektor řešení

$$(A - E)z = w$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -\frac{10}{3} + a_1 + 4b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array} \right)$$

Systém má řešení, právě když

$$-1 + a_1 + 6b_1 = 0$$

Uděláme $b_1 = 0, a_1 = 1$.

$$w = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1 \right)^T \quad z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)^T$$

Nalezi jsme řešení dělý 3

$$\vec{0} \longleftarrow -6u + v \longleftarrow w = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1 \right)^T \longleftarrow z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)^T$$

a řešení dělý 1 (lin. neseřaditelný)

$$\vec{0} \longleftarrow u$$

Base $\alpha = (\underbrace{-6u+v, w, z}_{\text{les bases de l'eq 3}}, \underbrace{u}_{\text{les bases de l'eq 1}})$

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 \end{array} \right) = J = (\text{id})_{\alpha, E_4} A (\text{id})_{E_4, \alpha}$$

here $(\text{id})_{E_4, \alpha} = P = \begin{pmatrix} -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 6 & 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$