Přednáška 12a: Jord. kan. tvar II

Matice 4×4 JKT nelze již najít pomocí alg. a geom. násobností v případě, že matice má jedno vl. číslo alg. násobnosti 4 a geom. násobnosti 2.

Máme 2 možnosti

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right) \qquad J = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right)$$

Příklad 4 $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = (1+\lambda)^4$

$\lambda_1 = -1$ vl. číslo alg. nás. 4, geom. nás. 2

Vlastní vektory $au + bv$

$$u = (1, 0, 3, 0)^T \qquad v = (0, 0, 1, -2)^T$$

Hledáme řetězec délky aspoň 2.

$$(A + E)w = au + bv$$

V tomto případě má soustava řešení pro všechna a i b. (Udělejte si sami!) Tedy řešitelné jsou obě soustavy

$$(A+E)u_1 = u \quad , \quad (A+E)v_1 = v$$

Dostáváme 2 řetězce délky 2. Ty tvoří bázi α

$$\alpha = (\underbrace{u, u_1}_{1.\ \text{řetězec}}, \underbrace{v, v_1}_{2.\ \text{řetězec}})$$

Např. $u_1 = (0, -1, 0, 3)^T$, $v_1 = (0, -2, 0, 5)^T$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = J = \underbrace{(id)_{\alpha,\varepsilon_4}}_{P^{-1}} A \underbrace{(id)_{\varepsilon_4,\alpha}}_{P}$$

$$= P^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Kontrola správnosti výpočtu matice P:

Ověříme $PJ = AP$.

Příklad 5 $\quad \varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \ \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^4$$

Vl. číslo $\lambda = 1$ alg. nás. 4, geom. nás. 2

vlastní vektory $\quad au + bv$

$$u = (0,1,0,1)^T, \quad v = (-2,0,3,0)^T$$

Řešíme soustavu $\quad (A - E)w = au + bv.$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & 0 & -2 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení, právě když

$$a + 6b = 0.$$

Zvolíme $b = 1, \ a = -6$

$$-6u + v = (-2,-6,3,-6)^T$$

je začátek řetězce délky 3.

$$(A - E)w = -6u + v$$

$$w = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0\right)^T + a_1 u + b_1 v$$

jsou všechna řešení. Hledáme 3. vektor řetězce

$$(A-E)z = w$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} + a_1 + 4b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení, právě když

$$-1 + a_1 + 6b_1 = 0.$$

Zvolíme $b_1 = 0$, $a_1 = 1$.

$$w = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T \qquad z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

Nalezli jsme řetězec délky 3

$$\vec{o} \longleftarrow -6u + v \longleftarrow w = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T \longleftarrow z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

a řetězec délky 1 (lin. nezávislý)

$$\vec{o} \longleftarrow u$$

Báze $\alpha = (\underbrace{-6u+v,\ w,\ z}_{\text{řetězec délky } 3},\ \underbrace{u}_{\text{řetězec délky } 1})$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right) = J = (id)_{\alpha,\varepsilon_4} A \, (id)_{\varepsilon_4,\alpha}$$

kde $(id)_{\varepsilon_4,\alpha} = P = \begin{pmatrix} -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 6 & 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$