Přednáška 13a

APLIKACE JORDANOVA KANONICKÉH TVARU

Připomeňme maticovou verzi: Je-li A matice $n \times n$ nad $\mathbb{K}$, která má n vlastních čísel včetně násobností, pak je podobná matici J v JKT, tj. existuje regulární matice P taková, že

$$J = P^{-1} A P .$$

Počítání vysokých mocnin matice A

Pro reálná i komplexní čísla platí binomická věta

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Tato věta <u>obecně NEPLATÍ pro matice $n \times n$</u>, $n \geq 2$. Důvodem je, že matice obecně nekomutují:

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B$$
$$= A^2 + A\cdot B + B\cdot A + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 .$$

Jestliže však $A\cdot B = B\cdot A$, pak binomická věta platí

$$(A+B) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^{n-i} B^{i} .$$

Nechť matice A má JKT J. Pišme

$$A = PJP^{-1}.$$

Potom

$$A^n = (PJ\underbrace{P^{-1})(P}_{E}J\underbrace{P^{-1})(P}_{E}JP^{-1}) \dots \underbrace{(P}_{E}JP^{-1})$$

$$= PJ^nP^{-1}.$$

Známe-li matici P stačí k výpočtu A^n spočítat

$$J^n.$$

Udělejme to nejprve pro Jordanovu buňku

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_k + D_k$$

kde E_k je jednotková matice $k \times k$
a $D_k = J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

Vidíme, že

① $(\lambda E_k)^n = \lambda^n E_k$

② $D_k^2, D_k^3, \dots D_k^{k-1}$ jsou matice, kde diagonála z jedniček se postupně posunuje vpravo, tj

$$D_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & 0 & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad D_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

a

$$D^k = D^{k+1} = \dots = D^n = \dots = 0 \qquad \text{pro } n \geq k.$$

③ Protože $E_k \cdot D_k = D_k \cdot E_k$, můžeme použít binomickou větu:

$$J_k^n(\lambda) = (\lambda E_k + D_k)^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} E_k \cdot D_k^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} E_k D_k^i$$

$$= \lambda^n E + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} D_k + \binom{n}{2} \lambda^{n-2} D_k^2$$

$$+ \dots + \binom{n}{k-1} \lambda^{n-k+1} D_k^{k-1}$$

Pro každé n má součet pouze k členů!

Je-li matice J blokově diagonální s Jordanovými buňkami na diagonále, součásné J^n „blokově diagonálně", tj.

$$J^n = \begin{pmatrix} J_{k_1}^n(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}^n(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_s}^n(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Tedy, známe-li matici J, známe snadno její n-té mocniny a rovněž víme, že

$$A^n = P J^n P^{-1} .$$

EXPONENCIÁLA z matice

Můžeme definovat, že pro čtvercovou matici A tvaru $n \times n$ je e^A rovněž čtvercová matice $n \times n$ taková, že

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

Lze ukázat, že pro každý prvek v r-tém řádku a s-tém sloupci $(e^A)_{r,s}$ příslušná řada absolutně konverguje.

Jestliže matice A a B komutují, pak

$$e^{(A+B)} = e^A \cdot e^B,$$

obecně to neplatí. Je to důsledek binomické věty. Proto pro Jordanovu buňku $J_k(\lambda)$ platí

$$e^{J_k(\lambda)} = e^{(\lambda E_k + D_k)} = e^{\lambda E_k} \cdot e^{D_k}$$

Souvislost se soustavami lineárních diferenc. rovnic

Víme, že rovnice $x' = ax$, $x(0) = x_0$ pro funkci $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má řešení

$$x(t) = e^{at} x_0$$

Soustavu lin. dif. rovnic s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ &\dots\dots \\ x_n' &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n \end{aligned}$$

pro neznámé funkce $x_1, x_2, \dots x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ můžeme psát maticově

$$x'(t) = A \cdot x(t), \quad x(0) = x_0$$

s maticí $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ a neznámou funkcí

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ (nebo } \mathbb{C}^n\text{)}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$$

Ukazuje se, že stejně jako v případě $n = 1$ je řešení této soustavy určeno exponenciálou

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0 = \left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots\right) x_0$$

Tato řada totiž konverguje stejnoměrně a my ji můžeme derivovat člen po členu:

$$\left(e^{At}\right)' = E' + (At)' + \left(\frac{A^2 t^2}{2!}\right)' + \left(\frac{A^3 t^3}{3!}\right)' + \dots$$

$$= 0 + A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$= A\left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots\right) = A e^{At}$$

Pro Jordanovu buňku lze snadno spočítat:

$$e^{J_k(\lambda) t} = e^{(\lambda t E_k + t D_k)} = e^{\lambda t E_k} \cdot e^{t D_k}$$

$$= e^{\lambda t} E_k \cdot e^{t D_k} =$$

$$= e^{\lambda t} \cdot \left(E_k + t D_k + \frac{t^2 D_k^2}{2!} + \dots + \frac{t^{k-1} D_k^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$

což je KONEČNÁ ŘADA!

Totéž platí pro každou matici J v JKT!

Soustavu $\quad y'(t) = J y(t) \quad y(0) = y_0$
tedy umíme spočítat pomocí konečného součtu. Nechť

$$A = P J P^{-1} .$$

Pak soustava

$$x'(t) = A x(t) \qquad x(0) = P y_0$$

má řešení

$$x(t) = P y(t)$$

neboť

$$x'(t) = P y'(t) = P J y(t) = P J P^{-1} x(t) = A x(t)$$

Tedy soustavu $\quad x'(t) = A x(t)$
$\qquad\qquad\qquad\quad x(0) = x_0$
spočítáme opět pomocí konečného součtu

$$x(t) = P y(t) ,$$

kde y je řešení soustavy

$$y'(t) = J y(t)$$
$$y(0) = P^{-1} x_0 .$$