Kvadratické formy

Bilin. forma $\quad f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$

$$f(au_1 + bu_2, v) = a f(u_1, v) + b f(u_2, v)$$

$$f(u, av_1 + bv_2) = a f(u, v_1) + b f(u, v_2)$$

f symetrická $\quad f(u, v) = f(v, u)$

Bilin. forma $\longrightarrow$ matice f v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$A = (a_{ij}) \quad a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

f symetrická b. f. $\Longleftrightarrow$ matice A je symetrická

f bilin. forma $\qquad A$ matice v bázi α

$\qquad\qquad\qquad\qquad B$ matice v bázi β

$$B = P^T A P \qquad P = (id)_{\alpha,\beta}$$

<u>Hlavní výsledek</u>: Ke každé sym. bilin. formě existuje báze β taková, že v jejích souřadnicích je

$$f(u,v) = (u)_\beta^T \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} (v)_\beta = b_{11}x_1y_1 + \dots + b_{nn}x_ny_n$$

B polární báze

f v bázi α $\quad A \quad \alpha = (u_1, \dots, u_n) \quad \beta = (v_1, \dots, v_n)$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \\ \hline u_1 \cdots u_n & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & & 0 & v_1 \\ & \ddots & & v_2 \\ 0 & & b_{nn} & \vdots \\ & & & v_n \\ \hline v_1 & v_2 \cdots & v_n & \end{array}\right)$$

stejné řádk. a sloupc. úpravy

Ke každé sym. matici existuje diagonální matice D tak, že

$$D = P^T A P$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right)$$

stejné řádk. a sloupc. úpravy

$$\sim \left(\begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

$$(A \mid E) \sim \dots \sim (D \mid P^T) \qquad D = P^T A P$$

$$\begin{array}{c|c} \overset{D}{\parallel} & \\ P^T A P & P^T E \\ \hline E \cdot P & \end{array}$$

Kvadratická forma $\quad q: U \to K \quad$ U vekt. prostor nad K

je zobrazení, ke kterému existuje sym. bilin. forma

$f: U \times U \to K$ tak, že platí $\quad \boxed{q(u) = f(u,u)}$

Příklad: $\quad f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{12} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

$$q(x) = f(x,x) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

Lemma Každá kvadratická forma q určuje jednoznačně symetrickou bilin. formu f takovou, že $q(u) = f(u,u)$

Příklad: $q : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q(p) = p(0)\cdot p(1) + \left(p'(2)\right)^2$$

$$f(p,g) = \frac{1}{2}p(0)g(1) + \frac{1}{2}p(1)g(0) + p'(2)\cdot g'(2)$$

f je sym. bilin. forma

Důkaz lemmatu

$q(u) = f(u,u)$

$$q(u+v) - q(u-v) = f(u+v, u+v) - f(u-v, u-v) =$$

$$= f(u,u) + \underbrace{f(u,v) + f(v,u)}_{2f(u,v)} + f(v,v) - \underbrace{\left\{ f(u,u) - f(u,v) - f(v,u) + f(v,v) \right\}}_{-\left(-2f(u,v)\right)}$$

$$= 4 f(u,v)$$

Hledaná sym. bilin. forma je

$$f(u,v) = \frac{1}{4}\left(q(u+v) - q(u-v)\right)$$

Příklad: $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$q(x) = 8x_1^2 - 3x_1x_2 + 9x_2x_3$$

$$f(x,y) = 8x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + \frac{9}{2}x_2y_3 + \frac{9}{2}x_3y_2$$

[Matice kvadr. formy v bázi α je matice příslušné bilin. formy v bázi α

V příkladu: ve stand. bázi $\varepsilon_3 = (e_1, e_2, e_3)$ je matice f (a tedy i q)

$$\begin{pmatrix} 8 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 9/2 \\ 0 & 9/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hlavní výsledek pro kvadr. formy

Ke každé kvadr. formě $q : U \to \mathbb{K}$ existuje v U báze B tak, že v jejích souřadnicích je

$$q(u) = (u)_B^T \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} (u)_B = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2$$

Kvadratické formy nad $\mathbb{R}$

Sylvestrův zákon setrvačnosti

Nechť $q : U \to \mathbb{R}$ je kvadr. forma. Pak v U existuje báze v, v jejíž souřadnicích má q vyjádření

$$q(u) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+r}^2 + 0 \cdot x_{p+r+1}^2 + \ldots + 0 \cdot x_n^2$$

Bází s touto vlastností může být více, ale vždy platí, že počet 1, počet -1, počet 0 je stejný pro všechny báze.

Signatura kvadr. formy je trojice čísel (s_+, s_-, s_0), která udává počty $1, -1$ a 0.

Důkaz věty: 1. část

Už víme, že lze najít bázi B, v níž

$$q(u) = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + \dots + b_{nn} y_n^2$$

Jestliže $b_{ii} > 0$. Provedeme změnu souřadnic takto

$$x_i = \sqrt{b_{ii}}\, y_i, \text{ pak místo } b_{ii} y_i^2 = \left(\sqrt{b_{ii}}\, y_i\right)^2 = x_i^2$$

$B = (v_1 \dots v_i \dots v_n)$ $\quad \mu = (u_1 \dots u_i$

$b_{ii} > 0$ $\quad \sqrt{b_{ii}}\, y_i = x_i$ $\quad b_{ii} = 0 \quad x_i = y_i$

$$\frac{v_i}{\sqrt{b_{ii}}} = u_i$$

nad $\mathbb{R}$

$b_{ii} < 0$

$$x_i = \sqrt{-b_{ii}}\, y_i$$

$$b_{ii} y_i^2 = -\left(\sqrt{-b_{ii}}\, y_i\right)^2 = -x_i^2$$

nad $\mathbb{C}$

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 + 0 \cdot x_{p+1}^2 + \dots + 0 \cdot x_n^2$

2. část setrvačnost

$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots x_p u_p + x_{p+1} u_{p+1} \dots$

Důkaz sporem:

$$q(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots \quad \text{v bázi } \alpha = (u_1 \dots u_n)$$

a současně

$$q(u) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots \quad \text{v bázi } \beta = (v_1 \dots v_n)$$

$$V = [u_1, u_2, \dots u_p] \quad \forall v \in V \setminus \{\vec{o}\} \quad q(v) > 0$$

$$W = [v_{s+1}, v_{s+1} \dots v_n] \quad \forall w \in W \quad q(w) \leq 0$$

Podívejme se na průnik $V \cap W \qquad \subseteq U$

$$\dim (V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim (V + W)$$
$$= p + n - s - \dim (V+W)$$
$$\geq p + n - s - n = p - s \geq 1.$$

Proto existuje vektor
$$u \in V \cap W \setminus \{0\}$$
a pro něj $q(u) > 0$ a současně $q(u) \leq 0$, spor.

Signatura symetrické matice A je signatura kvadratické formy $q(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline P & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} \overset{\tilde{D}}{\begin{matrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \; 0 \end{matrix}} & Q^T \\ \hline Q & \end{array}\right)$$

$h(\hat{D}) = s_+ + s_-$ $\qquad \tilde{D} = Q^T A Q$

$h(A) = s_+ + s_-$

A a B symetrické matice jsou kongruentní, jestliže

$$B = P^T A P, \quad \text{kde } P \text{ je regulární.}$$

Kritérium kongruence matic

Symetrické matice A a B jsou kongruentní, právě když mají stejnou signaturu.

$\Rightarrow A \simeq B$ a navíc, že $B \simeq \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = D$

signatura B je stejná jako signatura D

signatura A je taky stejná jako u D

$\Leftarrow$ A a B mají stejnou signaturu

$$A \simeq D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \simeq B$$

, kongruence je tranzitivní $\Rightarrow A \simeq B$

Speciální kvadr. formy nad $\mathbb{R}$

(důležité v analýze, dif. počet více proměnných)

1) pozitivně definitní kvadr. forma

$\Leftrightarrow \forall u \neq \vec{0} \quad q(u) > 0 \quad \Leftrightarrow (s_{+1}, s_{-1}, s_0) = (n, 0, 0)$

2) negativně definitní kvadr. forma

$\Leftrightarrow \forall u \neq \vec{0} \quad q(u) < 0 \Leftrightarrow (s_{+1}, s_{-1}, s_0) = (0, n, 0)$

3) indefinitní kvadr. forma

$\iff \exists u \in U, \exists v \in U \quad q(u) > 0, \; q(v) < 0.$

Analyzujme

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \qquad x_1^2 - x_2^2 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 = 0$$

$(0,0)$ je podezřelý v extrému

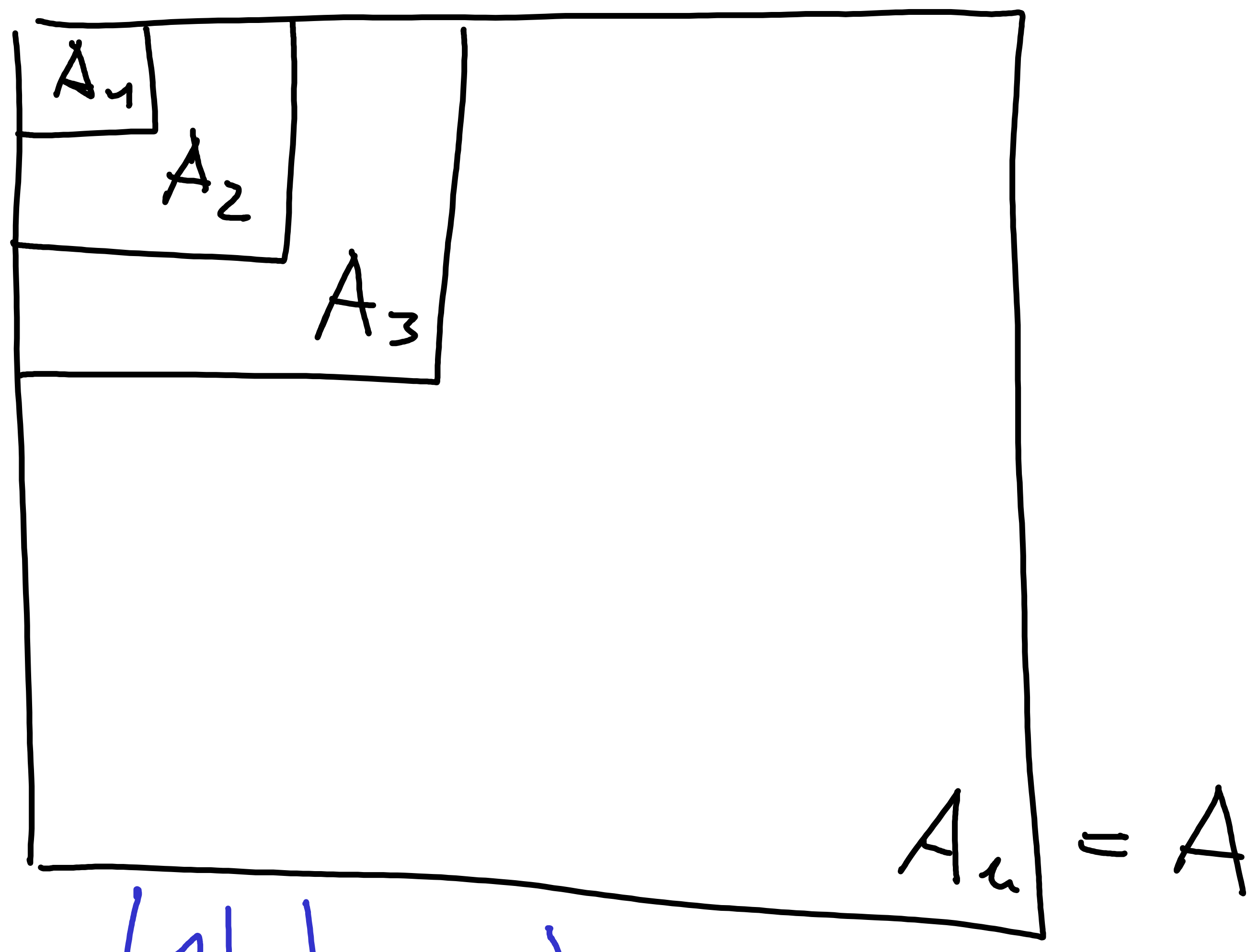
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

pozitivně def. kvadr. forma

Sylvestrovo kritérium

A sym. matice $n \times n$

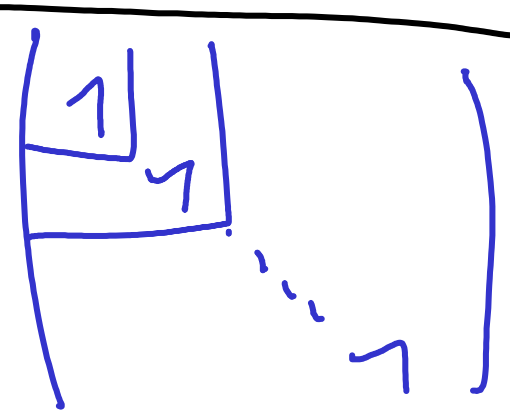


$\det A_1, \det A_2, \dots, \det A_n$

hlavní minory

- Matice A je pozitivně definitní právě když

$$\det A_1 > 0, \det A_2 > 0, \dots, \det A_n > 0.$$



$x_1^2 + \dots + x_n^2$

A sym. matice určuje neg. definitní kvadr. formu právě když

$\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \det A_3 < 0 \quad (-1)^n \det A_n > 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \quad -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$$

$\det(-1) = -1$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$

Příklad $\quad q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = \det (3) = 3 > 0$$

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$$

$$\det A_3 = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 10 > 0$$

Kvadr. forma je pozitivně definitní.

SKALÁRNÍ SOUČIN

Na střední škole ... skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

→ bilin. forma

→ symetrická

→ pozitivně definitní

Definice skalárního součinu na reálném vekt. prostoru

je to symetrická bilin. forma $\langle \, , \, \rangle : U \times U \to \mathbb{R}$

s vlastností $\forall u \in U \setminus \{0\} \quad \langle u, u \rangle > 0.$

symetrická bilin. forma

(1) $\langle a u_1 + b u_2, v \rangle = a \langle u_1, v \rangle + b \langle u_2, v \rangle$

$\langle u, a v_1 + b v_2 \rangle = a \langle u, v_1 \rangle + b \langle u, v_2 \rangle$

(2) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(3) $\forall u \neq \vec{0} \quad \langle u, u \rangle > 0.$

Definice skal. součinu na komplexním vekt. prostoru U

je to zobrazení $\langle \, , \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$

takové, že

(1) $\langle a u_1 + b u_2 , v \rangle = a \langle u_1, v \rangle + b \langle u_2 , v \rangle$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{C}$

(1b) $\langle u , a v_1 + b v_2 \rangle = \bar{a} \langle u , v_1 \rangle + \bar{b} \langle u , v_2 \rangle$ $\quad a = \alpha + i\beta$, $\bar{a} = \alpha - i\beta$

(2) $\langle u , v \rangle = \overline{\langle v , u \rangle}$

(3) $\forall u \in U \setminus \{0\}$ je $\langle u , u \rangle \in \mathbb{R}$ a $\langle u , u \rangle > 0$.

<u>Příklad</u> $\langle\ ,\ \rangle \quad \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$$

$x_i, y_i \in \mathbb{C}$

je lineární v x

$$\langle x, (\alpha + i\beta) y\rangle = x_1 \cdot \overline{(\alpha+i\beta) y_1} + x_2 \cdot \overline{(\alpha+i\beta) y_2}$$

$$= x_1 \cdot \overline{(\alpha+i\beta)}\, \overline{y_1} + x_2 \overline{(\alpha+i\beta)} \cdot \overline{y_2}$$

$$= \overline{(\alpha+i\beta)} (x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}) = \overline{(\alpha+i\beta)} \langle x, y\rangle = (\alpha - i\beta)\langle x, y\rangle$$

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$$

$$\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\left(y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2}\right)} = \overline{y_1}\,\overline{\overline{x_1}} + \overline{y_2}\,\overline{\overline{x_2}} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$$

$$\langle x, x\rangle = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 > 0 \quad \text{на } (x_1, x_2) \neq (0,0)$$

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$