Skalární součin

U vekt. prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\langle \, , \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$

(1) $\langle a u_1 + b u_1, v \rangle = a \langle u_1, v \rangle + b \langle u, v \rangle$ $\quad a, b \in \mathbb{K}$

(2) $\langle u, a v_1 + b v_2 \rangle = \bar{a} \langle u, v_1 \rangle + \bar{b} \langle u, v_2 \rangle$

(3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(4) $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$ $\quad \langle u, u \rangle > 0$ pro $u \neq \vec{O}$

Příklady:

1. $U = \mathbb{R}^n$ $\quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

stand. skal. součin na $\mathbb{R}^n$ $\quad x_i, y_i \in \mathbb{R}$

2. $U = \mathbb{C}^n$ $\quad \langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$

$x_i, y_i \in \mathbb{C}$

3. $U = \mathbb{R}^3$ $\quad \langle x, y \rangle = 3 x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + 2 x_1 y_3$

$+ 2 x_3 y_1 + 7 x_3 y_3$

To je skal. součin

Jde o sym. bilin. formu

Příslušná kvadr. forma $\langle x, x\rangle = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2$

je pozitivně definitní.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Minule jsme ukázali

$$\left.\begin{aligned} &\det(3) > 0 \\ &\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > 0 \\ &\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{Sylv. kriterium}}{\Longrightarrow} \text{kvadr. forma je pozitivně definitní}$$

$x \neq \vec{0} \quad \langle x, x\rangle > 0.$

④ $U = C[a,b]$ vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$ je skal. račun

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx > 0 \quad \text{za} \quad f \neq 0$$

<u>Norma</u> (velikost) vektorja je $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \geq 0$

$\|u\| = 0$ natanko tedaj, ko $u = \vec{0}$.

Kolmost vektorů $u \perp v$, jestliže $\langle u, v \rangle = 0$.

CAUCHYOVA NEROVNOST

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

přičemž rovnost nastane právě když jsou vektory u, v lineárně závislé.

Aplikace pro různé skalární součiny

① $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ na $\mathbb{R}^n$ $\quad \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

② $U = C[a,b]$ $\qquad \left| \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$

Důkaz Cauchyovy nerovnosti nad $\mathbb{R}$

$v = \vec{0} \Rightarrow$ nastane rovnost

$v \neq \vec{0}$ Uvažujme všechny vektory $u - tv$, $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv \rangle = \langle u, u \rangle - t\langle u, v \rangle - t\langle v, u \rangle + t^2\langle v, v \rangle$$

$$= \|u\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|v\|^2$$

Uvažujme kvadr. funkci $f(t) = t^2\|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + \|u\|^2$

$f(t) \geq 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$

Diskriminant $D = 4\langle u,v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$

$$\langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Rovnost v nerovnosti nastane právě tehdy $D = 0 \iff \exists t \in \mathbb{R}$, že

$f(t) = 0 \iff \|u - tv\|^2 = 0 \iff u - tv = \vec{0} \iff u = tv$

Trojuholníková nerovnosť

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \Rightarrow \quad \|u-u\| \leq \|u\| + \|-v\| = \|u\| + \|v\|$$

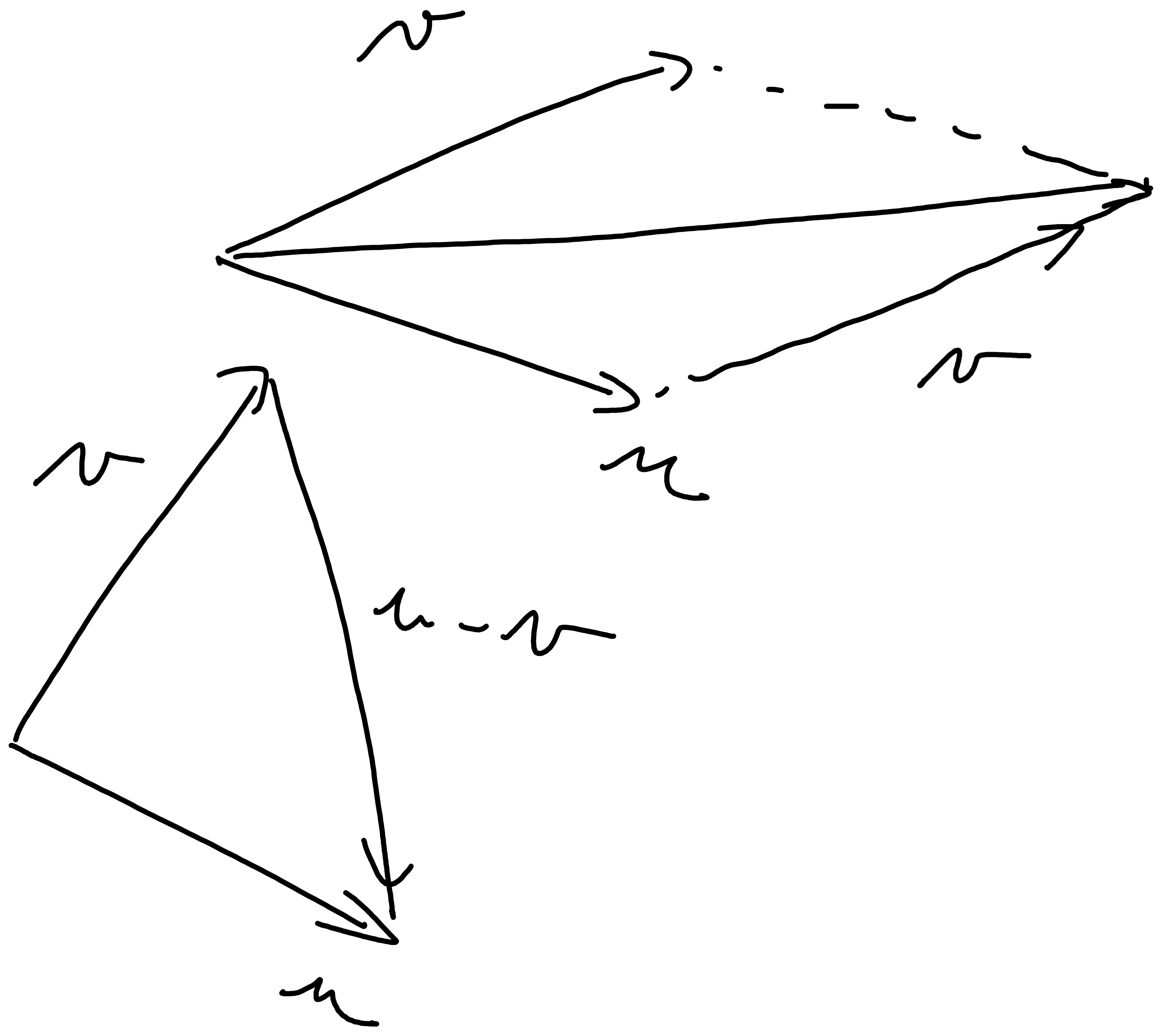
$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle$$

$$+ \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle =$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\,\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2$$

$$= \left(\|u\| + \|v\|\right)^2$$



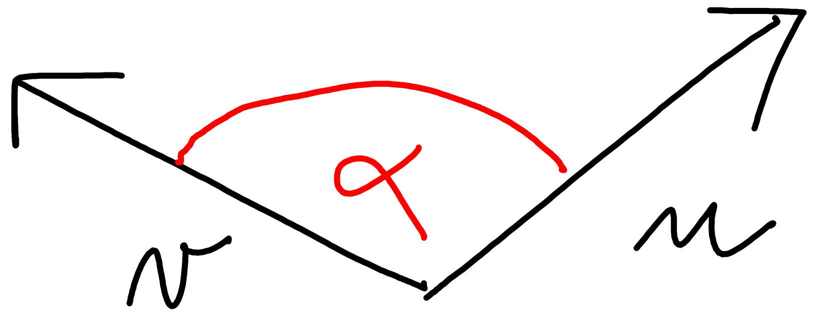
Úhel, který svírají dva vektory

$$-\|u\|\|v\| \le \langle u, v\rangle \le \|u\|\|v\| \qquad / : \|u\|\|v\|$$

$$-1 \le \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \le 1$$

Můžeme definovat, že úhel vektorů u, v je číslo $\alpha \in [0, \pi]$ takové, že

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$



Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou <u>ortogonální</u>, jestliže

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \text{pro } i \neq j$$

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou <u>ortonormální</u>, jestliže

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

<u>Lemma</u>: Jestliže $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou ortogonální a NENULOVÉ, pak jsou lineárně nezávislé.

$u_1, \dots u_k$ ortogonální a nenulové

Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$

Dokažme, že $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0} \qquad \langle -, u_1 \rangle$$

$$a_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{\neq 0} + a_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{= 0} + \dots + a_k \underbrace{\langle u_k, u_1 \rangle}_{= 0} = \underbrace{\langle \vec{0}, u_1 \rangle}_{= 0}$$

Stejně pro další a_i.

$$a_1 \underbrace{\| u_1 \|^2}_{\neq 0} = 0 \implies a_1 = 0$$

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces

je algoritmus, jak z lin. nezávislých vektorů $u_1, u_2, \dots u_k$ získáme ortogonální vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$.

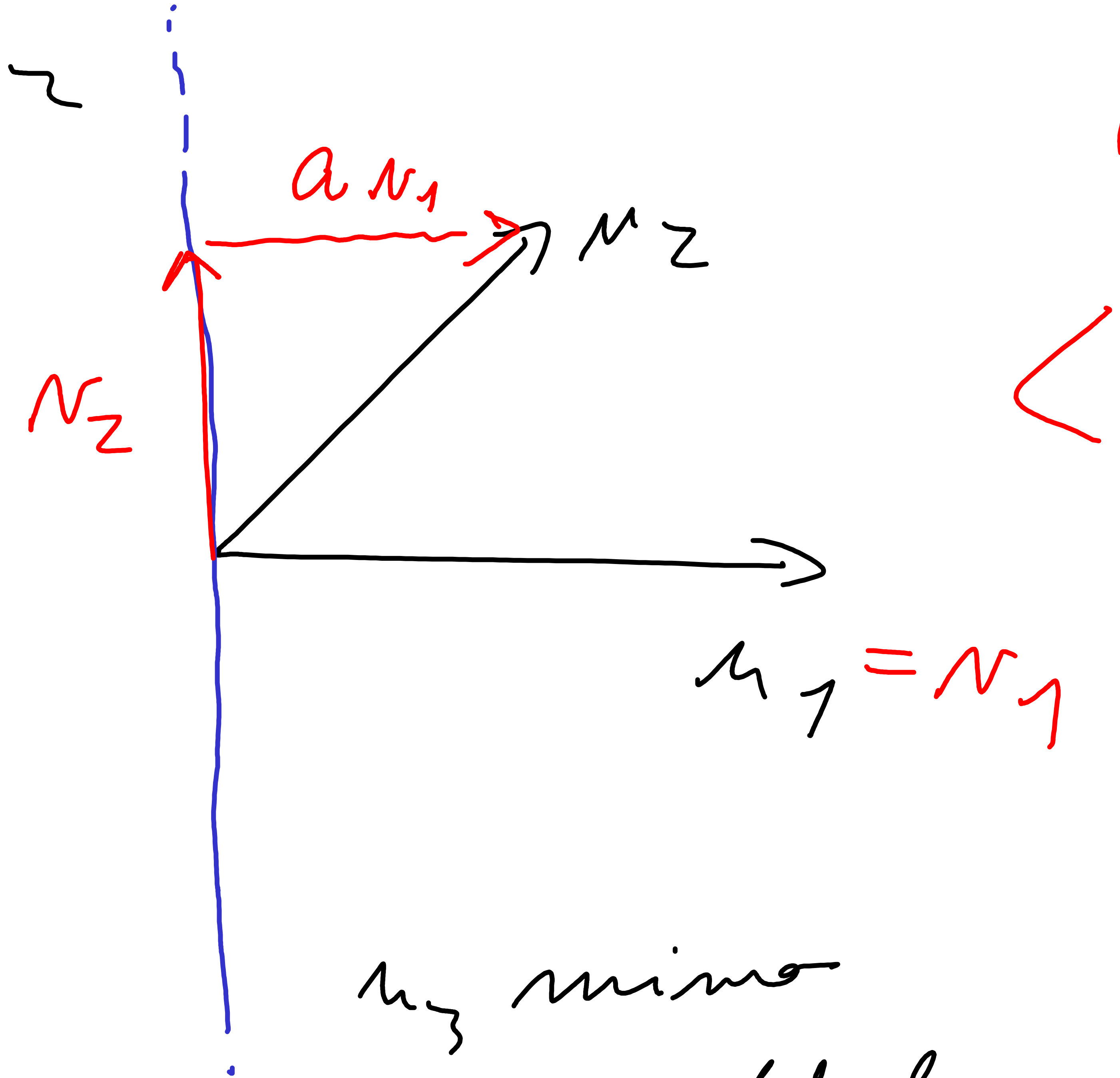
takové, že $[u_1, u_2, \dots u_i] = [v_1 \dots v_i]$

Vektory $v_1, v_2, \dots v_k$ nazádíme takto

$$v_1 = u_1$$
$$v_2 = u_2 - a v_1$$
$$v_3 = u_3 - b v_1 - c v_2$$

$$v_i = u_i - d_1 v_1 - d_2 v_2 - \dots - d_{i-1} v_{i-1}$$

u_1, u_2



u_3 mimo plochu tabule

$$v_2 = u_2 - a v_1 \quad / \ \langle \ , v_1 \rangle$$

$$\langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle - a \langle v_1, v_1 \rangle$$

$$0 = \langle u_2, v_1 \rangle - a \|v_1\|^2$$

$$a \|v_1\|^2 = \langle u_2, v_1 \rangle$$

$$a = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

$$v_3 = u_3 - b v_1 - c v_2 \quad / \ \langle \ , v_2 \rangle$$

$$0 = \langle v_3, v_2 \rangle = \langle u_3, v_2 \rangle - b \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{\text{"}0\text{"}} - c \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$0 = \langle u_3, v_2 \rangle - c \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$c \|v_2\|^2 = \langle u_3, v_2 \rangle \qquad c = \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2}$$

analogicky $\quad b = \dfrac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$

ORTONORMÁLNÍ BÁZE

je báze tvořená ortonormálními vektory.

Lemma V každém vekt. prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

Důkaz: Nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ je nějaká báze v U.
Provedeme Gr - Sch. ort. proces a dostaneme nenulové ortogonální vektory

$$v_1, v_2, \dots, v_n.$$

Tyto vektory vynormujeme

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \; w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|} \qquad \|w_i\| = 1$$

$$\underline{\|av\|^2} = \langle av, av\rangle = a\bar{a}\langle v, v\rangle = \underline{|a|^2\|v\|^2} \qquad \|av\| = |a|\,\|v\|$$

ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK množiny $M \subseteq U$

$$M^\perp = \{ v \in U \,;\, \forall u \in M \ \langle u, v \rangle = 0 \}$$

$M^\perp$ je vždy vekt. podprostor. (Ukažte si sami.)

$V \subseteq U$ je vekt. podprostor, pak platí, že

$$V \oplus V^\perp = U$$

1) $V \cap V^\perp = \{0\}$

$u \in V \cap V^\perp$ $\quad \langle \underset{V}{\underset{\cap}{u}}, \underset{V^\perp}{\underset{\cap}{u}} \rangle = 0 \Rightarrow u = \vec{0}$

2) $V + V^\perp = U$, pro prostory konečné dimenze

$v_1, v_2, \dots, v_k$ ortonormální báze ve V

$v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ ortonormální báze celého U.

$v_{k+1}, \dots, v_n \perp v_1, v_2, \dots, v_k \Rightarrow v_{k+1}, \dots, v_n \perp V \Rightarrow v_{k+1}, \dots, v_n \in V^\perp$

Nyní každý vektor $u \in V$ lze psát

$$u = \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k}_{\in V} + \underbrace{a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n}_{\in V^\perp}$$

$$U = V + V^\perp$$

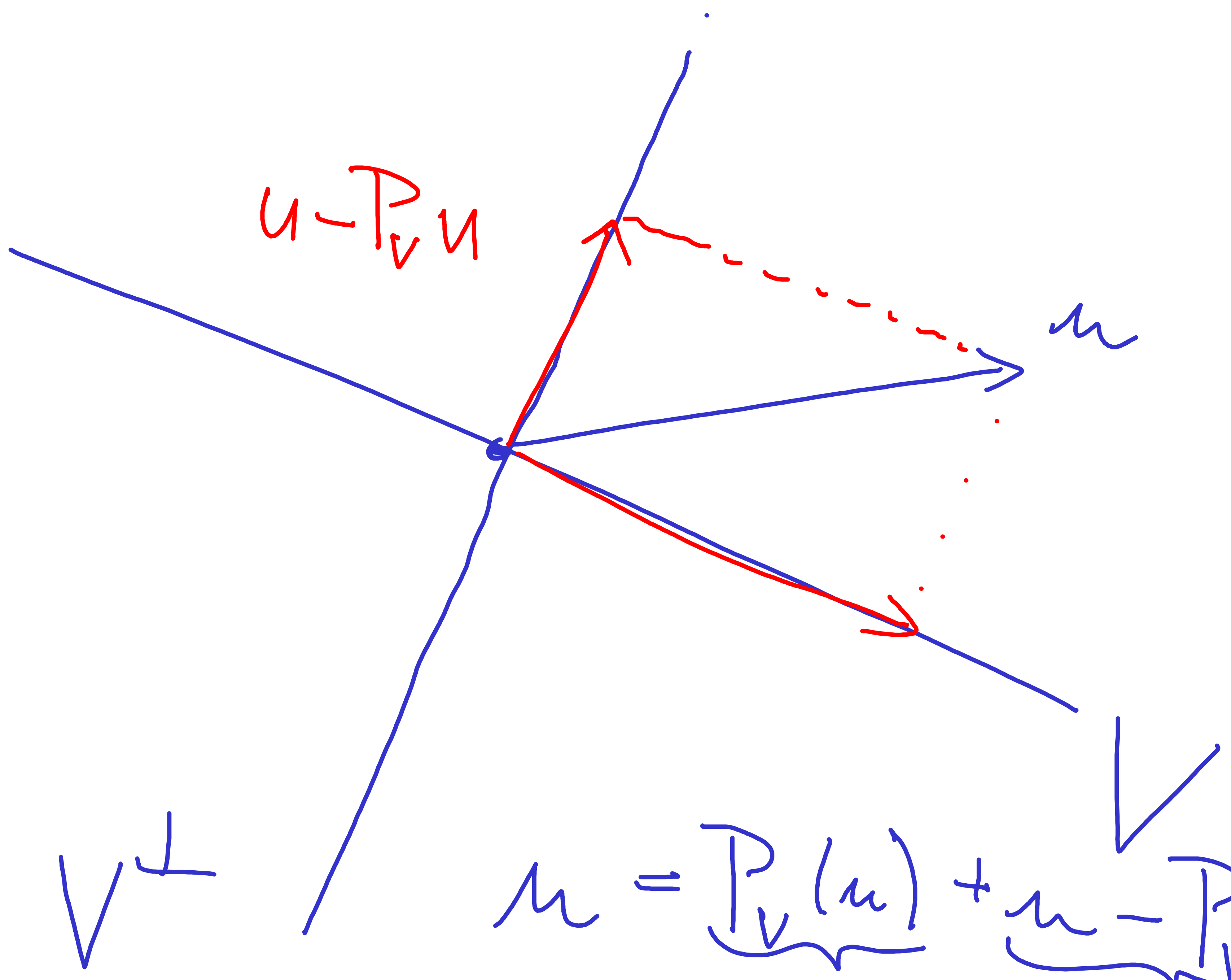
Z $U = V \oplus V^\perp$ plyne, že $v_{k+1}, \dots, v_n$ je báze $V^\perp$.

<u>Kolmá projekce do podprostoru</u> $P_V : U \longrightarrow V$

kde $V \subseteq U$ je podprostor.

① $u \in U$ $\quad P_V(u) \in V$

$u - P_V(u) \in V^\perp$ $\qquad u - P_V(u) \perp V$



$$u = \underbrace{P_V(u)}_{\in V} + \underbrace{u - P_V(u)}_{\in V^\perp}$$

② Totéž trochu jinak

Pro každé $u \in U$ existuje právě jeden vektor $v \in V$ a právě jeden vektor $w \in V^\perp$, že

$$u = v + w \quad (\Leftarrow V \oplus V^\perp = U)$$

$$P_V u = v$$

Výpočet kolmé projekce

$V = [v_1, v_2, v_3] \subseteq U \qquad u \in U$

Kolmá projekce u do V je vektor Pu

$$Pu = av_1 + bv_2 + cv_3$$

$$u - Pu \perp V \iff u - Pu \perp v_1, v_2, v_3$$

$$\langle u - av_1 - bv_2 - cv_3, v_1 \rangle = 0$$
$$\langle u - av_1 - bv_2 - cv_3, v_2 \rangle = 0$$
$$\langle \text{———}\,\|\,\text{———}, v_3 \rangle$$

$$\langle u, v_1 \rangle - a\langle v_1, v_1 \rangle - b\langle v_2, v_1 \rangle - c\langle v_3, v_1 \rangle = 0$$
$$\text{———}\,\|\,\text{———}$$
$$\text{———}\,\|\,\text{———}$$

Matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_3, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_3 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle \end{pmatrix} = A$$

Grammova matice

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{matrix} \langle u, v_1 \rangle \\ \langle u, v_2 \rangle \\ \langle u, v_3 \rangle \end{matrix}$$

① v_1, v_2, v_3 ortonormální báze

$a = \langle u, v_1 \rangle$

$b = \langle u, v_2 \rangle$

$c = \langle u, v_3 \rangle$

② v_1, v_2, v_3 navzájem ortogonální

$$a = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \quad b = \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2}, \quad c = \frac{\langle u, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2}$$

Důležité Je-li P_V projekce $U \to V$, pak

$$id - P_V \ : \ U \to V^\perp \text{ je projekce.}$$

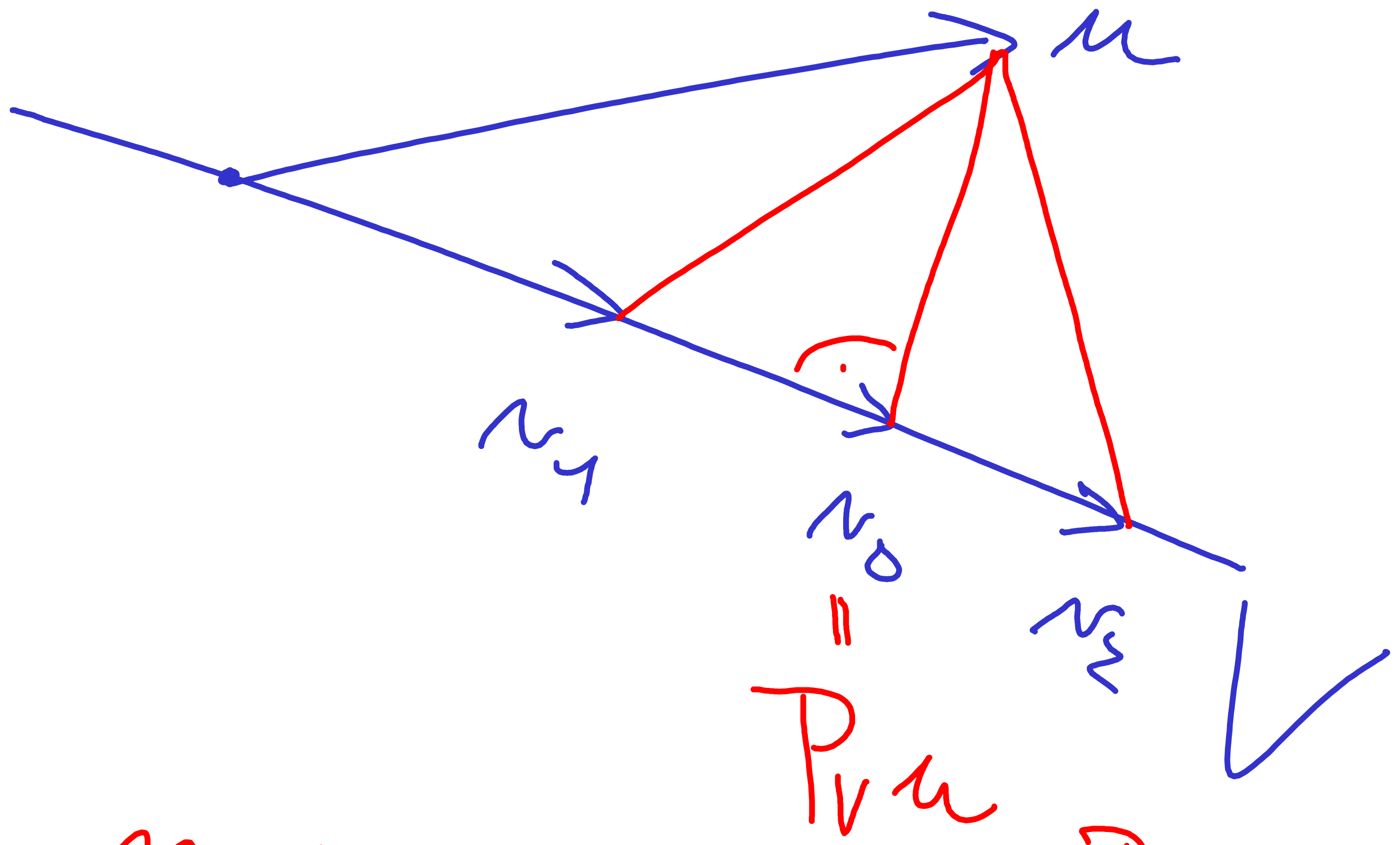
$$(id - P_V)(u) = u - P_V u$$

Vzdálenost dvou vektorů je $\|u - v\|$

CHARAKTERISTIKA KOLMÉ PROJEKCE

Nechť $V \subseteq U$ je podprostor, $u \in U$. Pak $P_V u$ do V je vektor $v_0 \in V$ takový, že

$$\|u - v_0\| = \min\{\|u-v\| ; v \in V\}$$



Minimum pro $Pu = v$.

Důkaz: Pro všechna $v \in V$ platí

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle (u-Pu)+(Pu-v), (u-Pu)+(Pu-v)\rangle = \langle u-Pu, u-Pu\rangle + \overbrace{\langle u-Pu, \underbrace{Pu-v}_{V}\rangle}^{0} + \overbrace{\langle Pu-v, u-Pu\rangle}^{0} + \langle Pu-v, Pu-v\rangle$$

$$= \|u-Pu\|^2 + \|Pu-v\|^2 \geq \|u-Pu\|^2$$