Eukleidovská geometrie

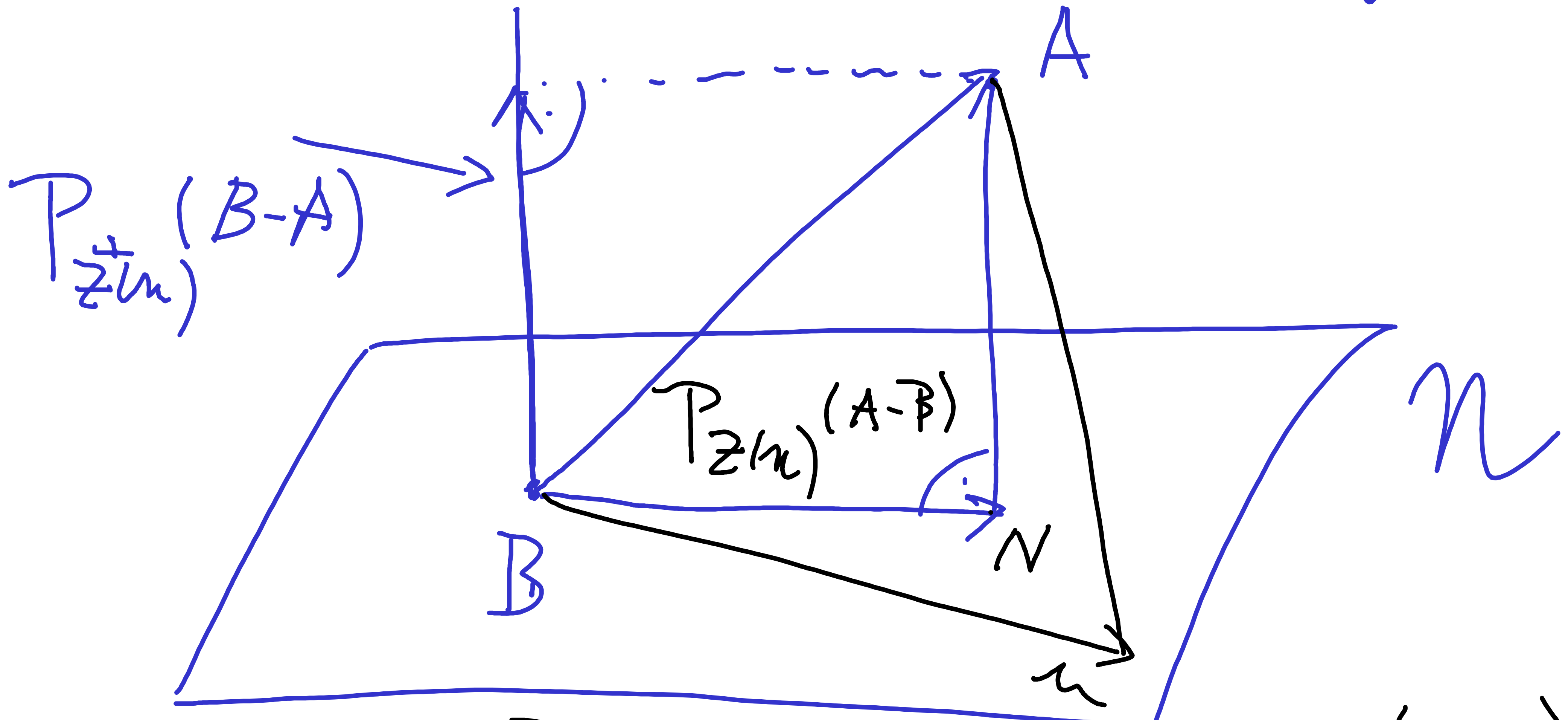
Budeme pracovat v reálném vekt. prostoru U se skalárním součinem (eukleidovský vekt. prostor) a budeme uvažovat afinní podprostory v něm.

Vzdálenost dvou bodů $\|A-B\| = \operatorname{dist}(A,B)$

Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{N}$ je

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{N}) = \inf\{\|A-N\|,\ N \in \mathcal{N}\}$$

Věta Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ je rovna velikosti vektoru kolmé projekce vektoru $A-B$ do $Z^{\perp}(\mathcal{N})$.



$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \| P_{Z^{\perp}(\mathcal{N})}(A-B) \|$$

Důkaz: $X \in \mathcal{N}$ $\quad X = B + u, \; u \in Z(\mathcal{N})$

$$\|A - X\| = \|A - B - u\| = \|(A-B) - u\| \geq \|(A-B) - P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)\| = \|P_{Z^{\perp}(\mathcal{N})}(A-B)\|$$

<u>Dodatek ke větě</u> Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

Nechť $N \in \mathcal{N}$.

Říkáme, že $N \in \mathcal{N}$ realizuje vzdálenost $\operatorname{dist}(A, \mathcal{N})$.

(1) $\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \|A - N\|$

(2) $A - N \perp Z(\mathcal{N})$

(3) $N = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A - B)$

$N = B + u, \quad u \in Z(\mathcal{U})$

$(1) \Rightarrow (3) \qquad \|A - N\| = \operatorname{dist}(A, \mathcal{U}) = \|A - B - u\|$ právě když

$u = P_{Z(\mathcal{U})}(A - B)$

$\Rightarrow N = B + u = B + P_{Z(\mathcal{U})}(A - B)$, tj. (3).

$(3) \Rightarrow (2) \quad N = B + P_{Z(\mathcal{U})}(A - B)$

$A - N = A - B - P_{Z(\mathcal{U})}(A - B) = P_{Z^{\perp}(\mathcal{U})}(A - B) \Rightarrow A - N \perp Z(\mathcal{U})$

$(2) \Rightarrow (1) \quad A - N \perp Z(\mathcal{U}) \quad X \in \mathcal{U} \quad X = N + u, \ u \in Z(\mathcal{U})$

$$\|A-X\|^2 = \|\underbrace{A-N}_{Z^\perp(n)}-\underbrace{u}_{Z(n)}\|^2 = \|A-N\|^2 - 2\underbrace{\langle A-N, u\rangle}_{=0} + \|u\|^2$$

$$= \|A-N\|^2 + \|u\|^2$$

Toto nabývá svého minima pro $u = \vec{0}$, tedy

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \inf \|A-X\| = \|A-N\|. \qquad (1).$$

Pythagorova věta $u \perp v$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Příklad: Vzdálenost v $\mathbb{R}^4$ bodu $A=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ od nadroviny

$$\mathcal{N}: \quad a y_1 + b y_2 + c y_3 + d y_4 + e = 0, \quad a^2+b^2+c^2+d^2>0.$$

Podle předchozí úvahy je

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{N}) = \left\| P_{Z^\perp(\mathcal{N})}(A-B)\right\| \qquad B\in\mathcal{N}$$

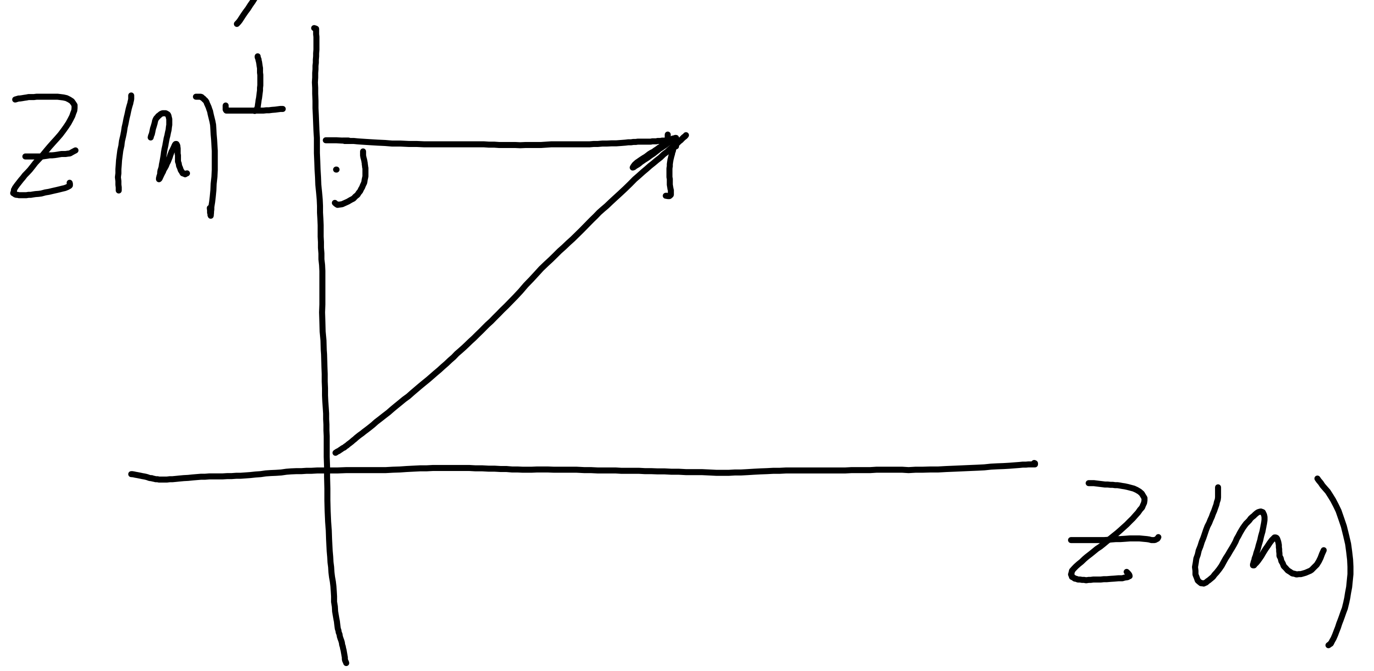
Předp. $d\neq 0$. Zvolíme

$$B=\left[0,0,0,-\frac{e}{d}\right]$$

$$Z(\mathcal{N}) = \{(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4,\ a y_1+b y_2+c y_3+d y_4=0\} = \{y\in\mathbb{R}^4\ \underbrace{\langle y,(a,b,c,d)\rangle}_{=0}\}$$

$$= [(a,b,c,d)]^{\perp}$$

$n = (a, b, c, d)$ a počítame $P_{Z(n)^{\perp}}(A - B)$



$$P_{Z(n)}^{\perp}(A - B) = \alpha \cdot n$$

$$A - B - \alpha n \perp Z(n)^{\perp}$$

$$A - B - \alpha n \perp n$$

$$\langle A - B, n \rangle - \alpha \langle n, n \rangle = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle A - B, n \rangle}{\langle n, n \rangle} = \langle (x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{e}{d}), (a, b, c, d) \rangle$$

$$\alpha = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\operatorname{dist}(A, H) = \|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\| = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$= \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

Vzdálenost dvou afinních podprostorů

$\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M}) \qquad \mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$

Věta: A) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \| P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^{\perp}} (A - B) \|$

B) Pro $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$ jsou následující výroky ekvivalentní

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \operatorname{dist}(M, N)$

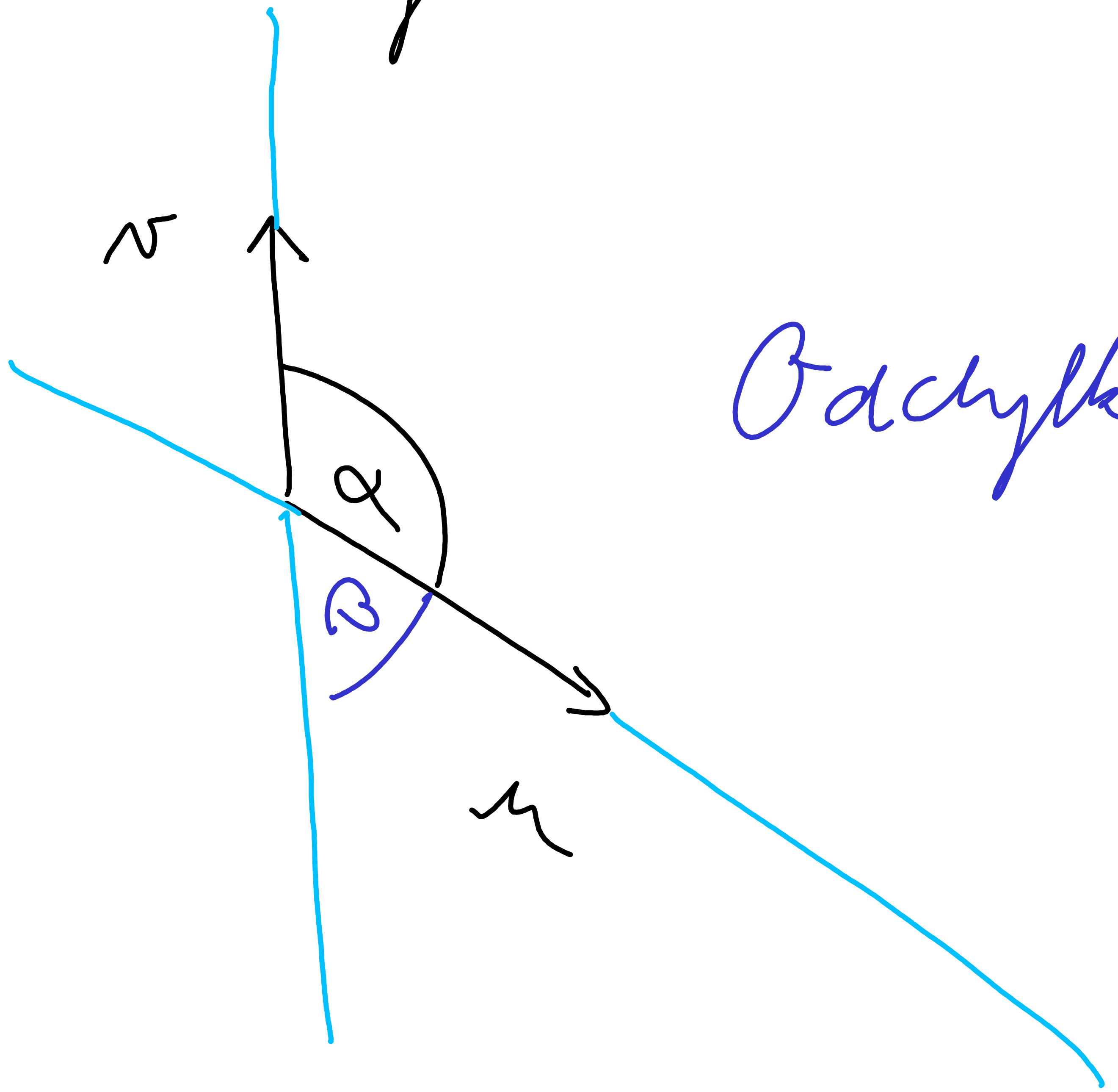
(2) $M - N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

(3) $M - N = P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^{\perp}} (A - B)$

Odchylky afinních podprostorů

Odchylka vektorů u, v je úhel $\alpha \in [0, \pi]$

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \|v\|}$$



Odchylka přímek $[u]$, $[v]$ je úhel $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\cos\beta = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \|v\|}$$

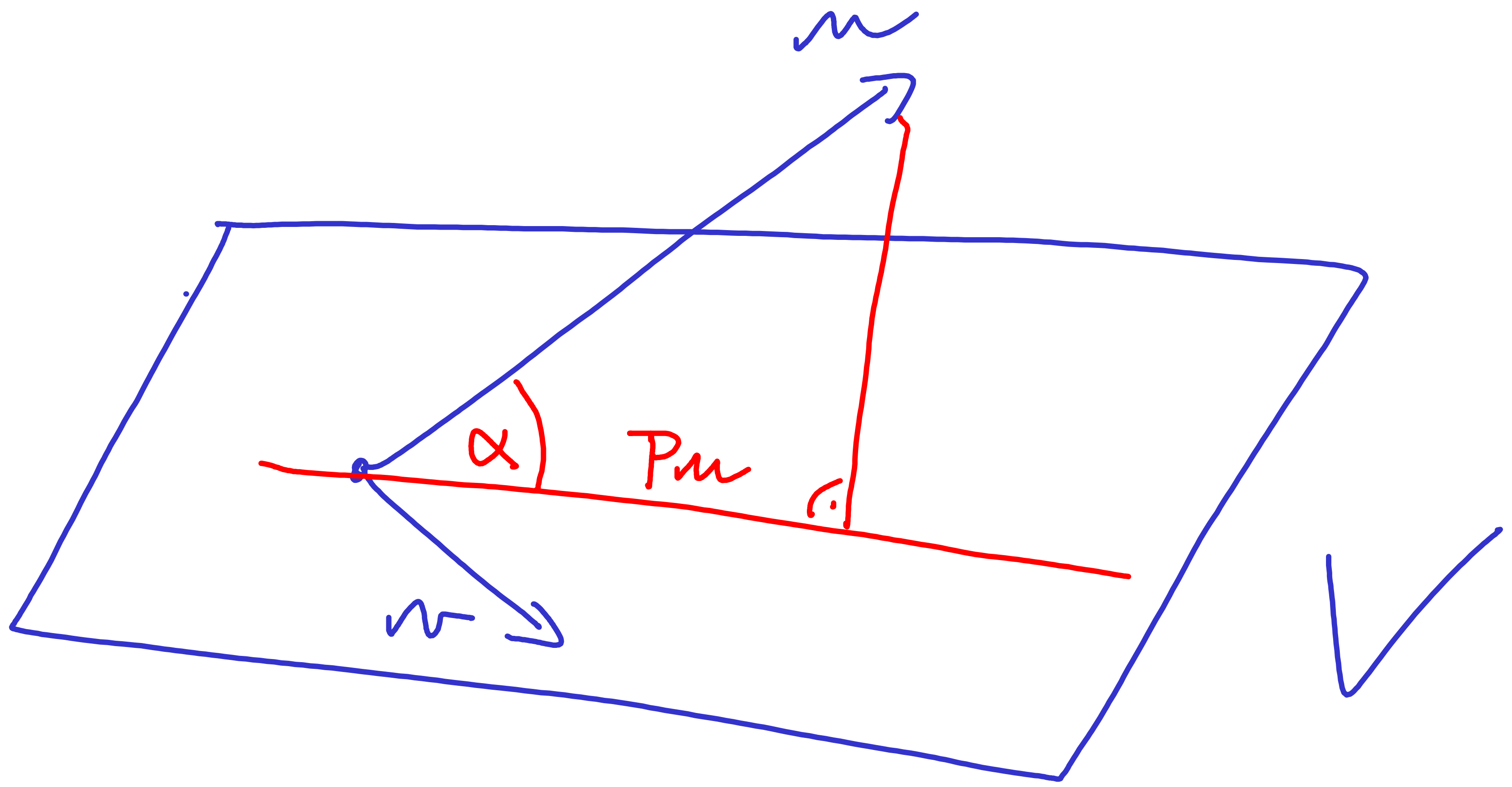
Souvislost odchylky přímky od vekt. podprostoru a kolmé projekce:

Věta: U vekt. prostor, V jeho podprostor, $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$.
Pu je kolmá projekce u do V. Potom Pu je až na násobek jediný vektor, který maximalizuje funkci

$$\cos(\sphericalangle [u],[v]) = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \quad \text{pro } v \in V \setminus \{\vec{o}\}$$

Její maximum je

$$\max_{v \in V \setminus \{\vec{o}\}} (\sphericalangle [u],[v]) = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$



$$\cos\alpha = \frac{|\langle u, Pu\rangle|}{\|u\|\,\|Pu\|} = \frac{|\langle Pu+u-Pu,\ Pu\rangle|}{\|u\|\,\|Pu\|}$$

$$= \frac{|\langle Pu, Pu\rangle + \overset{=0}{\langle u-Pu, Pu\rangle}|}{\|u\|\,\|Pu\|} =$$

$$= \frac{\|Pu\|^2}{\|u\|\,\|Pu\|} = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$

Důkaz věty

$$|\langle u,v\rangle| = \frac{|\langle Pu+u-Pu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle Pu, v\rangle + \overset{=0}{\langle u-Pu, v\rangle}|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle Pu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$$

Cauch. ner.

$$\leq \frac{\|Pu\|\,\|v\|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\|P(u)\|}{\|u\|}$$

(3) Definice odchylky afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$

$$\sphericalangle(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \sphericalangle\big(Z(\mathcal{M}), Z(\mathcal{N})\big)$$

<u>Příklad</u> v $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{M} = A + [e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3]$

$\mathcal{N} = B + [e_2 + e_4, e_2 + e_3 + e_4]$

$Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N}) = [e_3]$

$(Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N}))^{\perp} = [e_1, e_2, e_4]$

$$\sphericalangle(Z(m), Z(n)) = \sphericalangle\left(Z(m) \cap (Z(m) \cap Z(n))^{\perp}, Z(n) \cap (Z(m) \cap Z(n))^{\perp}\right)$$

$$= \sphericalangle\left([e_1 + e_2], [e_2 + e_4]\right) = \alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{|\langle e_1 + e_2, e_2 + e_4 \rangle|}{\|e_1 + e_2\| \, \|e_2 + e_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

Odchylka je $\frac{\pi}{3}$ (60°).

Dodatek k vekt. prostorům se skalárním součinem

V vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem konečné dimenze.

Víme, že v V existuje ortonormální báze

Věta (Vlastnosti ortonormální báze).

Nechť $(u_1, u_2, \dots u_n) = \alpha$ je ortonormální báze. Potom platí

(1) Souřadnice vektoru $v \in V$ v bázi α jsou $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \langle v, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n \rangle \end{pmatrix}$

(2) Pro vektory $u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ a $v = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$ platí, že

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

Důkaz: (1) $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$\langle v, u_1 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, u_1 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u_1 \rangle = a_1 \langle u_1, u_1 \rangle = a_1$$

$i \neq j$ $i = j$

(2) $u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i u_i, y_j u_j \rangle = \sum x_i \overline{y_j} \langle u_i, u_j \rangle$$

$0 = $ $= 1$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} .$$

<u>Důsledek</u>: Pro každý vekt. prostor U konečné dimenze nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem existuje izomorfismus

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^{\dim U}, \text{ resp. } \varphi : U \to \mathbb{C}^{\dim U}$$

takový, že $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle_{\mathbb{K}^{\dim U}} = \langle u, v \rangle_U$

kde skal. součin na $\mathbb{K}^{\dim U}$ je standardní.

Důkaz: Nechť $\alpha=(u_1, u_2, \dots u_n)$ je nějaká ortonormální báze v U.

Pak definujeme $\varphi(u) = (u)_\alpha$

Všimneme, že je to izomorfismus. Dále platí

$$\langle u, v\rangle = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha} = \langle (u)_\alpha, (v)_\alpha \rangle_{\mathbb{K}^{\dim U}}$$

Odchylka dvou vekt. podprostorů U a V:

① $U \cap V = \{\vec{o}\}$ odchylka U a V je úhel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

takový, že

$$\alpha = \inf \{ \measuredangle([u],[v]),\ u \in U \setminus \{o\},\ v \in V \setminus \{o\} \}$$

② $U \cap V \neq \{\vec{o}\}$ odchylka U a V je úhel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

takový, že

$$\alpha = \measuredangle\left(U \cap (U \cap V)^{\perp},\ V \cap (U \cap V)^{\perp}\right)$$