VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

Budeme se zabývat lin. zobrazeními

$$\varphi : U \longrightarrow U,$$

kde U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Taková zobrazení nazýváme = lineární operátory
= lineární transformace
= lineární endomorfismy

Invariantní podprostor $V \subseteq U$ operátoru $\varphi : U \to U$ je podprostor takový, že $\varphi(V) \subseteq V$.

Triviální inv. podprostory jsou $\{\vec{o}\}$ a U. $\varphi(\vec{o}) = \vec{o}$

Příklad: $U = \mathbb{R}^4$ $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ukážeme, že $V = \left[v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ je invariantní.

$$\varphi(v_1) = A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ +2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + 2v_2 \in V$$

$$+0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\varphi(v_2) = A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 \in V$$

$$+0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

Basis $\mathcal{E}_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$

$$(\varphi)_{\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_4} = \left((\varphi(e_1))_{\mathcal{E}_4} \ (\varphi(e_2))_{\mathcal{E}_4} \ \ldots\ldots \right)$$

$$= A$$

$$\mathcal{B} = (v_1 = e_1, v_2, e_3, e_4)$$

$$(\varphi)_{B,B} = \Big((\varphi(v_1))_B \;\; (\varphi(v_2))_B \;\; (\varphi(e_3))_B \;\; (\varphi(e_4))_B \Big) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 4 \cdot e_3 + (-1) e_4$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-3) v_1 + 2 v_2 + 1 e_3 + 4 e_4$$

Pokračování příkladu

$$V = \left[v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \qquad W = \left[w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_3,\ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

W je rovněž invariantní podprostor.

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$$

$$\varphi(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot w_1 - w_2$$

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 +$$

$$\varphi(w_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 w_1 + 4 w_2$$

$\alpha = (\underbrace{v_1, v_2}_{\text{báze } V}, \underbrace{w_1, w_2}_{\text{báze } W})$ je báze prostoru $\mathbb{R}^4$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\mathbb{R}^4 = V \oplus W$$

$\varphi_1 = \varphi / V : V \longrightarrow V$

$\varphi_2 = \varphi / W : W \longrightarrow W$

$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$\varphi_1 : V \longrightarrow V$

$\varphi_2 : W \longrightarrow W$

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$

str 8

Je-li $\varphi(v) = \lambda v$, pak pro každé $a \in \mathbb{K}$ je
$$\varphi(av) = \lambda(av)$$

$$\varphi(av) = a\varphi(v) = a\lambda v = \lambda(av)$$

Jednorozměrné invariantní podprostory

př 7

$V = [v]$, $v \neq \vec{o}$ V je invariantní vůči φ, právě když

$$\varphi(v) = \lambda v \quad \text{pro nějaké } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Definice: $v \in U \setminus \{\vec{o}\}$ se nazývá VLASTNÍ VEKTOR (eigenvector), jestliže existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ tak, že

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Číslo λ se nazývá vlastní číslo (eigenvalue).

Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

1. Charakteristický polynom matice A typu $n \times n$ je polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^n + \ldots$$

2. $B = P^{-1} A P$, P je regulární matice

$\boxed{A \text{ a } B \text{ jsou podobné}}$

Podobnost matic je relace ekvivalence

Ekvivalence $\sim$: 1) $A \sim A \quad \forall A$ reflexivita

2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ symetrie

3) $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ tranzitivnost

$B = P^T A P$

B, A jsou kongruentní

Lemma: Podobné matice mají stejný charakt. polynom.

$$\det(B - \lambda E) = \det(P^{-1} A P - \lambda E) = \det(P^{-1} A P - \lambda P^{-1} E P) = \det(P^{-1}(A - \lambda E) P)$$
$$= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det P = (\det P)^{-1} \cdot \det P \cdot \det(A - \lambda E)$$

Výpočet vlastních čísel lin. operátoru φ

Lemma: $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastní číslo φ, právě když je kořenem char. polynomu operátoru φ.

$$\big((\varphi - \lambda\, id)\, v\big)_\alpha = (\varphi - \lambda\, id)_{\alpha,\alpha} \cdot (v)_\alpha$$

Důkaz: Pišme ekvivalentní úpravy.

$$\exists v \neq 0 \quad \varphi(v) = \lambda v$$

$$\exists v \neq 0 \quad (\varphi - \lambda\, id)\, v = 0$$

α báze V

$$\exists v \neq 0 \quad (\varphi - \lambda\, id)_{\alpha,\alpha} \cdot (v)_\alpha = 0$$

$$\exists X \neq 0 \quad \big((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\big)\, X = 0$$

Rovnice $$((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E)\, x = 0$$ má netriviální řešení.

$$\det((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E) = 0$$

λ je kořenem char. polynomu.

Známe-li vlastní číslo, pak vlastní vektor je řešením homogenní soustavy $$((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E)\, x = 0$$

Přesněji x jsou souřadnice vlastního vektoru v bázi α.

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Najdi te vl. čísla a vektory φ.

Char. polynom je

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+2)+4$$

$$= \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

Vlastní čísla $\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -1$

Vlastní vektor ke 2

$$(A-2E)x=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} \quad p \neq 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(v_1) = 2v_1 + 0\cdot v_2$$

Vlastní vektor ke -1

$$(A+E)x=0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} q \\ 4q \end{pmatrix} \quad q \neq 0 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \varphi(v_2) = 0\cdot v_1 - v_2$$

$\alpha = (v_1, v_2)$ je báze $\mathbb{R}^2 = [v_1] \oplus [v_2]$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(v_1))_\alpha \ (\varphi(v_2))_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Základní info o kořenech polynomů

$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 \qquad a_n \neq 0 \quad$ stupně n

λ_0 je kořen, pokud je $p(\lambda_0) = 0$ st n st $n-1$

je ekvivalentní s tím $\qquad p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda)$

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda) \qquad q(\lambda_0) \neq 0 \qquad$ <u>k je násobnost kořene</u>

Char. polynom $(-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$, a_i celá čísla

Má-li racionální kořen, pak je to celé číslo, které dělí a_0.

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Char. polynom je

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Kořeny hledáme mezi děliteli čísla 6

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Pomocí Hornerova schématu najdeme kořen 1

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad (A - E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 2p$

$x_2 = p$

$x_1 = p$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha = (v_1, v_2, v_3)$ je báze $\mathbb{R}^3$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(v_1))_\alpha \quad (\varphi(v_2))_\alpha \quad (\varphi(v_3))_\alpha \right) = \left((v_1)_\alpha, (2v_2)_\alpha, (3v_3)_\alpha \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Věta: Nechť $\varphi: U \to U$ je lin. operátor. Nechť vlastní vektory φ tvoří bázi α prostoru U. Potom

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde λ_i jsou příslušná vlastní čísla.

Věta: Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ jsou různá vl. čísla operátoru $\varphi : U \to U$ a $v_1, v_2, \dots v_k$ příslušné vlastní vektory. Pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Dk: Indukcí $k = 1$ $\quad v_1 \neq \vec{0} \Rightarrow v_1$ je lin. nezávislý.

Nechť věta platí pro k, dokážeme ji pro $k+1$.

$$\text{Nechť } (\heartsuit) \quad a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0} \qquad \Big/ \cdot \lambda_{k+1} \ (1) \qquad \varphi(\ \ ) \ (2)$$

$$(0) \qquad \lambda_{k+1} a_1 v_1 + \dots\dots + \lambda_{k+1} a_{k+1} v_{k+1} = 0$$

$$a\varphi(v_1) + \dots\dots\dots + a_{k+1} \varphi(v_{k+1}) = 0$$

$$(\square)\quad a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_2 v_2 + \dots + a_k\lambda_k v_k + \underline{a_{k+1}\lambda_{k+1}v_{k+1}} = 0$$

$(\square) - (\circ)$

$$a_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})v_1 + \dots \dots a_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})v_k + 0 = \vec{0}$$

Ind. předp. říká, že $v_1 \dots v_k$ jsou LN.

$$a_1\underbrace{(\lambda_1-\lambda_{k+1})}_{\neq 0} = \dots\dots a_k\underbrace{(\lambda_k-\lambda_{k+1})}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_k = 0$$

Dosadíme do $(\heartsuit)$ $\quad a_{k+1}v_{k+1} = 0 \quad v_{k+1} \neq \vec{0} \Rightarrow a_{k+1} = 0$

$\Rightarrow v_1 .. v_k, v_{k+1}$ jsou LN.

$= \det(A - \lambda E)$

3. Charakteristický polynom lin. operátoru $\varphi : U \to U$ ($\dim U < \infty$).
definujeme jako char. polynom matice φ v nějaké bázi α

$$p(\lambda) = \det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)$$

Proč je tato definice dobře. α, β dvě různé báze

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\beta} = P^{-1} (\varphi)_{\alpha,\alpha} P$$

$$U_\alpha \xrightarrow{\varphi} V_\beta \xrightarrow{\psi} W_\gamma \qquad (\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} (\varphi)_{\beta,\alpha} \qquad U_\beta \xrightarrow{id} U_\alpha \xrightarrow{\varphi} U_\alpha \xrightarrow{id} U_\beta$$