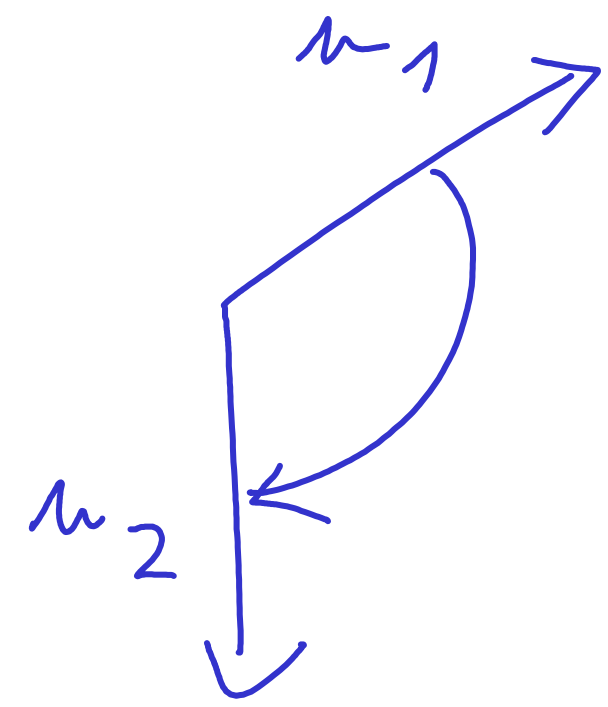
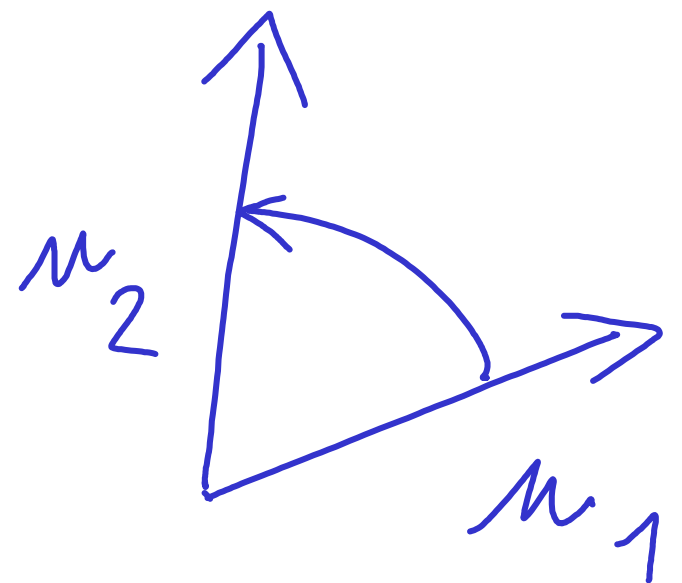


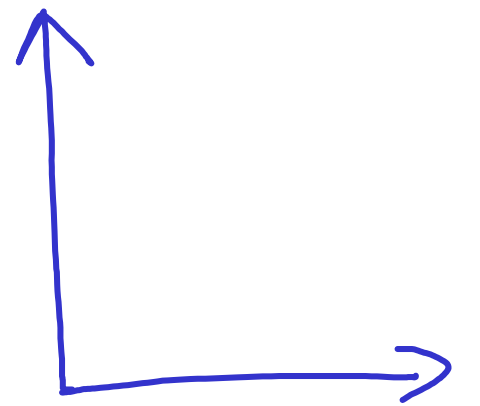
Orientazione su mult. piano

\mathbb{R}^2



$$\det \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = n_2$$



$$n_1 = e_1$$

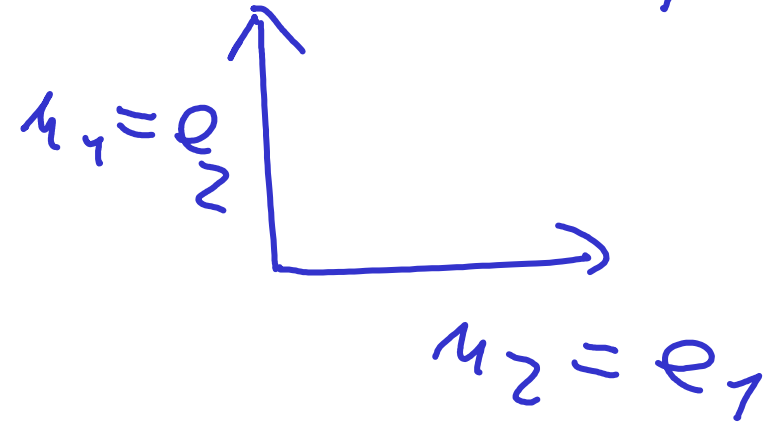
$$\det(e_1 e_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

+
la stessa orientazione

$$\det(n_1, n_2) > 0$$

la stessa orientazione

$$\det(n_1, n_2) < 0$$



$$n_2 = e_1$$

$$\det(e_2 e_1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det(e_1 e_2 e_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det(e_2 e_1 e_3) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

u_1, u_2, u_3 baze și orientare standard, pozitivă

$$\det(u_1 u_2 u_3) > 0$$

și pentru

$$\det(u_1 u_2 u_3) < 0$$

\mathbb{R}^n baze u_1, u_2, \dots, u_n și orientare

standard, pozitivă

$$\det(u_1, u_2, \dots, u_n) > 0$$

$$< 0$$

și pentru

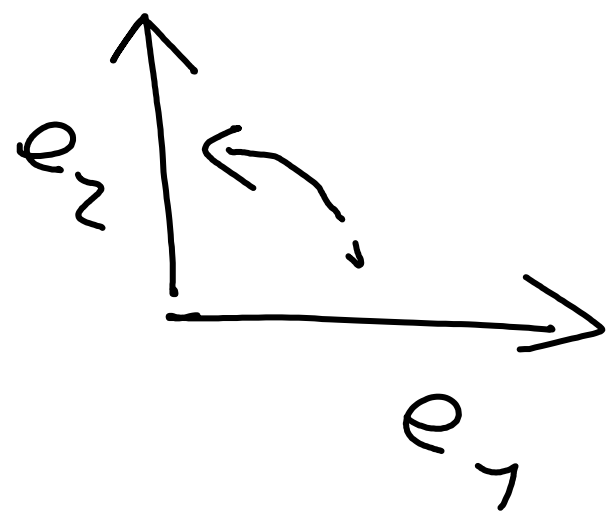
Baze α și β nu sunt permurabile

și matricea $\text{det}(i\alpha)_\beta > 0$.

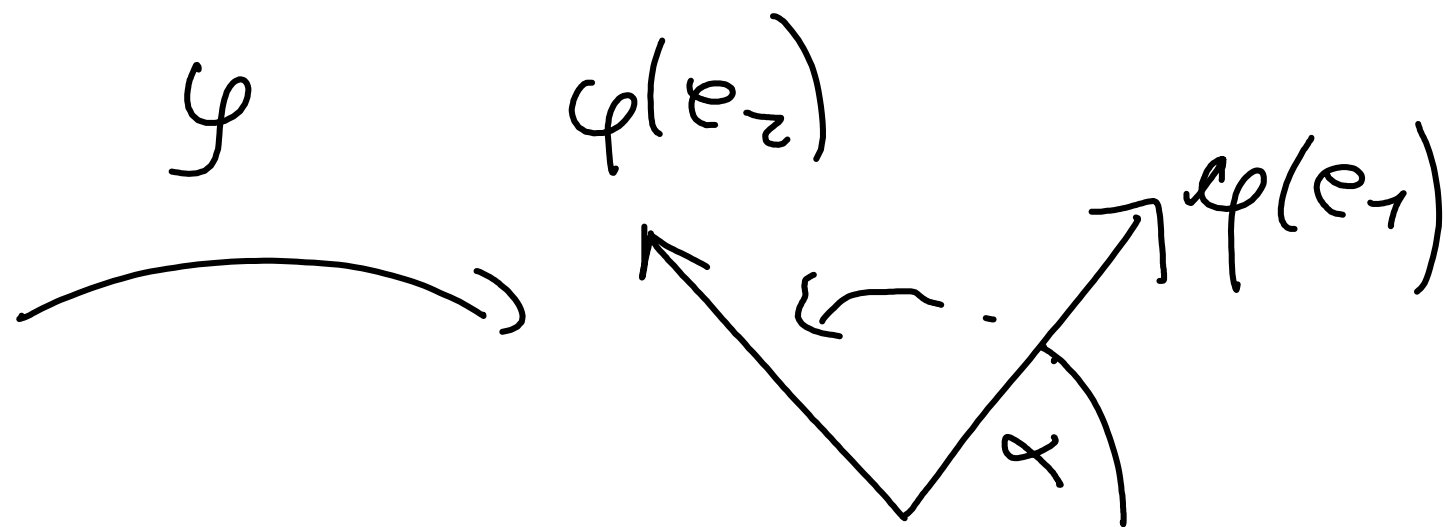
Mejime operator $\varphi: U \rightarrow U$ U je vekt. prostor nad \mathbb{R}

φ zachováva orientaci, jistě roztáhne bázi α na rozhlášené orientovanou bázi

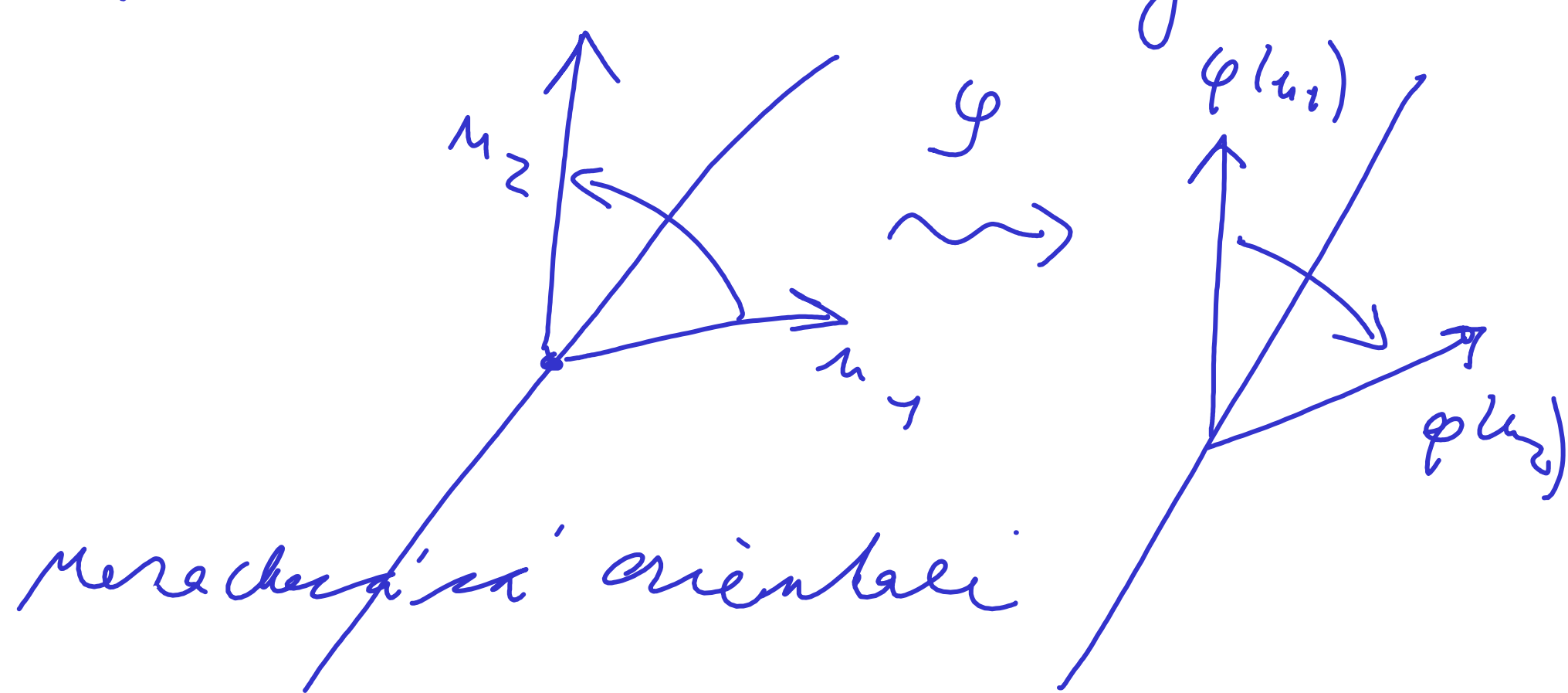
Obecně v \mathbb{R}^2



zachováva orientaci



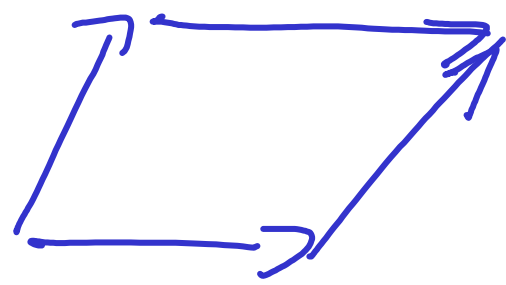
Symetrie podle přímky



nerachováva orientaci

jestliže $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\varphi(x) = A \cdot x$

φ zachováva orientaci, právě když $\det A > 0$.



$$\varepsilon = (e_1, e_2, \dots, e_n) \xrightarrow{\varphi} (s_1 A, s_2 A, \dots, s_n A)$$

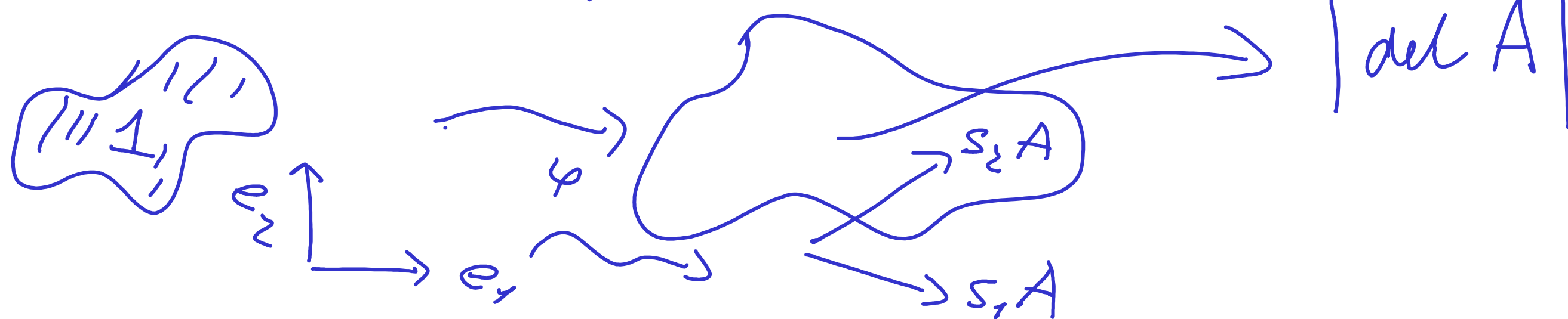
$$\det(n_1, n_2, n_3)$$

= orient objemu

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1 \xrightarrow{\varphi} \det(s_1 A, \dots, s_n A) > 0$$

$$\det A > 0$$

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = A \cdot x$$



ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY v dim 3

U vekt. prostor nad \mathbb{R} se skalárním součinem - eukleidovský prostor
nad \mathbb{C} - unitární prostor

$\varphi: U \rightarrow U$ (nad \mathbb{R}) je ortogonální, jindež

$$\forall u, v \in U: \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

$U = \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = Ax$, A je ortogonální

$$A \cdot A^T = E$$

že geometrické zobrazení operátor φ popisuje.

(1) $\det A = 1$ char. polynom je stupně 3 s reálnými koeficienty

ma' aspoň jeden reálný kořen.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou všechny komplexní kořeny char. polynomu.

$$\det(A - \lambda E) = p(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

$$\lambda = 0 \quad \boxed{\det A = p(0) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

Je-li λ kořen char. polynomu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pak $\overline{\lambda}$ je rovněž kořen

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

$$p(\lambda) = 0 \quad -\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\begin{aligned} p(\bar{\lambda}) &= -\bar{\lambda}^3 + a_2 \bar{\lambda}^2 + a_1 \bar{\lambda} + a_0 = -\bar{\lambda}^3 + \bar{a}_2 \bar{\lambda}^2 + \bar{a}_1 \bar{\lambda} + \bar{a}_0 = \\ &= \overline{-\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 = +1 \text{ nebo } -1$$

$$\lambda_2 = \cos \mu + i \sin \mu \quad |\lambda_2| = 1$$

$$\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = \cos \mu - i \sin \mu \quad \text{del } A = \lambda_1 \cdot (\cos \mu + i \sin \mu) (\cos \mu - i \sin \mu)$$

$$\begin{aligned} \text{del } A = 1 &\Rightarrow A \text{ má na } \text{čísle} \\ &1, \cos \mu \pm i \sin \mu \end{aligned}$$

$$= \lambda_1 (\cos^2 \mu + \sin^2 \mu) = \lambda_1$$

Krome: $\lambda_1 = 1$, má vlastní vektor u_1

vlastní číslo $\cos \varphi \pm i \sin \varphi$

$$\mathbb{R}^3 = [u_1] \oplus [u_1]^\perp$$

\rightarrow rovina kolmá na u_1 , je invariantní vůči φ

φ na této přímce je identita $\varphi(u_1) = u_1$

φ na $[u_1]^\perp$ je otáčení o úhel φ (je to ortog. operátor v dim 2

který nemá vl. čísla 1 a -1 , plyne z toho minimální polynom)

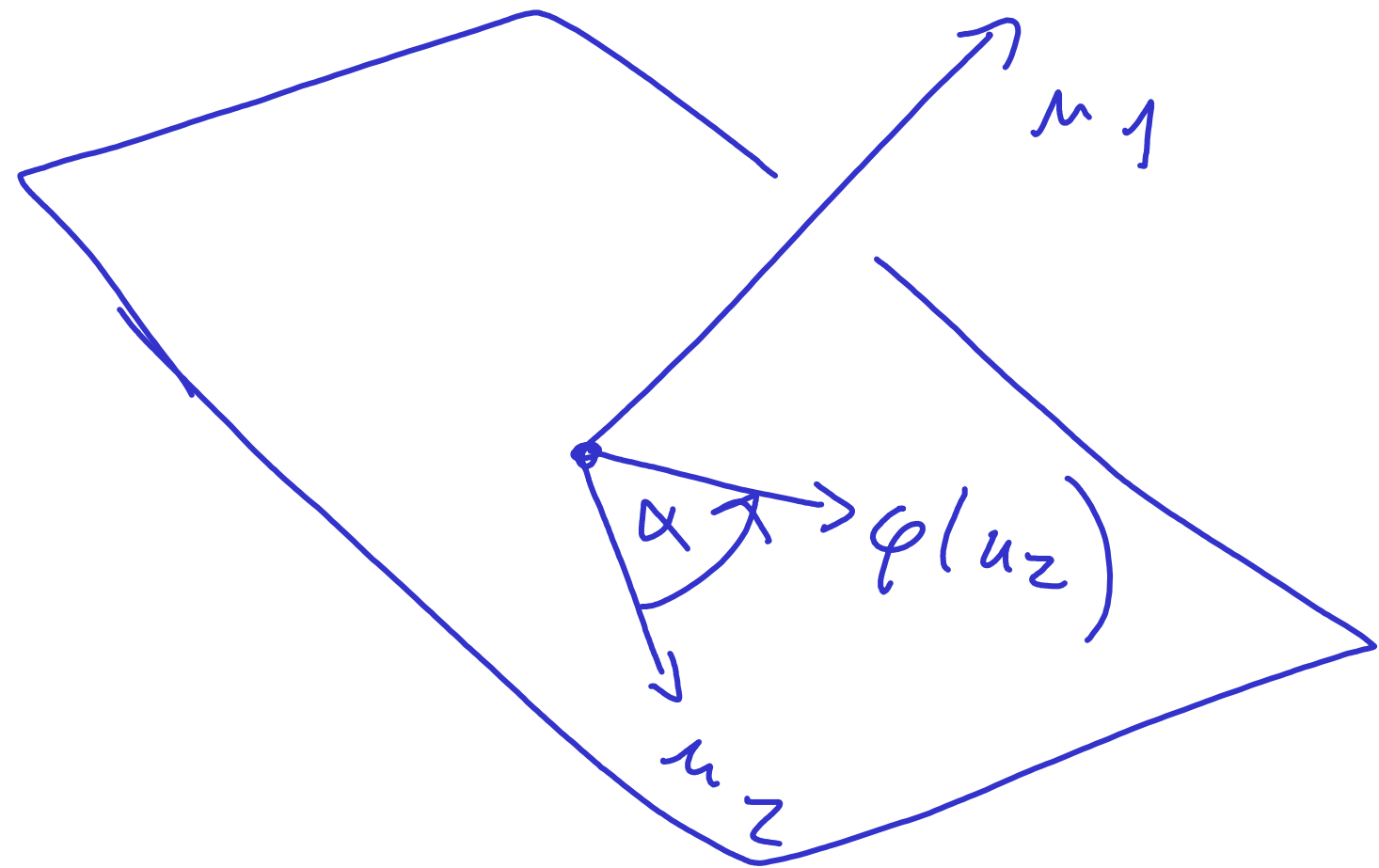
Uhel običmi sjindime katta:

Vešmeme nebler $u_2 \perp u_1$

Spoičitelme odčytku neblom u_2 od $\varphi(u_2)$, a to je uhel običmi.

$$\cos \alpha = \frac{\langle u_2, \varphi(u_2) \rangle}{\|u_2\| \|\varphi(u_2)\|}$$

$$\alpha = \mu$$



Záver: φ je običmi a uhel α kolem osy rčime vlastním neblom u_1 k vlastním číslu 1.

$$\textcircled{2} \quad \det A = -1 \quad -1 = \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda_1 (\cos \varphi + i \sin \varphi) (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \\ \text{reálnej} \\ \text{koor} \end{array} = \lambda_1 \cdot 1$$

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$$

ma' vlastni' čísla -1 , $\cos \varphi \pm i \sin \varphi$

Necht u_1 je vlastni' vektor k -1 , potom

$$\mathbb{R}^3 = [u_1] \oplus [u_1]^\perp \quad \text{rozklad na invariantní}$$

$$\varphi|_{[u_1]} \text{ je -identita} \quad \varphi(u_1) = -u_1$$

podprostor

$\varphi|_{[u_1]^\perp}$ je otáčeni' a zmeny' uhlu (dejna' argumentace jako u ①)

Úhel α mezi u_2 a u_1 lze spočítat stejně jako v ①

Vezme $u_2 \perp u_1$, dále $\varphi(u_2)$

$$\cos \alpha = \frac{\langle u_2, \varphi(u_2) \rangle}{\|u_2\| \|\varphi(u_2)\|}$$

Závěr: φ je zrcení symetrické podle roviny kolmé k u_1
a osou a úhel je kolmý osy zrcení u_1 .

SAMO ADJUNGOVANÉ OPERÁTORŮ

Necht U a V jsou necht. prostory se skalárním součinem (nad \mathbb{R} ,
nad \mathbb{C})

$\varphi: U \rightarrow V$ je lineární zobrazení

Zobrazení $\varphi^*: V \rightarrow U$ se nazývá ADJUNGOVANÉ k φ ,

jestliže platí

$$u \in U, v \in V: \langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U$$

φ^* nikdy existuje. Ukážeme to $\varphi: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^k$

$\varphi(x) = Ax$ $A \in \text{Mat}_{k \times m}(\mathbb{C})$. Ukážeme $\varphi^*: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^m$

neboť $\varphi^*(y) = By$, $B \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{C})$

$$\langle \varphi(x), y \rangle_{\mathbb{C}^k} = \langle x, By \rangle_{\mathbb{C}^m}$$

$$(\varphi(x))^T \cdot \overline{y} = x^T \cdot (By)$$

$$(Ax)^T \cdot \overline{y} = x^T \overline{By}$$

$$\overline{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \\ \overline{b_3} & \overline{b_4} \end{pmatrix} \text{ def}$$

$$x^T \cdot \underbrace{A^T}_{\overline{A}} \overline{y} = x^T \underbrace{\overline{B}}_{\overline{B}} \overline{y}$$

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \forall y \in \mathbb{C}^k$$

$$A^T = \overline{B}$$

$$\overline{A}^T = \overline{\overline{B}} = B$$

φ^* je trans

$$\varphi^*(y) = \overline{A}^T y$$

Ornaci

$$A^* = \overline{A}^T \quad \text{nad } \mathbb{C}$$

$$A^* = A^T \quad \text{nad } \mathbb{R}$$

Definice: Necht $\varphi : U \rightarrow U$. Samodjungované zobrazení

je lineární, reálné

$$\varphi = \varphi^*$$

$$\text{tj. } \forall u, v \in U: \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

Příklad 1

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(x) = Ax \text{ je samodjungované,}$$

právně řečeno

$$A = A^* = A^T, \text{ tj. matice } A \text{ je symetrická.}$$

Příklad 2 $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ $\varphi(x) = Ax$ $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$

je samoadjungované, právě když

$$A = A^* = \overline{A}^T$$

Matice s karteziáckými reálnými prvky je hermitovská.

$$a_{ii} = \overline{a_{ii}} \Rightarrow a_{ii} \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+3i & 4+i \\ 1-3i & 3 & -2i \\ 4-i & 2i & -1 \end{pmatrix}$$

Prillead 3 Operatör kolme' projekte na podprostor \mathcal{V}

Samoadjungirani.

$\mathcal{V} \subseteq U$ je podprostor a $P: U \rightarrow U$

$$\langle P(u), v \rangle = \langle P(u), P(v) + v - P(v) \rangle = \langle P(u), P(v) \rangle + \langle P(u), v - P(v) \rangle$$

"0"

$$\langle u, P(v) \rangle = \langle P(u) + v - P(u), P(v) \rangle = \langle P(u), P(v) \rangle + \langle v - P(u), P(v) \rangle$$

"0"

$$\langle P(u), P(v) \rangle = \langle P(u), P(v) \rangle \Rightarrow \langle P(u), v \rangle = \langle u, P(v) \rangle$$

Lemma: Je-li $q: U \rightarrow U$ samoadjungovaný operátor
a α je ortonormální báze v U , pak

$(q)_{\alpha, \alpha}$ je symetrická matice (nad \mathbb{R})
hermitovská matice (nad \mathbb{C})

Důkaz v přímaně.

Lemma (vlastní čísla a vlastní vektory)

- (1) Vlastní čísla jsou vždy reálná (i když jsme nad \mathbb{C})
- (2) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.

Důkaz: (1) $u \neq 0$ vlastní vektor s vlastním číslem λ

$$\lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle \varphi(u), u \rangle = \langle u, \varphi(u) \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \overline{\lambda} \langle u, u \rangle$$
$$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

(2) u, v vlastní vektory $\varphi(u) = \lambda u, \varphi(v) = \mu v, \lambda \neq \mu$.

$$\langle \lambda u, v \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \bar{\mu} \langle u, v \rangle = \mu \langle u, v \rangle$$

$$\lambda \langle u, v \rangle \stackrel{\parallel}{=} \Rightarrow (\lambda - \mu) \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

$$u \perp v$$

HLAVNÍ VĚTA O SAMOADJUNGOVANÝCH OPERÁTORECH

Necht $\varphi : U \rightarrow U$ je samoadjungovaný operátor (nad \mathbb{R} i \mathbb{C}).

Pak v U existuje **ortonormální** báze α tvořená

vlastními vektory operátoru φ . V této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

keďže $\lambda_i \in \mathbb{R}$ jsou vlastní čísla.

*Ih indukcí stejně jako
u unitárních operátorů – viz. příprava.*