Samoadjungované operátory a kvadratické formy

U vekt. prostor se skal. součinem

$\varphi : U \to U$ samoadjungovaný $\quad \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \quad \varphi(x) = Ax$

φ samoadj. $\iff A = A^*$

$A^* = A^T$ nad $\mathbb{R}$

$A^* = \bar{A}^T$ nad $\mathbb{C}$

<u>Poznámka</u>: $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ lze chápat jako $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$

$A = A^T \implies A = \bar{A}^T \implies \varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \quad \varphi(x) = A$ je samoadj.

Věta o spektrálním rozkladu – Důsledek 1 hlavní věty

Každý samoadjungovaný operátor $\varphi : U \to U$ lze psát ve tvaru

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k, \qquad 1 \le k \le n = \dim U$$

kde P_i jsou kolmé projekce na vzájemně kolmé podprostory.

Důkaz: Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou všechna různá vlastní čísla operátoru φ.

Nechť P_i je kolmá projekce U na $\ker(\varphi - \lambda_i\, id)$

Platí, že $\ker(\varphi - \lambda_i\, id) \perp \ker(\varphi - \lambda_j\, id)$ pro $i \neq j$

a dále $U = \ker(\varphi - \lambda_1\, id) \oplus \ker(\varphi - \lambda_2\, id) \oplus \dots \oplus \ker(\varphi - \lambda_k\, id)$

Dokážeme rovnost pro všechna $u \in \ker(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})$

$$\varphi(u) = \lambda_i u$$

$$\lambda_1 \underbrace{P_1(u)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{P_2(u)}_{=0} + \dots + \lambda_i \underbrace{P_i(u)}_{=u} + \dots + \lambda_k \underbrace{P_k(u)}_{=0} = \lambda_i u \;(= \varphi(u))$$

$u \perp \ker(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})$

Důsledek 2 Každou hermitovskou (symetrickou) matici A lze zapsat ve tvaru

$$A = P^T D P$$

(A je kongruentní s D)

kde D je diagonální matice s vlastními čísly A na diagonále a P je unitární (ortogonální) matice.

Důkaz: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = Ax$, $A = A^T$.

Nechť $\lambda_1, \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla (každé tolikrát, kolik je jeho alg. násobnost) a nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ je ortonormální báze tvořená vlastními vektory.

$\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$

$$A = (\varphi)_{\varepsilon_n, \varepsilon_n} = (id)_{\varepsilon_n, \alpha} (\varphi)_{\alpha, \alpha} (id)_{\alpha, \varepsilon_n} =$$

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

Báze ε_n a α jsou ortonormální v $\mathbb{R}^n$

$P^{-1} = (id)_{\varepsilon_n, \alpha} = \left((u_1)_{\varepsilon_n} (u_2)_{\varepsilon_n} \dots \right)$ je ortogonální matice

$\Rightarrow$ P je rovněž ortogonální matice.

$\Rightarrow P^{-1} = P^T$

Máme $$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

podobnost matic $\qquad$ kongruence matic

Podobnost – souvisí s lin. operátory $\varphi : U \to U$

$$\boxed{(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)^{-1}_{\beta,\alpha} (\varphi)_{\beta,\beta} (id)_{\beta,\alpha}}$$

Kongruence – souvisí s maticemi bilin. sym. forem

$$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{A = (id)^{T}_{\beta,\alpha} \, B \, (id)_{\beta,\alpha}}$$

matice f v bázi α

matice f v bázi β

Důsledek 3: Pro každou kvadratickou formu g na reálném prostoru U se skalárním součinem existuje ortonormální báze $\alpha=(u_1, \dots, u_n)$ taková, že v souřadnicích této báze je

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice kvadratické formy g v nějaké ortonormální bázi B.

Důkaz: $f : U \times U \to \mathbb{R}$ je symetrická bilin. forma, která zadává kvadr. formu

$$g(u) = f(u,u)$$

$\mathcal{B}$ nechť je nějaká ortonormální báze v U. V jejích souřadnicích je

$$f(u,v) = (u)_{\mathcal{B}}^T \, B \, (v)_{\mathcal{B}}$$

kde B je matice f v bázi $\mathcal{B}$ $\quad B = B^T$

$$= (u)_{\mathcal{B}}^T \, B^T (v)_{\mathcal{B}} = \left(B(u)_{\mathcal{B}}\right)^T \cdot (v)_{\mathcal{B}}$$

$$(\varphi(u))_{\mathcal{B}} = B(u)_{\mathcal{B}}$$

$$= \langle \varphi(u), v \rangle$$

$\varphi : U \to U$ samoadjungovaný

neboť $B = B^T$.

Obrátene: $\varphi: U \to U$ samoadjungovaný, tak definujeme

$$f: U \times U \to \mathbb{R} \qquad f(u,v) = \langle \varphi(u), v \rangle \quad \text{je bilin. forma}$$

$$f(u,v) = \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(v), u \rangle = f(v,u)$$

je symetrická

Pokračujeme v dôkaze. Pre samoadjungovaný operátor φ priradený sym. bilin. forme f existuje báza $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ ortonormálna a tvorená vlastnými vektormi. V báze α má f maticu A:

$$A_{ij} = f(u_i, u_j) = \langle \varphi(u_i), u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Důležitá poznámka – VAROVÁNÍ

Úloha najít ortonorm. bázi, v níž má daná kvadr. forma diag. tvar se řeší tak, že najdeme vl. čísla matice a k nim ortonorm. bázi tvořenou vlastními vektory.

NEŘEŠÍ SE stejnými řádk. a sloupc. úpravami. Báze, kterou bychom dostali, NENÍ ortonormální a případný G-S ortogonalizační proces ZNIČÍ diagonální tvar.

Singulární rozklad matice

Motivace: Každou matici A tvaru $k \times n$ (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) chceme psát ve tvaru součinu

$$A = P \cdot S \cdot Q^*,$$

kde P je tvaru $k \times k$ ortogonální (unitární), Q je tvaru $n \times n$ ortogonální (nebo unitární) a S je ona „singulární" matice

$$S = \left.\left(\begin{array}{ccc|c} s_1 & & 0 & \\ & s_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots \; s_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)\right\} k \qquad \text{tvaru } k \times n$$

kde $s_i \geq 0$ jsou reálná čísla.

Tento rozklad hraje důležitou roli ve statistice.

<u>Příklad</u>: A je matice $k \times n$ nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$), pak

$A^* A$ je symetrická nad $\mathbb{R}$ (hermitovská nad $\mathbb{C}$)

$$(A^* A)^* \overset{\text{nad } \mathbb{R}}{=} (A^T \cdot A)^T = (A)^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A = A^* A$$

$A^* A$ je matice $n \times n$, $A A^*$ je matice $k \times k$, které má stejnou vlastnost

Lemma Naj bo $\varphi : U \to V$ je lin. preslikava med prostoroma s skalarnim produktom. Potem

1) $\varphi^* \circ \varphi : U \to U$ je samoadjungiran operator,

2) $\varphi^* \circ \varphi$ je pozitivno semidefiniten, tj.

$$\langle (\varphi^* \circ \varphi)(u), u \rangle \geq 0$$

3) $\ker(\varphi^* \circ \varphi) = \ker \varphi$

Dk 1) $\forall u_1, u_2 \in U \quad \langle (\varphi^* \circ \varphi)(u), v \rangle = \langle \varphi^*(\varphi(u)), v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$

$$= \langle u, \varphi^*(\varphi(v)) \rangle = \langle u, (\varphi^* \circ \varphi)(u) \rangle$$

2) $\langle (\varphi^* \circ \varphi) u, u \rangle = \langle \varphi^*(\varphi(u)), u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle \geq 0.$

Speciální: všechna vlastní čísla operátoru $\varphi^* \circ \varphi$ jsou ≥ 0.

u je vl. vektor s vl. číslem $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle (\varphi^* \circ \varphi)(u), u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \lambda \|u\|^2 \Rightarrow \lambda \geq 0$$

3) Zřejmě $\ker \varphi \subseteq \ker \varphi^* \circ \varphi$

Dokážeme $\ker(\varphi^* \circ \varphi) \subseteq \ker \varphi$

nechť $(\varphi^* \circ \varphi)(u) = 0$

$$0 = \langle \varphi^*(\varphi(u)), u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle \Rightarrow \|\varphi(u)\| = 0 \Rightarrow \varphi(u) = 0.$$

Věta o sing. rozkladu

Nechť $A \in Mat_{k\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, Existují unitární (nad $\mathbb{C}$) nebo ortogonální (nad $\mathbb{R}$) matice P typu $k\times k$ a Q typu $n\times n$ takové, že

$$A = P \cdot k\left\{ \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_r \end{matrix} & \\ \hline & \end{array}\right)}_{n} \right. \cdot Q^* = P\, S\, Q^*$$

kde $s_1, s_2, \dots, s_r$ jsou druhé odmocniny z kladných vlastních čísel matice $A^* \cdot A$.

Důkaz důležitý pro výpočet. Mějme lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$\varphi(x) = Ax$. Pak adjungované zobrazení $\varphi^* : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je

$\varphi^*(y) = A^T y$. Zobrazení $\varphi^* \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(\varphi^* \circ \varphi)(x) = A^* \cdot A \cdot x$

je samoadjungované s vlastními čísly $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ kladnými

a ostatními nulovými. $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

V $\mathbb{R}^n$ vezmeme ortonormální bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_r, \dots u_n)$ tvořenou

vlastními vektory. $\varphi^*(\varphi(u_i)) = \lambda_i u_i$

Položme $Q = (id)_{\varepsilon_n, \alpha}$

To je místo ortogonální matice.

Platí: $\ker \varphi = \ker(\varphi^* \varphi) = [u_{r+1}, \dots u_n]$

Pro vektory $u_1, u_2, \dots u_r$ platí:

$$\|\varphi(u_i)\|^2 = \langle \varphi(u_i), \varphi(u_i) \rangle = \langle \varphi^* \varphi(u_i), u_i \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_i \rangle = \lambda_i \|u_i\|^2 = \lambda_i$$

$i \neq j$:

$$\langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \langle \varphi^* \varphi(u_i), u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \lambda_i \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=0} = 0$$

$\Longrightarrow$ Vektory $\varphi(u_1), \dots \varphi(u_r)$ jsou ortogonální a nenulové.

Pak vektory $v_i = \frac{\varphi(u_i)}{\|\varphi(u_i)\|} = \frac{\varphi(u_i)}{\sqrt{\lambda_i}}$ pro $i = 1, 2, \dots r$ tvoří ortonormální systém. $v_i \in \mathbb{R}^k$ $\Rightarrow \varphi(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\, v_i$

Doplníme tyto vektory na ortonormální bázi $\mathbb{R}^k$

$$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots v_k)$$

Položme $P = (id)_{\varepsilon_k, \beta}$, to je ortonormální matice.

Spočítáme matici $(\varphi)_{\beta, \alpha}$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\beta \;\; (\varphi(u_2))_\beta \; \cdots \; (\varphi(u_n))_\beta \Big) = \Big((\sqrt{\lambda_1}\, v_1)_\beta \cdots\cdots (\sqrt{\lambda_r}\, v_r)_\beta, 0, \dots 0 \Big)$$

$$= \underbrace{\left.\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \sqrt{\lambda_r} & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\right\} k}_{n} = S$$

$$A = (\varphi)_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n} = (id)_{\mathcal{E}_k, \beta} (\varphi)_{\beta, \alpha} (id)_{\alpha, \mathcal{E}_n}$$

$$= (id)_{\mathcal{E}_k, \beta} \, S \, (id)^{-1}_{\mathcal{E}_n, \alpha} = (id)_{\mathcal{E}_k, \beta} \cdot S \, (id)^{T}_{\mathcal{E}_n, \alpha}$$

$$= P S Q^{T}$$