Singulární rozklad matice

A $\quad k \times n$

$$A = P\,S\,Q^*$$

P: $k \times k$, $\quad S$: $k \times n$, $\quad Q^*$: $n \times n$

P, Q jsou ortogonální

$$Q^* = Q^T$$

$$S = \left(\begin{array}{ccc|c} s_1 & & & \\ & s_2 & & 0 \\ & & \ddots \; s_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

$s_i > 0$

<u>Příklad</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$A^*A = A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6)$$

Vl. čísla $\lambda_1 = 1$ vlastní vektor $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vl. čísla $\lambda_2 = 6$ vlastní vektor $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = (id)_{\varepsilon_2, \alpha}$$

$$\alpha = (u_1, u_2)$$

Výpočet matice P

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} A \cdot u_1 = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} A \cdot u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

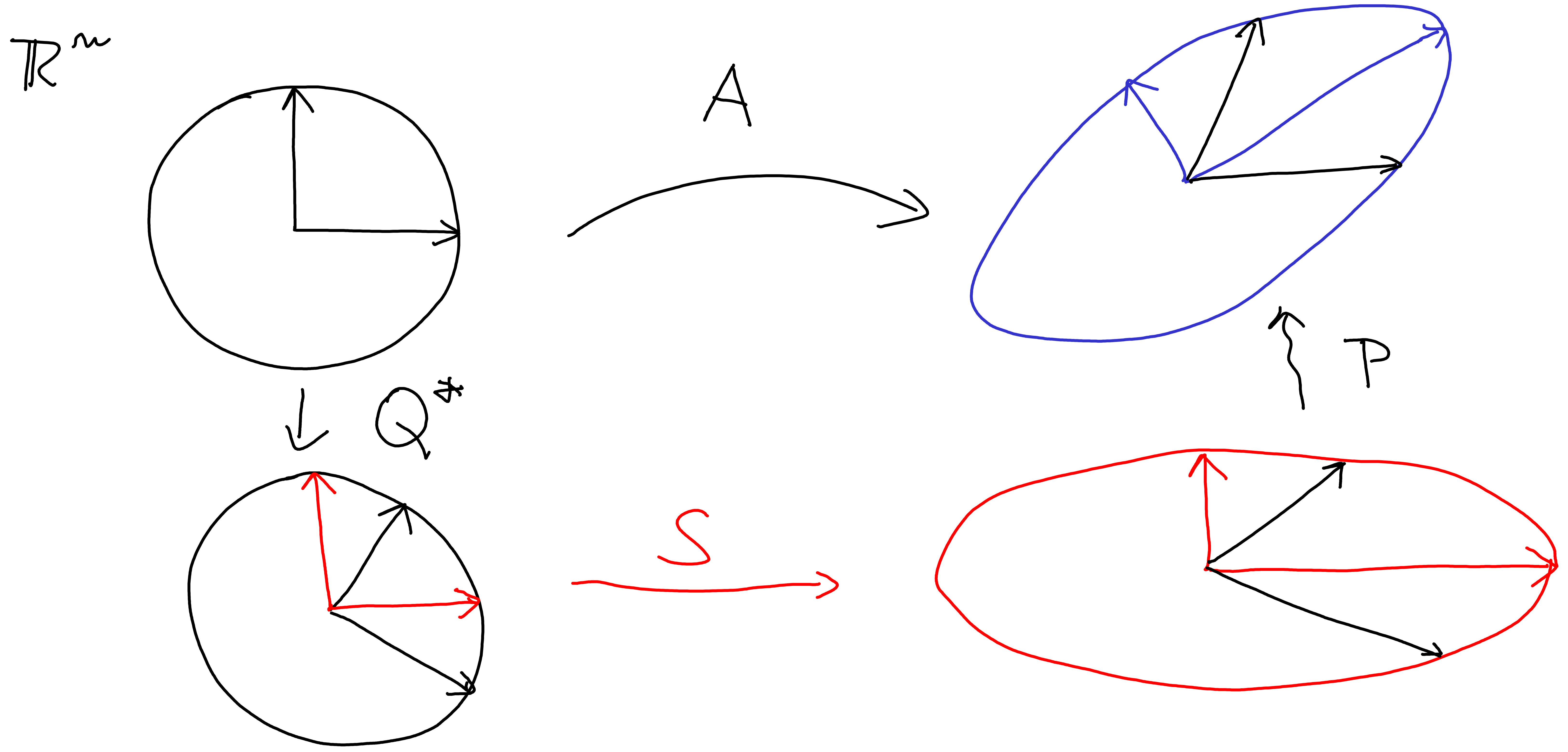
Ortonormální vektory v_1, v_2 doplníme do ortonormální báze celého $\mathbb{R}^3$

vektorem $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad P = (id)_{\varepsilon_3, B} \quad B = (v_1, v_2, v_3)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad A = P \cdot S \cdot Q^T$$

Geometrická interpretace rozkladu

A kam $k \times n$ $\qquad A = PSQ^*$ $\qquad \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \quad \varphi(x) = Ax$



Pseudoinverzní matice

- rozšíření pojmu inverzní matice na všechny matice.

A je invertibilní matice $n \times n$, její singulární rozklad je

$$A = P\,S\,Q^*$$ všechny jsou $n \times n$

a $S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \; s_n \end{pmatrix}$ $s_i > 0$, neboť A nemá vl. číslo 0! $(\det(A - 0 \cdot E) = \det A \neq 0)$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} s_1^{-1} & & 0 \\ & s_2^{-1} & \\ 0 & & \ddots \; s_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (PSQ^*)^{-1} = (Q^*)^{-1} S^{-1} P^{-1} = (Q^*)^* S^{-1} P^* = Q S^{-1} P^*$$

Obecně pro $\underset{k \times n}{A} = P \underset{k \times n}{S} Q^*$ můžeme definovat

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_r \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \\ 0 \end{matrix} \quad \text{(bloky: } r, k-r \text{ řádků; } r, n-r \text{ sloupců)}$$

$$\underset{n \times k}{S^{(-1)}} = \begin{pmatrix} s_1^{-1} & & & & \\ & s_2^{-1} & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & s_r^{-1} & \\ & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(bloky: } r, n-r \text{ řádků; } r, k-r \text{ sloupců)}$$

Nyní uvedeme definici

Definice pseudoinverzní matice k matici $A = PSQ^*$ (dimenze: $k \times k$, S, $n \times n$) tvaru $k \times n$

je matice $A^{(-1)} = Q\, S^{(-1)} P^*$ (Q: $n \times n$, $S^{(-1)}$: $n \times k$, P^*: $k \times k$) tvaru $n \times k$

Vlastnosti:

(1) Je-li A invertibilní, je $A^{(-1)} = A^{-1}$.

(2) $\left(A^{(-1)}\right)^{(-1)} = A$

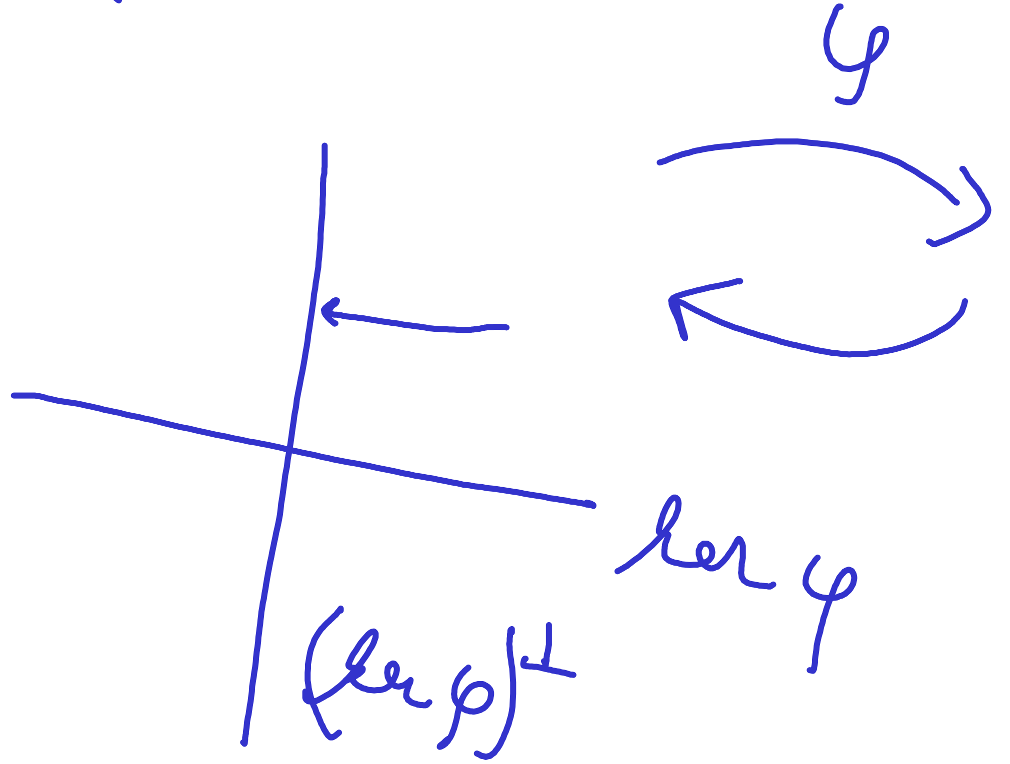
(3) $A^{(-1)} \cdot A$ a $A \cdot A^{(-1)}$ jsou symetrické (nad $\mathbb{R}$) nebo hermitovské (nad $\mathbb{C}$) matice.

(4) je-li $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r$ $\varphi(x) = Ax$ a $\varphi^{(-1)} : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^n$ $\varphi^{(-1)}(y) = A^{(-1)} y$,

pak složené zobrazení

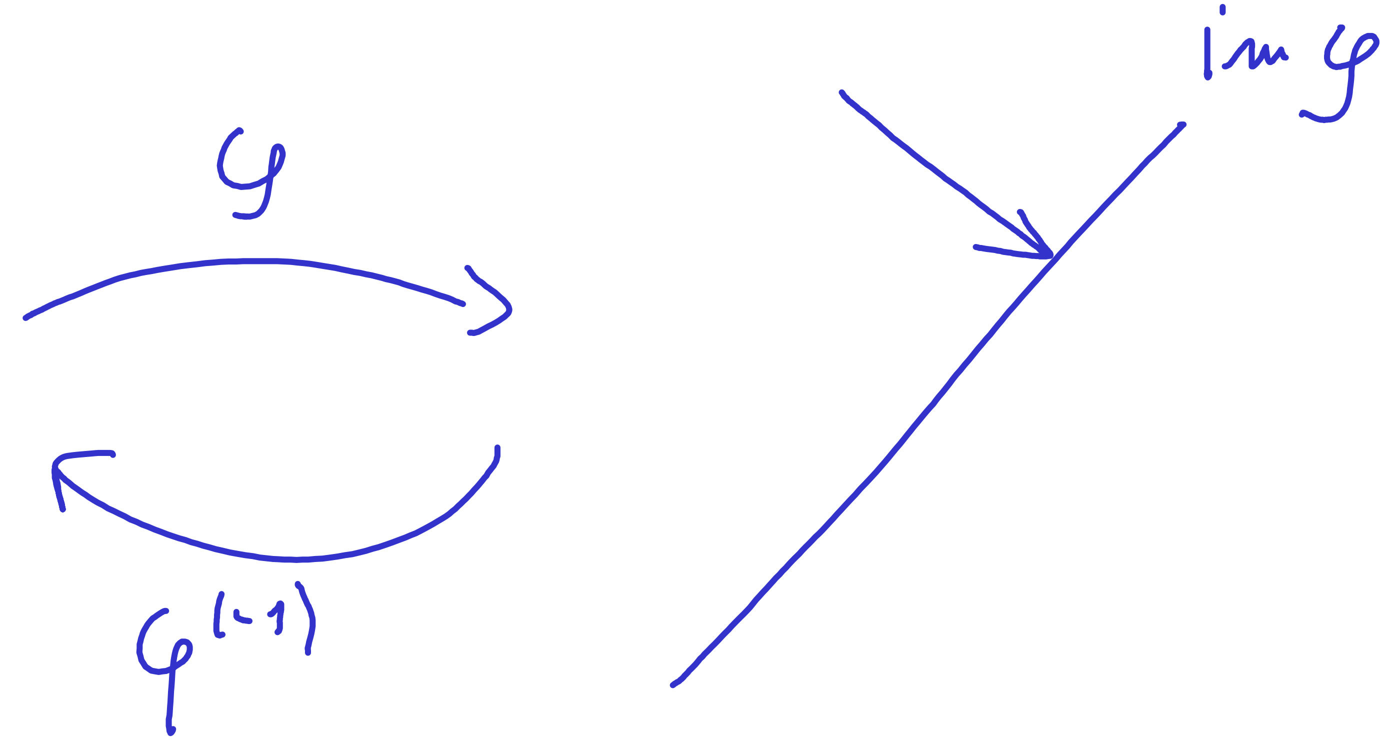
$$\varphi^{(-1)} \circ \varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \qquad \varphi^{(-1)} \circ \varphi(x) = A^{(-1)} \cdot A x$$

je kolmá projekce $\mathbb{K}^n$ na $(\ker \varphi)^\perp$

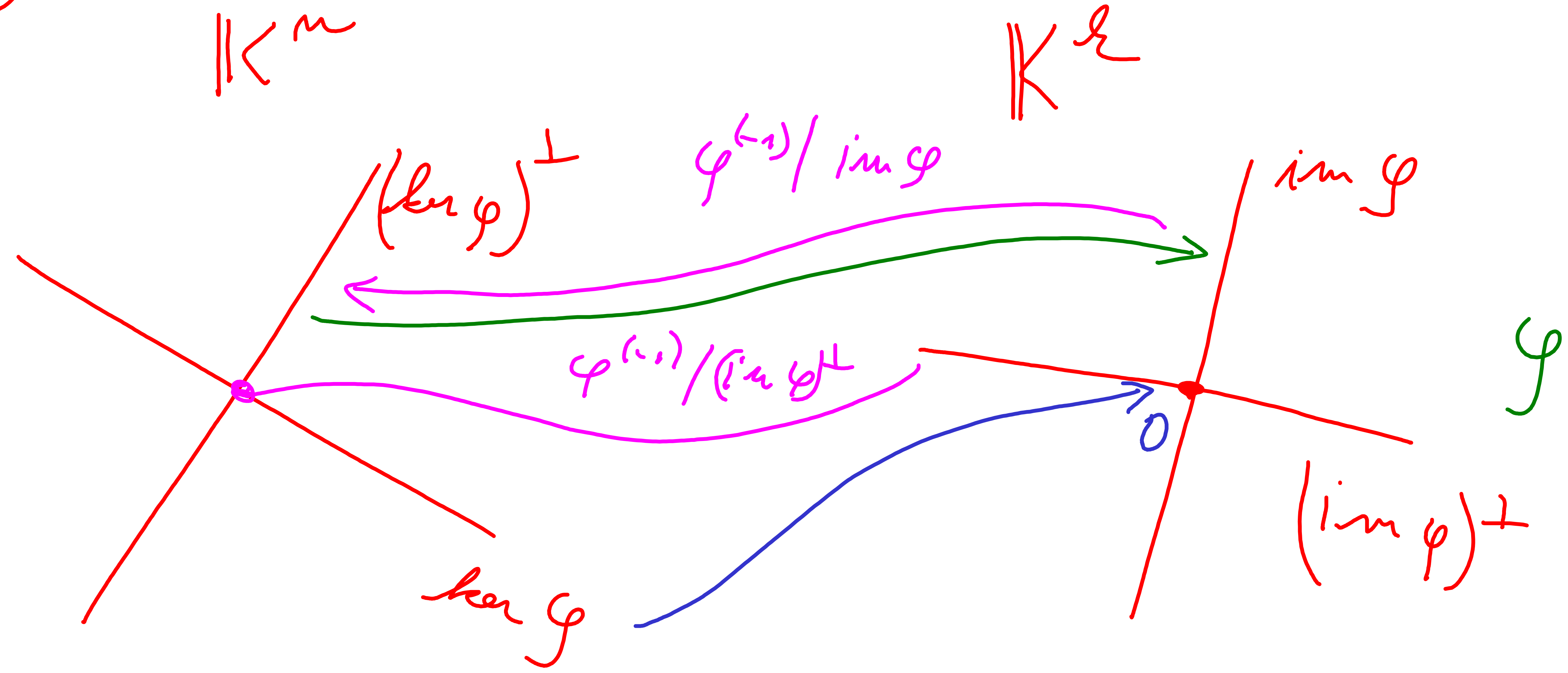


(5) $\varphi \circ \varphi^{(-1)} : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k \quad \varphi \circ \varphi^{(-1)}(y) = A \cdot A^{(-1)} y$

je kolmá projekce $\mathbb{K}^k$ na $\operatorname{im} \varphi$.



(4) + (5)



$\varphi^{(-1)}/\operatorname{im} \varphi$ je inverze k $\varphi/(\ker \varphi)^\perp$

(6) Platí $A A^{(-1)} A = A$ a $A^{(-1)} A A^{(-1)} = A^{(-1)}$

má-li A inverzi, je $A A^{-1} = E \Rightarrow A A^{-1} A = A$

$\Rightarrow A^{-1} A A^{-1} = A^{(-1)}$

(7) Početně důležité!

Platí $A^{(-1)} = (A^* A)^{(-1)} \cdot A^*$

Jestliže matice $A^* A$ má inverzní, platí

$$A^{(-1)} = (A^* A)^{-1} \cdot A^*$$

To je vyjádření $A^{(-1)}$ bez pomoci sing. rozkladu.

Príklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Spočítajte $A^{(-1)}$.

Na začiatku prednášky sme našli sing. rozklad matice A

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{Q^*}$$

$$A^{(-1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & +1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{Q^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}}_{S^{(-1)}} \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = Q\, S^{(-1)} P^*$$

= hezké násobení

JINAK – podle vlastnosti ⑦

$$A^* A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \det A^* A = 6$$

$$A^{(-1)} = (A^* A)^{-1} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Jestliže $\underset{n\times n}{A^*A}$ není regulární (nemá inverzi) lze zkusit $\underset{k\times k}{AA^*}$. Pokud AA^* má inverzi, platí

$$A^{(-1)} = \underbrace{\underset{n\times k}{A^*}\,\underbrace{(AA^*)^{-1}}_{k\times k}}_{n\times k}$$

Lze zkusit pro $k < n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Důkaz: (7) $A^{(-1)} = (A^*A)^{(-1)} \cdot A^*$

$$A = PSQ^* \qquad S = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{r \quad n-r} \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, k-r \end{array} \qquad S^{(-1)} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} D^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{r \quad k-r} \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, n-r \end{array}$$

$$(A^*A)^{(-1)} \cdot A^* = (\underbrace{QS^*P^*}_{A^*}\overbrace{}^{E}\underbrace{PSQ^*}_{A})^{(-1)} \cdot \underbrace{(QS^*P^*)}_{A^*} = (QS^*SQ^*)^{(-1)}(Q \cdot S^*P^*)$$

$$= \Bigg(Q \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} D^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{n \times n} Q^*\Bigg)^{(-1)} (QS^*P^*) = Q \left(\begin{array}{c|c} (D^2)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \underbrace{Q^*Q}_{E} S^*P^*$$

$$= Q \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} (D^2)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{n \times n} \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix}\}\, r \\ \}\, n-r\end{matrix} P^* = Q \left(\begin{array}{c|c} D^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix}\}\, r \\ \}\, n-r\end{matrix} P^*$$

(column widths under the matrices: r, $r-r$ and r, $r-r$)

$$= Q\, S^{(-1)} P^* = A^{(-1)}$$

④ $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r$ $\quad \varphi(x) = Ax \qquad \varphi^{(-1)} : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^n \quad \varphi^{(-1)} y = A^{(-1)} y$

chceme ař, že $\varphi^{(-1)} \circ \varphi$ je kolmá projekce $\mathbb{K}^n$ na $(\ker \varphi)^\perp$

Z důkazu věty o singulárním rozkladu

$$Q = (id)_{\varepsilon_n, \alpha} \qquad \alpha = (\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_r}_{(\ker\varphi)^{\perp}}, \underbrace{u_{r+1}, \dots, u_n}_{\text{báze } \ker\varphi})$$

$$(\varphi^{(-1)} \circ \varphi)_{\varepsilon_n, \varepsilon_n} = A^{(-1)} \cdot A$$

$$(\varphi^{(-1)} \circ \varphi)_{\alpha, \alpha} = (id)_{\alpha, \varepsilon_n} (\varphi^{(-1)} \circ \varphi)_{\varepsilon_n, \varepsilon_n} (id)_{\varepsilon_n, \alpha} =$$

$$= \overbrace{Q^* \; Q}^{E_n} \underbrace{S^{(-1)} P^*}_{\varphi^{(-1)}} \; \underbrace{P S}_{\varphi} \; \overbrace{Q^* \; Q}^{E_n} = S^{(-1)} \cdot S = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(with $P^* P = E_k$; the blocks of $S^{(-1)}$ have sizes r, $k-r$ / $n-r$, the blocks of S have sizes r, $n-r$ / $k-r$)

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

To znamená, že

$\varphi^{(-1)} \varphi(u_1) = u_1 \qquad \varphi^{(-1)} \circ \varphi(u_2) = u_2 \qquad \varphi^{(-1)} \circ \varphi(u_r) = u_r$

$\varphi^{(-1)} \varphi(u_i) = 0$ pro $i \geq r+1$. $\Rightarrow$ $\varphi^{(-1)} \circ \varphi$ je kolmá projekce

na $[u_1, u_2, \dots u_r] = \ker \varphi$.

Aplikace pseudoinverze

Aproximace řešení soustavy lin. rovnic

$Ax = b$ má řešení $\iff h(A) = h(A|b)$

$\iff b \in \operatorname{im} \varphi \quad \varphi(x) = Ax$

Máme-li soustavu $Ax = b$, která nemá řešení, můžeme chtít najít takové x_0, že $\|Ax - b\|$ je minimální.

Věta: Funkce $f(x) = \|Ax - b\|$, $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$

nabývá svého minima pro

$$x = \underbrace{A^{(-1)} b}_{x_0} + y,$$

kde $Ay = 0$.

Důkaz: Vlastnost (5) říká, že $A \cdot A^{(-1)} = P$, kde P je projekce

$\mathbb{K}^r$ na $\operatorname{im} \varphi = \{Ax, x \in \mathbb{K}^n\}$.

$$\min_{x \in \mathbb{K}^n} \|Ax - b\| = \min_{v \in \operatorname{im}\varphi} \|v - b\| = \|Pb - b\| = \|AA^{-1}b - b\|$$

$\varphi(x) = Ax$

$Pb \in \operatorname{im}\varphi$

$$= \|Ax_0 - b\|$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = A^{(-1)}b \qquad Ay = 0$$

$$\|A(x_0 + y) - b\| = \|Ax_0 - b + Ay\| = \|Ax_0 - b\|$$