LA II - 1. přednáška : AFINNÍ GEOMETRIE

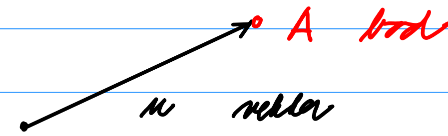
U je vektorový prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Prvky prostoru U nazýváme vektory, značíme $u, v \in U$

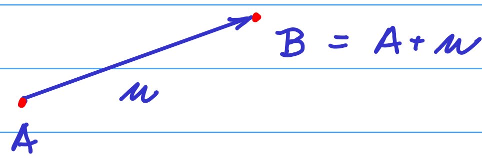
V afinní geometrii je považujeme i za body, $A \in U$

Vektor = „šipka"

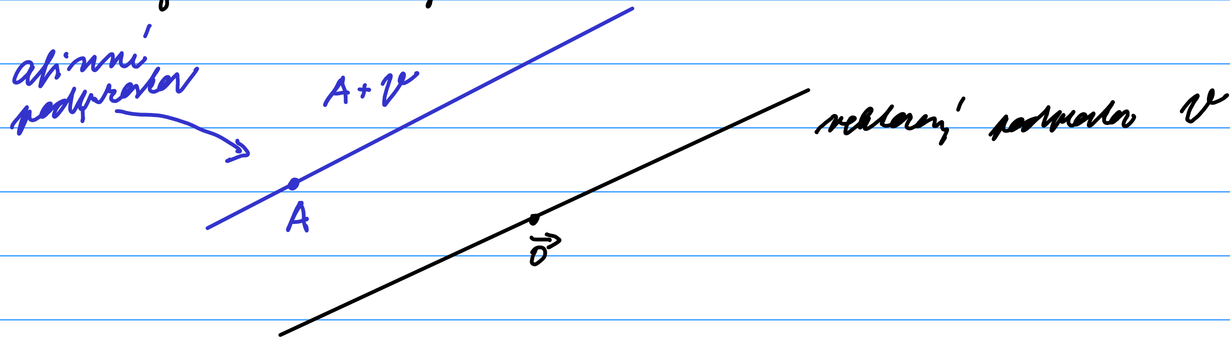
Bod = „bod"



K bodu můžeme přičíst vektor, výsledkem je bod.



Vektorové podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou pouze bod, přímky procházející počátkem a celé $\mathbb{R}^2$. V geometrii chceme pracovat se všemi body a všemi přímkami. Proto zavádíme pojem afinního podprostoru, což je vlastně vektorový podprostor posunutý do nějakého bodu mimo počátek.



Definice: Afinní podprostor ve vektorovém prostoru U je NEPRÁZDNÁ podmnožina M, která je tvaru

$$M = P + V = \{P + v \in U \,;\, v \in V\}$$

kde P je nějaký bod v U a V je vektorový podprostor v U.

Příklady: (1) Všechny afinní podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou všechny body, všechny přímky a celé $\mathbb{R}^2$.

(2) Afinní podprostory v $\mathbb{R}^3$ jsou všechny body, všechny přímky, všechny roviny a celé $\mathbb{R}^3$.

(3) Afinní podprostor jako množina řešení soustavy lin. rovnic. Nechť A je matice $k \times n$ nad $\mathbb{K}$. Nechť $b \in \mathbb{K}^k$ a nechť $h(A) = h(A|b)$. Pak je soustava $Ax = b$ řešitelná a množina řešení je tvaru
$\{x \in \mathbb{K}^n;\ Ax = b\} = z + \{y \in \mathbb{K}^n,\ Ay = 0\}$
kde z je nějaké řešení $Az = b$. Množina řešení homogenní soustavy je vektorový podprostor, tedy množina řešení soustavy $Ax = b$ je afinní podprostor v $\mathbb{K}^n$.

(4) $\mathcal{U} = \mathbb{R}_{10}[x]$
$\mathcal{M} = \{p \in \mathbb{R}_{10}[x],\ p(1) = 2021\}$
je afinní podprostor. Konstantní polynom $p(x) = 2021$ leží v $\mathcal{M}$ a platí

$$\mathcal{M} = 2021 + \underbrace{\{q \in \mathbb{R}_{10}[x],\ q(1) = 0\}}_{\text{vekt. podprostor}}$$

Poznámka: V definici $\mathcal{M} = P + \mathcal{V}$ není bod P určen jednoznačně, zato podprostor $\mathcal{V}$ je jednoznačně určen. Jestliže $\mathcal{M} = P + \mathcal{V} = Q + \mathcal{W}$ kde $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou podprostory, pak $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.

Důkaz: $Q \in P + \mathcal{V}$, proto $Q - P$ (vektor) $\in \mathcal{V}$
$P \in Q + \mathcal{W}$, proto $P - Q$ (vektor) $\in \mathcal{W}$

Nyní $\mathcal{V} = \underbrace{Q - P}_{\in \mathcal{W}} + \mathcal{W} = \mathcal{W}$

To nám umožňuje definovat zaměření afinního podprostoru:

Definice: Zaměření afinního podprostoru $\mathcal{M}$ v $\mathcal{U}$ je vektorový podprostor $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ takový, že

$$\mathcal{M} = P + \mathcal{V} \quad \text{pro nějaký bod } P$$

Zapisujeme $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{V}$.

Dále definujeme $\dim \mathcal{M} = \dim Z(\mathcal{M})$.

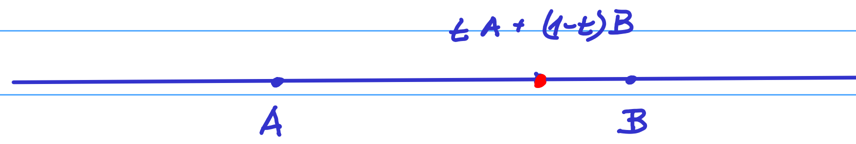
Lineární kombinace vektorů $\quad a\vec{u} + b\vec{v}$, a, b libovolné

Afinní kombinace bodů $\quad tA + (1-t)B$

$tA + sB$, kde $t + s = 1$

definujeme

$$tA + (1-t)B = B + t(A-B)$$



Afinní kombinace bodů A, B, takových, že $A \neq B$ vyplní přímku procházející body A a B.

Afinní kombinace bodů $A_0, A_1, \dots, A_k$ je

$$t_0A_0 + t_1A_1 + \dots + t_kA_k = \sum_{i=0}^{k} t_iA_i, \text{ kde } \sum_{i=0}^{k} t_i = 1.$$

je definována jako

$$(1-t_1-t_2-\dots-t_k)A_0 + t_1A_1 + \dots + t_kA_k = \underbrace{A_0}_{\text{bod}} + \underbrace{t_1(A_1-A_0) + \dots + t_k(A_k-A_0)}_{\text{vektor}}$$

Věta: $\emptyset \neq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$ je afinní podprostor, právě když s každými body $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{M}$ obsahuje i všechny jejich afinní kombinace.

Důkaz: $\Rightarrow$

$\mathcal{M} = P + \mathcal{V}$, kde $\mathcal{V}$ je vektorový podprostor. Nechť $A_i \in \mathcal{M}$.

Pak $A_i = P + v_i$, $v_i \in V$, a platí pro $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$

$$\sum_{i=0}^{k} t_i A_i = \sum_{i=0}^{k} t_i (P + v_i) = \underbrace{\Big(\sum_{i=0}^{k} t_i\Big)}_{1} P + \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \in P + V .$$

$\Leftarrow$ Nechť pro $A, B \in M$ je $tA + (1-t)B \in M$.

Potom $M = P + \{Q - P,\ Q \in M\} = P + V$.

Dokážeme, že V je podprostor.

Nechť $Q - P \in V$, potom $a(Q-P) = \underbrace{aQ + (1-a)P}_{\in M} - P \in V$

Nechť $Q-P,\ R-P \in V$, potom

$$(Q-P) + (R-P) = \underbrace{(Q + R - P)}_{\underbrace{2\,\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{2}R\right)}_{\in M} + (-1)P}_{\in M}} - P \in V .$$

Důsledek Neprázdná podmnožina vektorového prostoru je afinní podprostor, právě když s každými dvěma různými body A, B obsahuje i přímku $\overleftrightarrow{AB}$.

Příklad: Těžnice v trojúhelníku se protínají v jediném bodě – na cvičení.

Další popis afinních podprostorů

① **Parametrický**: známe z definice

$M = P + V$, kde $V \subseteq U$ je podprostor

nechť $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je báze podprostoru V. Pak každý bod $M \in M$ lze psát ve tvaru

$$M = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_k v_k$$

Toto je parametrický popis.

Příklad Rovinu v $\mathbb{R}^3$ napíšeme parametricky jako
$P + t\vec{u} + s\vec{v}$, kde $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lin. nezávislé

(2) Implicitní popis – popis pomocí soustavy lin. rovnic

Je to popis afinních podprostorů v $\mathbb{K}^n$

$$M = \{ x \in \mathbb{K}^n ; \ Ax = b \}$$

kde A je matice $k \times n$ a $b \in \mathbb{K}^k$, $h(A) = h(A|b)$.

Příklad: Rovina v $\mathbb{R}^3$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

s maticí $A = (a_1, a_2, a_3) \neq (0\ 0\ 0)$. $h(A) = 1$.

Přímka v $\mathbb{R}^3$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$h(A) = 2 \Rightarrow h(A) = h(A|b) = 2$

Je-li $M = \{ x \in \mathbb{K}^n ; \ Ax = b \}$, pak zaměření je
$$Z(M) = \{ y \in \mathbb{K}^n ; \ Ay = 0 \}.$$

Přechod od implicitního popisu k parametrickému

Stačí vyřešit soustavu $Ax = b$ pomocí parametrů.
Tím dostaneme parametrický popis.
Nechť soustava $Ax = b$ má např. řešení

$$x_1 = 2 + 3t - s$$
$$x_2 = 3 + t - 8s$$
$$x_3 = 1 + 3t$$
$$x_4 = 2 + t + 2s$$

Potom $M = \{ [2+3t-s, 3+t-8s, 1+3t, 2+t+2s], \ t, s \in \mathbb{R} \}$
$= [2, 3, 1, 2] + \{ t(3, 1, 3, 1) + s(-1, -8, 0, 2), \ t, s \in \mathbb{R} \}$

Přechod od parametrického popisu k implicitnímu

Nechť každý bod $x \in M$ je tvaru
$$X = P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$
V souřadnicích
$$x_1 = p_1 + c_{11} t_1 + c_{12} t_2 + \dots + c_{1k} t_k$$
$$\dots$$
$$x_n = p_n + c_{n1} t_1 + c_{n2} t_2 + \dots + c_{nk} t_k$$
Maticově
$$x = Ct + p \qquad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}$$

$$E\,x = Ct + p$$

$$(E \mid C \mid p) \xrightarrow[\text{řádkové operace}]{\text{provádíme el.}} \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & b_1 \\ A & 0 & b \end{array} \right)$$
zde je schodovitý tvar

C_1 je ve schod. tvaru bez nulového řádku

Pořád platí
$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b \end{pmatrix}$$
To lze psát jako dvě soustavy
$$A_1 x = C_1 t + b_1 \qquad (*)$$
$$A x = b$$

Závěr: Je-li $x \in M$, pak x je řešení soustavy $Ax = b$.

Obráceně: Nechť x je řešením soustavy $Ax = b_1$.
Pak soustava $A_1 x - b_1 = C_1 t$
v neznámých t má řešení (C je ve schod. tvaru a nemá nulový řádek). Tedy platí $(*)$ pro x a t a to je ekvivalentní s popisem $x = Ct + p$, tedy $X \in M$.

Průnik afinních podprostorů

Je-li neprázdný, je to opět afinní podprostor.
Při praktickém počítání nastane 1 z následujících 3 případů:

(1) Oba podprostory jsou zadány soustavou rovnic

$$m: \quad Ax = b$$
$$n: \quad Cy = d$$

Pak $m \cap n$: $\begin{aligned} Az &= b \\ Cz &= d \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

(2) m zadán parametricky $\quad m: P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$

$\quad n: \quad Ax = b$

Vezmeme
$$x_1 = p_1 + c_{11} t_1 + \dots + c_{1k} t_k$$
$$x_2 = p_2 + c_{21} t_1 + \dots + c_{2k} t_k$$
$$\dots\dots$$

a to dosadíme do soustavy $Ax = b$.
Dostaneme soustavu pro neznámé $t_1, t_2, \dots, t_k$ (těch je obvykle málo). Tuto soustavu vyřešíme pomocí nějakých nových parametrů $s_1, s_2, \dots s_l$

Např.
$$t_1 = 1 + 2s_1 - 3s_2$$
$$t_2 = 2 + s_1 + s_2$$
$$t_3 = 3 \qquad - 2s_2$$

Pak $m \cap n$ je popsán parametricky takto:

$$m \cap n: \; P + (1+2s_1-3s_2)v_1 + (2+s_1+s_2)v_2 + (3-2s_2)v_3$$
$$= \underbrace{(P + v_1 + 2v_2 + 3v_3)}_{\text{bod}} + s_1\underbrace{(2v_1 + v_2)}_{\text{vektor}} + s_2\underbrace{(-3v_1 + v_2 - 2v_2)}_{\text{vektor}}$$

(3) Oba podprostory jsou zadány parametricky

$\mathcal{M}: \quad P + t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3$

$\mathcal{N}: \quad Q + s_1 v_1 + s_2 v_2$

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{ X = P + t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 = Q + s_1 v_1 + s_2 v_2 \}$

Řešíme soustavu

$$t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 - s_1 v_1 - s_2 v_2 = Q - P$$

Stačí spočítat s_1, s_2

$$s_1 = 2 + a$$
$$s_2 = 3 + 4a$$

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{ Q + (2+a) v_1 + (3+4a) v_2 \} =$$
$$= \{ \underbrace{Q + 2v_1 + 3v_2}_{\text{bod}} + a \underbrace{(v_1 + 4v_2)}_{\text{vektor}} \}$$

Spojení afinních podprostorů $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$

je nejmenší afinní podprostor obsahující $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

$\mathcal{M}: \quad P + V$

$\mathcal{N}: \quad Q + W$

Potom $\quad \mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}: P + \underbrace{[Q-P] + V + W}_{\text{zaměření}}$

Vzájemná poloha afin. podprostorů

V vekt. prostoru, $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ afinní podprostory. Zjišťujeme, zda

(1) je $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$,

(2) je $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ nebo $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$.

Podle odpovědi rozlišujeme 4 vzájemné polohy:

(I) $m \subseteq n$ nebo $n \subseteq m$

V tomto případě $m \cap n \neq \emptyset$ a $Z(m) \subseteq Z(n)$ nebo obráceně.

(II) m a n jsou rovnoběžné

V tomto případě $m \cap n = \emptyset$ a $Z(m) \subseteq Z(n)$ nebo obráceně

(III) m a n různoběžné

Zde $m \cap n \neq \emptyset$ a $Z(m) \not\subseteq Z(n)$ ani $Z(n) \not\subseteq Z(m)$

(IV) m a n mimoběžné

Zde $m \cap n = \emptyset$ a $Z(m) \not\subseteq Z(n)$ ani $Z(n) \not\subseteq Z(m)$

Příklad dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, které jsou mimoběžné

ρ : $[0,0,0,0] + s(1,0,0,0) + t(0,1,0,0) = [s,t,0,0]$

π : $[0,0,0,1] + a(0,1,0,0) + b(0,0,1,0) = [0,a,b,1]$

$\rho \cap \pi = \emptyset$

$Z(\rho) \cap Z(\pi) = [e_1, e_2] \cap [e_2, e_3] = [e_2]$

$Z(\rho) \not\subseteq Z(\pi)$, $Z(\pi) \not\subseteq Z(\rho)$.

Typická úloha

Najděte afinní podprostor daných vlastností:

(1) V $\mathbb{R}^3$ je dán bod A a mimoběžky k a l.

Najděte přímku p takovou, že

- $A \in p$
- $k \cap p \neq \emptyset$
- $l \cap p \neq \emptyset$

Řešení:

Vezmeme rovinu $\alpha = A \sqcup l$, p musí ležet v α. Proto $p \cap k \subseteq \alpha \cap k$. Spočítáme tedy $\alpha \cap k$. To bude bod B.

Hledaná přímka p je $\overleftrightarrow{AB}$.

(2) V $\mathbb{R}^4$ je dán bod A, rovina ρ, přímka l, kde ρ a l jsou mimoběžné. Najděte přímku p takovou, že
- $A \in p$
- $p \cap l \neq \emptyset$
- $p \cap \rho \neq \emptyset$

Řešení:

Vezmeme rovinu $\alpha = A \sqcup l$, $p \subseteq \alpha$. Proto $p \cap \rho \subseteq \alpha \cap \rho$. Spočítáme $\alpha \cap \rho$. Jestliže je průnikem bod B je hledaná přímka $p = \overleftrightarrow{AB}$.

Afinní zobrazení

Nechť U a V jsou vektorové prostory. Ty můžeme chápat i jako afinní podprostory sama sebe.

Zobrazení $\Phi: U \to V$ nazveme afinní, jestliže

$$\Phi(u) = Q + \varphi(u)$$

kde φ je lineární zobrazení $U \to V$, $Q \in V$ nějaký bod

Příklad: $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^k$, všechna afinní zobrazení mezi $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^k$ jsou tvaru

$$\Phi(u) = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix}$$

kde A je matice $k \times n$.

Zobrazení $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = ax + b$ ze základní školy je tedy afinní zobrazení.