3. přednáška z LA II – Kvadratické formy

Minule:

Věta: Každou symetrickou bilineární formu $f: U \times U \to \mathbb{K}$ lze v souřadnicích vhodné báze β v U vyjádřit ve tvaru

$$f(u,v) = b_{11}x_1y_1 + b_{22}x_2y_2 + \dots + b_{nn}x_ny_n,$$

kde $(u)_\beta = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$, $(v)_\beta = (y_1, \dots y_n)^T$.

Algoritmus: A matice f zvolené báze α

$$\begin{array}{c|c} A & \alpha^T \\ \hline \alpha & \end{array} \leadsto \text{stejné řádkové a sloupcové element. operace} \leadsto \begin{array}{c|c} B & \beta^T \\ \hline \beta & \end{array}$$

kde $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$, $\alpha^T = (u_1, u_2, \dots u_n)^T$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & & 0 \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Přitom $\beta = \alpha P$

$\beta^T = P^T \alpha^T$

$$P = (id)_{\alpha,\beta}$$

$\boxed{\text{Totéž pro matice}}$

Věta: Každá symetrická matice A je kongruentní nějaké diagonální matici B, tj. existuje regulární matice P taková, že

$$B = P^T A P$$

Algoritmus:

$$\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\text{stejné řádkové}\\ \text{a sloupcové}\\ \text{element. operace}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|c} B & P^T \\ \hline P & \end{array}$$

Při výpočtech lze spodní půlku vypustit, tj.:

$$(A \mid E) \rightsquigarrow \begin{array}{c}\text{stejné řádk.}\\ \text{a sloupcové}\\ \text{el. operace}\end{array} \rightsquigarrow (B \mid P^T)$$

Kvadratická forma $q : U \to \mathbb{K}$ je takové zobrazení, ke kterému existuje symetrická bilin. forma $f : U \times U \to \mathbb{K}$ taková, že

$$q(u) = f(u,u).$$

Příklad: $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$$

je symetrická bilin. forma

$$q(x) = f(x,x) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3$$

je kvadratická forma.

Lemma: Každá kvadratická forma q určuje jednoznačně symetrickou bilin. formu f, která ji definuje.

Důkaz: Jestliže $q(u) = f(u,u)$, pak platí

$$q(u+v) - q(u-v) = f(u+v, u+v) - f(u-v, u-v) =$$
$$= f(u,u) + 2f(u,v) + f(v,v) - \{ f(u,u) - 2f(u,v) + f(v,v) \}$$
$$= 4\, f(u,v).$$

Tedy musí být

$$f(u,v) = \frac{1}{4} \left(q(u+v) - q(u-v) \right)$$

Příklad: Máme kvadr. formu $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$q(x) = 8x_1^2 - 3x_1x_2 + 9x_2x_3 .$$

Pak příslušná symetrická bilin. forma je

$$f(x,y) = 8x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + \frac{9}{2}x_2y_3 + \frac{9}{2}x_3y_2 .$$

Poznámka: Je-li q kvadratická forma a definujeme-li

$$f(u,v) = \frac{1}{4}\left(q(u+v) - q(u-v) \right),$$

pak lze dokázat

(1) f je symetrická a bilineární (zkuste sami)

(2) $f(u,u) = \frac{1}{4}\left(q(2u) - q(\vec{0}) \right) = \frac{1}{4}\left(4q(u) - 0 \right) = q(u)$

Mezi kvadr. formami a symetrickými formami je bijekce (bijekce je mezi sym. bilin. formami a symetrickými maticemi)

Důsledek předchozího

Ke každé kvadratické formě $q : U \to K$ existuje v U báze B, v jejíž souřadnicích je
$$q(u) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 .$$
$(u)_B = (x_1, \dots x_n)^T$. Bázi B říkáme **polární báze**.

Připomenutí: Bilin. formy na $\mathbb{R}^n$
$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j = x^T A y \quad (a_{ij} = a_{ji})$$
Proto obecná kvadr. forma na $\mathbb{R}^n$ je
$$q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j = x^T A x .$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \cdot x_i x_j$$

KVADRATICKÉ FORMY NAD $\mathbb{R}$

Budeme se zabývat kvadratickými formami na reálných vektorových prostorech.
$$q : U \to \mathbb{R}$$
Nejdůležitější poznatek o nich je následující věta:

Sylvestrův zákon setrvačnosti

Nechť $q: U \to \mathbb{R}$ je reálná kvadratická forma. Pak v U existuje báze, v jejíž souřadnicích lze psát

$$q(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_q^2 + 0 \cdot x_{q+1}^2 + \dots + 0 \cdot x_n^2,$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou souřadnice u v dané bázi. Přitom počet koeficientů $1, -1, 0$ je nezávislý na volbě takové báze. (to je ta „setrvačnost").

Definice: Díky této větě můžeme definovat signaturu kvadr. formy jako trojici (s_+, s_-, s_0), kde s_+ je počet 1, s_- počet -1 a s_0 počet 0 ve vyjádření kvadr. formy podle předchozí věty.

Důkaz věty: Najdeme bázi $(v_1, v_2, \dots v_n)$, v níž je

$$q(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} y_i^2$$

Jestliže $a_{ii} > 0$, položíme $x_i = \sqrt{a_{ii}}\, y_i$ a $u_i = \dfrac{v_i}{\sqrt{a_{ii}}}$.

Jestliže $a_{jj} < 0$, položíme $x_j = \sqrt{-a_{jj}}\, y_j$ a $u_j = \dfrac{v_j}{\sqrt{-a_{jj}}}$.

Pro $a_{ii} = 0$, položíme $u_i = y_i$.

Když změníme pořadí dostaneme tak, že

$$q(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_q^2 + 0 \cdot x_{q+1}^2 + \dots + 0 \cdot x_n^2$$

Důkaz jednoznačnosti (sporem)

$q(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots$ v bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$

$q(u) = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots$ v bázi $\beta = (v_1, \dots, v_n)$

Předpokládejme, že $p > s$.

Uvažujme podprostor

$W = [u_1, \dots, u_p]$ $\forall w \in W \setminus \{o\}$ $q(w) > 0$

$V = [v_{s+1}, \dots, v_n]$ $\forall v \in V$ $q(v) \leq 0$

Spočítáme dimenzi $V \cap W$

$$\dim (V \cap W) = \dim V + \dim W - \underbrace{\dim (V + W)}_{\leq n}$$

$$\geq n - s + p - n$$

$$= p - s > 0$$

Tedy existuje vektor $u \in V \cap W$, $u \neq \vec{o}$.

Proto

$q(u) > 0$, neboť $u \in W$

$q(u) \leq 0$, neboť $u \in V$.

To je spor. Tedy musí být $p = s$.

Signatura reálné symetrické matice A tvaru $n \times n$ je signatura příslušné kvadratické formy
$$q(u) = (u)^T A u \qquad q : R^n \to R .$$

Pro signaturu (s_+, s_-, s_0) platí

$$s_+ + s_- + s_0 = n$$
$$s_+ + s_- = h(A)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = P^T A P \text{ , kde } P \text{ je regulární}$$
$$h(P) = n.$$

Proto $s_+ \; s_- = h(D) = h(P^T A P) = h(A)$

Kriterium kongruence matic

Dvě symetrické reálné matice A a B jsou kongruentní, právě když mají stejnou signaturu.

Důkaz: $\Rightarrow$ Nechť jsou kongruentní $A \sim B$.
Pak víme, že $B \sim D$ ... diagonální matice s $+1, -1$ a 0. Pak $A \sim D$ a tedy
$$s(A) = s(D) = s(B)$$
$s(A)$ značí signaturu matice A.

$\Leftarrow$ Nechť mají stejnou signaturu. Pak $A \sim D_1$,

$B \sim D_2$, kde D_1, D_2 jsou diagonální s diagonálou postupně $+1$, pak -1, pak 0. Protože $s(D_1) = s(D_2)$, je $D_1 = D_2$ a tedy $A \sim B$ z tranzitivnosti kongruence.

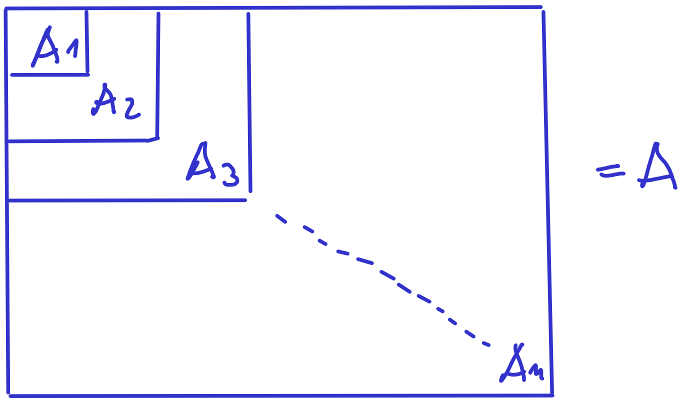
Speciální kvadr. formy

- pozitivně definitní
  $$\forall u \in U \setminus \{o\} \quad q(u) > 0 \iff s_+ = n, \; s_- = s_0 = 0$$
- negativně definitní
  $$\forall u \in U \setminus \{o\} \quad q(u) < 0 \iff s_+ = 0, s_- = n, \; s_0 = 0$$
- pozitivně semidefinitní
  $$\forall u \in U \quad q(u) \geq 0 \iff s_+ + s_0 = n, \; s_- = 0$$
- negativně semidefinitní
  $$\forall u \in U \quad q(u) \leq 0 \iff s_- + s_0 = n, \; s_+ = 0$$
- indefinitní
  $$\begin{array}{l} \exists u \in U \quad q(u) > 0 \\ \exists v \in U \quad q(v) < 0 \end{array} \iff s_+ > 0, \; s_- > 0$$

Tyto pojmy mají důležitou roli při určování extrémů funkcí více proměnných.

Sylvestrovo kritérium

Nechť q je kvadr. forma a nechť A je její matice v nějaké bázi tvaru $n \times n$.



Hlavní minory matice A jsou čísla $\det A_i$

A_i je matice $i \times i$ v obrázku.

Sylvestrovo kritérium

(1) Kvadratická forma q je pozitivně definitní, právě když všechny hlavní minory příslušné matice A jsou kladné.

$$\det A_1 > 0, \ \det A_2 > 0, \ \dots, \ \det A_n > 0.$$

(2) Kvadr. forma q je negativně definitní, právě když hlavní minory příslušné matice A splňují

$$\det A_1 < 0, \ \det A_2 > 0, \ \det A_3 < 0, \ \dots$$

$$(-1)^i \det A_i > 0.$$

Demonstrace (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A_i = 1 > 0$

Demonstrace (2) $A = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}$

$\det A_1 = -1 < 0$

$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 > 0$

$\det A_3 = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$

<u>Příklad:</u> $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2$$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\det A_1 = 3$

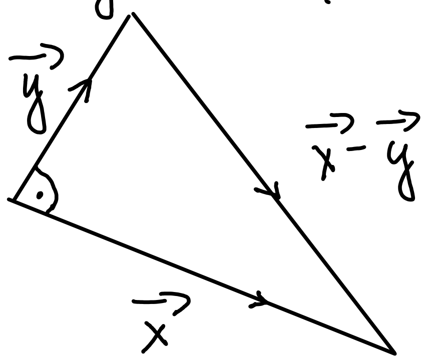
$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$

$\det A_3 = \det A_3 = 10 > 0.$

Závěr: q je pozitivně definitní

Vektorové prostory se skalárním součinem

Motivace: Už ze základní školy známe Pythagorovu větu: Pro dva kolmé vektory $\vec{x}, \vec{y}$ platí



$$\|\vec{x}\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2$$

Tedy $\quad x_1y_1 + x_2y_2 = 0.$

Výraz $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ nazveme skalárním součinem. Bude platit

$$\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \|\vec{x}\|$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \text{ právě když } \vec{x} \perp \vec{y}$$

Takto definovaný skalární součin je symetrická bilin. forma a navíc příslušná, kvadratická forma je pozitivně definitní.

Vezmeme tyto vlastnosti a definujme skalární součin na libovolném reálném vektorovém prostoru takto:

Skalární součin na reálném vektorovém prostoru U

je symetrická bilineární forma

$$\langle\ ,\ \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

taková, že

$$\langle u, u\rangle > 0 \quad \text{pro všechna } u \in U \setminus \{\vec{0}\}$$

Příklady:

① $U = \mathbb{R}^n \qquad \langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

standardní skalární součin

② $U = \mathbb{R}^3 \quad \langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 7x_3y_3$

je sym. bilin. forma, kde příslušná kvadr. forma je pozitivně definitní (viz příklad na Sylv. kritérium)

③ $U = C[a,b] \qquad \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

je sym. bilin. forma, $\langle f, f\rangle > 0$ pro $f \neq 0$.

V prostorech se skalárním součinem definujeme

NORMU (velikost) $\qquad \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$

platí $\quad \|u\| = 0 \iff u = \vec{0}$

KOLMOST dvou vektorů $\quad u \perp v$, jestliže $\langle u, v\rangle = 0$.

Skalární součin na komplexních vekt. prostorech

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$. Zobrazení

$$\langle\ ,\ \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$$

se nazývá skalární součin, jestliže platí

(1) $\langle au+bv, w\rangle = a\langle u,w\rangle + b\langle v,w\rangle$ $\quad a,b \in \mathbb{C}$

(2) $\langle u, av+bw\rangle = \bar{a}\langle u,v\rangle + \bar{b}\langle u,w\rangle$, kde $\bar{a}, \bar{b}$ jsou komplexně sdružená čísla

(3) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$, pruh je kompl. sdružování

(4) Z (3) plyne, že $\langle u,u\rangle \in \mathbb{R}$. Požadujeme
$$\langle u,u\rangle > 0$$
pro všechna $u \in U \setminus \{0\}$.

Příklady:

① $U = \mathbb{C}^n$ standardní skalární součin

$$\langle x,y\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n$$

Komplexně sdružené k $z = a+ib$ je $\bar{z} = a - ib$. Platí
$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Pro platí

$$\langle x, x \rangle = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \dots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$$

pro $x \neq \vec{o}$.

(2) Nechť $U = C([a,b], \mathbb{C})$ jsou spojité funkce na $[a,b]$ s komplexními hodnotami.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)\,dx$$

Díky vlastnosti (4) a definice lze definovat normu vektoru opět takto:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Od tohoto okamžiku budeme pracovat pouze s reálnými nebo komplexními vektorovými prostory, tj. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Cauchyova nerovnost

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pak platí

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

Rovnost nastane právě tehdy jsou u a v lineárně závislé.

Aplikace pro různé skalární součiny

① $U = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \|u\| \cdot \|v\|$$

② $U = C[a,b]$ $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) g(x)\,dx$

$$\left|\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\ \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Důkaz nad $\mathbb{R}$

Jestliže $\vec{v} = 0$, pak nastane rovnost. Věta platí. Nechť $\vec{v} \neq 0$.
Uvažujme vektory $u - tv$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv\rangle = \langle u, u\rangle - t\langle v, u\rangle - t\langle u, v\rangle + t^2\langle v, v\rangle = t^2\|v\|^2 - 2t\langle u, v\rangle + \|u\|^2$$

To je kvadratická funkce v proměnné t, která je všude nezáporná. Proto je její diskriminant nekladný. Tedy

$$D = 4\langle u, v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

To dává nerovnost

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Rovnost nastane právě když $D = 0$.
To ovšem znamená, že pro nějaké t je

$$\|u - tv\| = 0$$

tj. $u - tv = \vec{0}$, $u = tv$.
Tedy u, v jsou lineárně závislé.