5. přednáška Eukleidovská geometrie

Vzdálenost 2 afinních podprostorů

$$\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M}), \quad \mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$$

Věta

(a) Vzdálenost podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ se rovná velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do podprostoru $(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^{\perp}$.

(b) Pro body $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ jsou následující tvrzení ekvivalentní

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \| M - N \|$

(2) $M - N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

(3) $M - N = P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^{\perp}} (A - B)$

Důkaz: (a)

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \operatorname{dist}(A + Z(\mathcal{M}), B + Z(\mathcal{N})) =$$

$$= \operatorname{dist}(A, B + Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})) = \quad \text{podle věty o vzdálenosti bodu a af. podpr.}$$

$$= \| P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^{\perp}} (A - B) \|$$

Důkaz: (b) $\quad (1) \Rightarrow (3)$

$M = A + u \quad u \in Z(\mathcal{M})$

$N = B + v \quad v \in Z(\mathcal{N})$

$$\|M-N\| = \|A-B+\underbrace{u-v}_{\in Z(m)+Z(n)}\|$$ tento výraz

nabývá minima pro

$$v-u = P_{Z(m)+Z(n)}(A-B)$$

(věta z minulé přednášky)

Je-li tedy $\|M-N\|$ minimální, je

$$M-N = A-B-P_{Z(m)+Z(n)}(A-B) = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$$

Dokázali jsme (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) z $M-N = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$

plyne, že $M-N \perp Z(m)+Z(n)$

tj. (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Nechť $M-N \perp Z(m)+Z(n)$

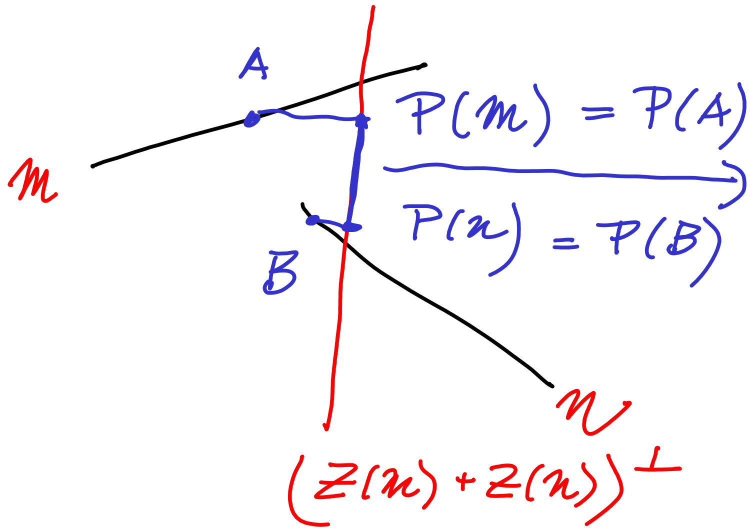
$u \in Z(m)$ libovolné, $v \in Z(n)$ libovolné

$$\|(M+u)-(N+v)\|^2 = \|\underset{\in (Z(m)+Z(n))^\perp}{M-N} + \underset{\in Z(m)+Z(n)}{(u-v)}\|^2 =$$

$$= \|M-N\|^2 + \|u-v\|^2$$

$\Rightarrow$ $\|M-N\|^2 = \operatorname{dist}(m,n)^2$, což je (1).

Představa v $\mathbb{R}^3$ $\quad m$ a n dvě mimoběžky



$$\operatorname{dist}(m,n) = \|P(A-B)\|$$

Odchylky afinních podprostorů

U vekt. prostor se skal. součinem

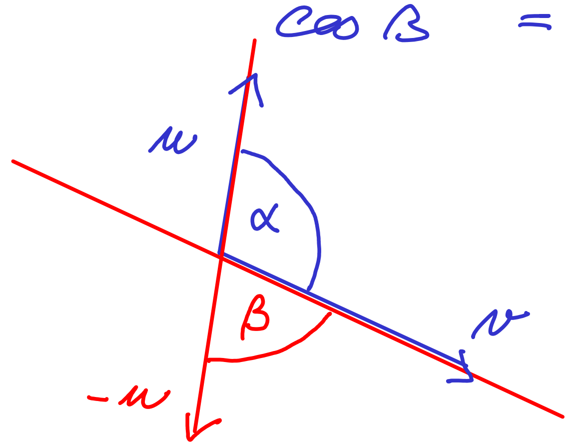
$u \neq \vec{o}$, $v \neq \vec{o}$

Odchylka u, v je úhel $\alpha \in [0, \pi]$

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \quad \Bigg| \quad -1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1$$

Odchylka přímek $[u]$, $[v]$, $u \neq \vec{o}$, $\vec{v} \neq \vec{o}$.
je úhel $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ takový, že

$$\cos\beta = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$$



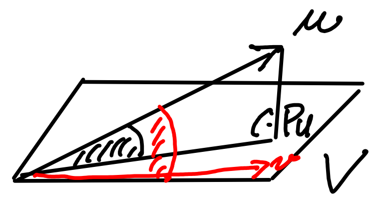
$$|\langle u, v\rangle| = \langle -u, v\rangle$$

Věta: Nechť U je vekt. prostor se skalárním součinem, V jeho podprostor. Nechť $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ je libovolný a Pu je jeho kolmá projekce do V.

Potom je Pu až na násobek jediný vektor z V s vlastností

$$\frac{\|Pu\|}{\|u\|} = \max_{v \in V \setminus \{\vec{o}\}} \frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$$

Poznámka: $\dfrac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$ je cos úhlu mezi přímkami $[u]$, $[v]$, kde druhá přímka leží ve V



$[u]$

• $[Pu]$ přímka ve V

$[v]$ přímka ve V

Důkaz: $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$, $v \in V \setminus \{o\}$

$$\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle \underbrace{Pu}_{\in V} + \underbrace{u - Pu}_{\in V^{\perp}}, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle Pu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$$

Cauch. nerovnost $\le \dfrac{\|Pu\|\cdot\|v\|}{\|u\|\cdot\|v\|} = \dfrac{\|Pu\|}{\|u\|}$ MAX

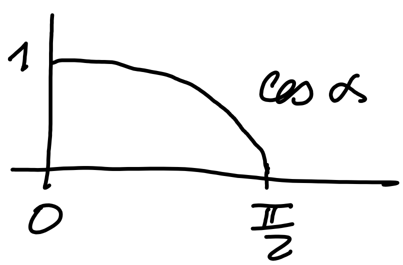
Pro $v = a \cdot Pu$ nabývá výraz $\dfrac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$ svého maxima.

Definice: Odchylka přímky $[u]$, kde $u \neq \vec{o}$ od vekt. podprostoru V je

$$\measuredangle([u], V) = \min_{v \in V \setminus \{o\}} ([u], [v])$$

a po konkrétní úhel podle předchozí věty platí

$$\cos \measuredangle([u], V) = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$



Definice odchylky dvou vektorových podprostorů V a $W \subseteq U$

① Nechť $V \cap W = \{\vec{o}\}$

$$\measuredangle(V, W) = \min_{\substack{v \in V \setminus \{\vec{o}\} \\ w \in W \setminus \{\vec{o}\}}} \measuredangle([v], [w])$$

② Nechť $V \cap W \neq \{\vec{o}\}$. Pak definujeme

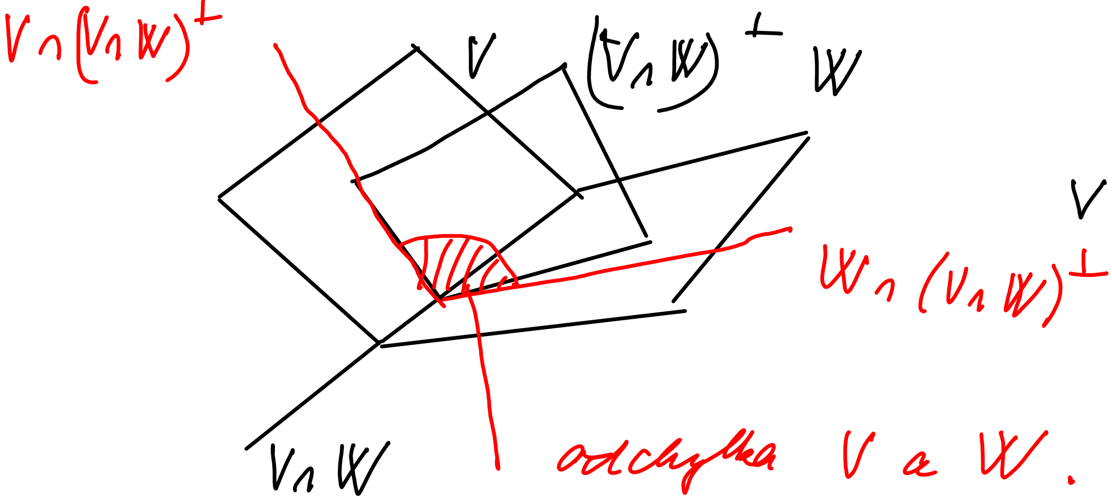
$$\measuredangle(V, W) = \measuredangle\left(V \cap (V \cap W)^{\perp}, W \cap (V \cap W)^{\perp}\right)$$

podle ①

$$\left(V \cap (V\cap W)^{\perp}\right) \cap \left(W \cap (V \cap W)^{\perp}\right) =$$

$$= V \cap W \cap (V \cap W)^{\perp} = (V \cap W) \cap (V \cap W)^{\perp} = \{\vec{o}\}$$

Na střední škole odchylka 2 rovin v $\mathbb{R}^3$.



③ Odchylka dvou afinních podprostorů

$$\sphericalangle(m, n) = \sphericalangle(Z(m), Z(n))$$

Příklad : Odchylka dvou rovin v $\mathbb{R}^4$

$U = \mathbb{R}^4 \quad m = [3,0,1,2] + [e_1+e_2, e_1+e_2+e_3]$
$\qquad\qquad n = [2,3,4,5] + [e_2+e_4, e_2+e_3+e_4]$

$$Z(m) \cap Z(n) = [e_3]$$

$$\left(Z(m) \cap Z(n)\right)^{\perp} = [e_1, e_2, e_4]$$

$$Z(m) \cap (Z(m) \cap Z(n))^{\perp} = [e_1 + e_2]$$

$$Z(n) \cap (Z(m) \cap Z(n))^{\perp} = [e_2 + e_4]$$

$$\cos(\sphericalangle(m,n)) = \cos(\sphericalangle([e_1+e_2],[e_2+e_4])) =$$

$$= \frac{|\langle e_1+e_2, e_2+e_4\rangle|}{\|e_1+e_2\| \cdot \|e_2+e_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\sphericalangle(m,n) = \frac{\pi}{3} \qquad (60^\circ)$$

Dodatek o ortonormálních bázích

U vekt. prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Už jsme ukázali, že v U existují ortonormální báze $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$\dim U \geq 2$ tak těchto bází je nespočetně mnoho.

13:06

Věta:

Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je ortonormální báze prostoru U. Potom platí

(1) Souřadnice vektoru $v \in U$ v bázi α

pak $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \langle v, u_2 \rangle \\ \langle v, u_3 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n \rangle \end{pmatrix}$

(2) Jsou-li u a $v \in U$ takové, že $(u)_\alpha = (x_1, x_2 \dots x_n)^T$ a $(v)_\alpha = (y_1, y_2 \dots y_n)^T$, pak

$$\langle u, v \rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)}_\alpha$$

kde $\overline{y_i}$ je kompl. sdružené k y_i pro $y_i \in \mathbb{C}$, $\overline{y_i} = y_i$ pro $y_i \in \mathbb{R}$.

<u>Důsledek</u> Pro každý vekt. prostor U se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) dimenze n existuje lineární izomorfismus $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) takový, že pro všechna $u, v \in U$ platí

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle u, v \rangle_U$$

<u>Důkaz důsledku:</u> Nechť α je ortonormální báze. Pak $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$)

$$\varphi(u) = (u)_\alpha$$

je lineární izomorfismus.

$$\langle u,v\rangle_U = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha} = \langle (u)_\alpha, (v)_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n}$$
$$= \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

Důkaz věty: (1)

$$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \quad / \langle -, u_1 \rangle$$

$$\langle v, u_1 \rangle = y_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} + y_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0} + \dots + y_n \underbrace{\langle u_n, u_1 \rangle}_{=0}$$

$$\langle v, u_1 \rangle = y_1$$

Analogicky $\langle v, u_j \rangle = y_j$.

(2)
$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$
$$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$$

$$\langle u, v \rangle = \langle \sum x_i u_i, \sum y_j u_j \rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{=1} + \sum_{1 \le i \ne j \le n} x_i \overline{y_j} \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=0}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}$$

LINEÁRNÍ OPERÁTORY a invariantní podprostory

Lineární operátor (transformace, endomorfismus) je lineární zobrazení vekt. prostoru U do sebe.

$$\varphi : U \longrightarrow U .$$

Invariantní podprostor lin. operátoru $\varphi : U \to U$ je vekt. podprostor V s vlastností

$$\varphi(V) \subseteq V .$$

Triviální inv. podprostory operátoru $\varphi : U \to U$ jsou

① $V = \{\vec{o}\}$ $\qquad \varphi(\vec{o}) = \vec{o}$ proto

$$\varphi\{\vec{o}\} = \{\vec{o}\}$$

② $V = U$ $\qquad \varphi(U) \subseteq U$

Příklad $\quad U = \mathbb{R}^4 \ , \ \varphi(x) = Ax \quad \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ukážeme, že podprostor $V = \left[v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

je invariantní. $\varphi(V) \subseteq V$

$$\varphi(v_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + 2v_2 \in V$$

$$\varphi(v_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)v_1 + v_2 \in V$$

$$\varphi(av_1 + bv_2) = a\underbrace{\varphi(v_1)}_{\in V} + b\underbrace{\varphi(v_2)}_{\in V} \in V$$

Tedy $\varphi(V) \subseteq V$.

OPAKOVÁNÍ: Matice lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ v bázích $\alpha = (u_1, \dots u_n)$ prostoru U a $\mathcal{B}$ prostoru V je

$$(\varphi)_{\mathcal{B}, \alpha} = \left((\varphi(u_1))_{\mathcal{B}} \ (\varphi(u_2))_{\mathcal{B}} \dots (\varphi(u_n))_{\mathcal{B}} \right)$$

matice lin. operátoru v bázi α

$$\varphi : U \to U$$

bereme α bázi v U. (Zvláštní případ předchozího)

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha \dots\dots (\varphi(u_n))_\alpha \right)$$

matice $n \times n$

Zpět k příkladu $\quad \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$\varphi(x) = Ax$

$\varepsilon = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ stand. báze v $\mathbb{R}^4$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \left((Ae_1)_\varepsilon \; (Ae_2)_\varepsilon \; (Ae_3)_\varepsilon \; (Ae_4)_\varepsilon \right)$$

$$= \left((s_1 A)_\varepsilon \; \text{-----} \; (s_4 A)_\varepsilon \right)$$

$$= \left(s_1 A \;\; s_2 A \;\; s_3 A \;\; s_4 A \right) = A$$

Uvažujme $\quad \beta = (v_1, v_2, e_3, e_4)$

$v_1 = e_1, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \left((\varphi(v_1))_\beta \; (\varphi(v_2))_\beta \; (\varphi(e_3))_\beta \; (\varphi(e_4))_\beta \right)$$

$$\varphi(v_1) = v_1 + 2v_2 = \underline{1} v_1 + \underline{2} v_2 + \underline{0} \cdot e_3 + \underline{0} \cdot e_4$$

$$\varphi(v_2) = (-2)v_1 + v_2 = \underline{(-2)}\, v_1 + \underline{1}\cdot v_2 + \underline{0}\cdot e_3 + \underline{0}\cdot e_4$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{1}\cdot v_1 + \underline{0}\cdot v_2 + \underline{4}\cdot e_3 + \underline{(-1)}\, e_4$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{(-3)}\, v_1 + \underset{\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}}{\underline{2}\, v_2} + \underset{\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}}{\underline{1}\cdot e_3} + \underline{4}\cdot e_4$$

$$(\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Věta Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor a V je jeho invariantní podprostor. Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k$ je báze podprostoru V a nechť $B = (v_1, v_2, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ je báze U. Potom

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{k} & \underbrace{\qquad}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

Důkaz: $v_j \in V \quad \varphi(v_j) \in V$

$$\varphi(v_j) = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots + a_{kj} v_k + 0\cdot u_{k+1} + \dots + 0\cdot u_n$$

j-tý sloupec je $\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}\, n-k$ nul

Pokračování v příkladu

$\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad \varphi(x) = Ax$

$$V = \left[v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$W = \left[w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\varphi(w_1) = 4w_1 - w_2$$
$$\varphi(w_2) = 1 \cdot w_1 + 4w_2$$

$$\left.\begin{array}{l} V \cap W = \{o\} \\ V + W = \mathbb{R}^4 \end{array}\right\} \Downarrow \quad V \oplus W = \mathbb{R}^4$$

$$\alpha = (v_1, v_2, w_1, w_2)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Věta: Nechť $\varphi: U \to U$ je lin. operátor. V a $W \subseteq U$ jsou invariantní podprostory takové, že
$$V \oplus W = U$$
Nechť $v_1 \ldots v_k$ je báze V, $w_1 \ldots w_{n-k}$ je

báze W. Pak $\alpha = (v_1, \dots v_k, w_1, \dots w_{n-k})$ je báze U a platí, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{k} & \underbrace{\qquad}_{n-k} \end{array} & \end{array}$$

Příště o jednodimenzionálních invariantních podprostorech.

$\varphi(v_1) \in V$

$\varphi(v_1) = v_1 \quad v_2 \qquad v_k \quad 0 w_1 \dots 0 w_{n-k}$

$\varphi(w_1) = 0 v_1 + \dots + 0 v_k + \bullet\, w_1 + \bullet\, w_2 + \dots$

$\varphi(w_1) \in W$