5. přednáška • Eukleidovská geometrie, • ortonormální báze • invariantní podprostory

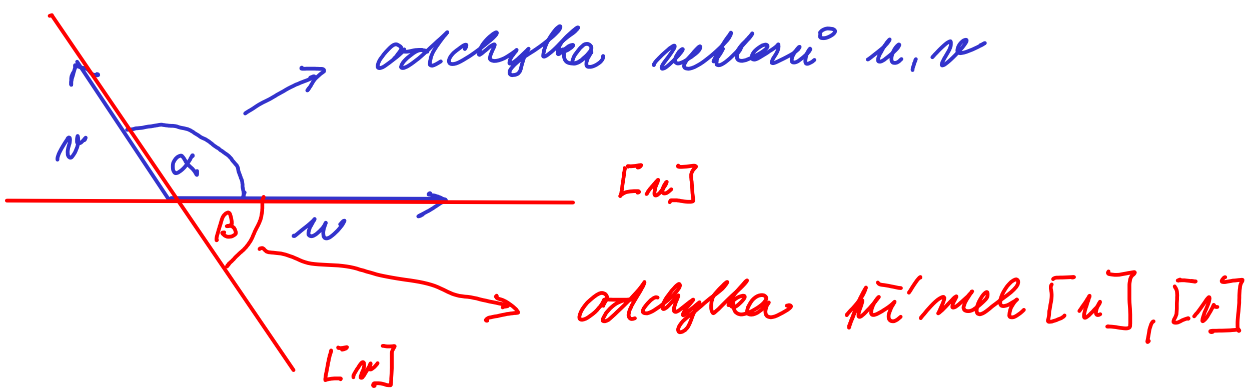
Odchylky afinních podprostorů

Odchylka dvou vektorů u, v ve vekt. prostoru U se skalárním součinem je úhel $\alpha \in [0, \pi]$ takový, že

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

Odchylka dvou přímek $[u], [v]$ ve vektorovém prostoru U se skalárním součinem je úhel $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ takový, že

$$\cos\beta = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|}$$



Věta: Nechť U je vektorový prostor se skalárním součinem a V jeho podprostor. Nechť $u \in U$ libovolný a Pu je jeho kolmá projekce do V. Potom Pu je až na násobek jediný vektor z V s vlastností

$$\frac{\|Pu\|}{\|u\|} = \max_{v \in V \setminus \{\vec{o}\}} \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} .$$

Poznámka: Věta říká, že odchylka přímek $[u]$ a $[Pu]$ je nejmenší ze všech odchylek přímek $[u]$ a $[v]$, kde $v \in V \setminus \{\vec{o}\}$.

Důkaz: Pro $u \in U \setminus \{o\}$ a $v \in V \setminus \{o\}$ je

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle Pu + u - Pu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle Pu, v\rangle + \langle u - Pu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} =$$

$$= \frac{|\langle Pu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \underset{\text{nerovnost}}{\overset{\text{Cauch.}}{\leq}} \frac{\|Pu\|\,\|v\|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$

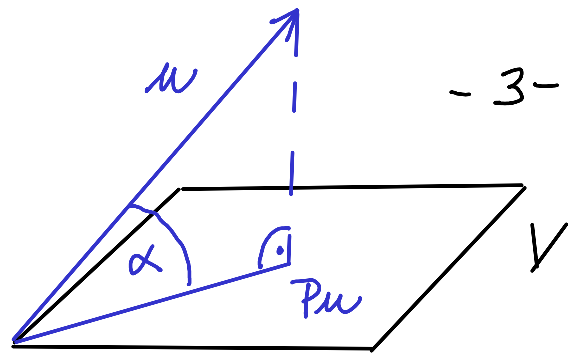
neboť $u - Pu \in V^{\perp}$ a $\langle u - Pu, v\rangle = 0$ a rovnost v Cauchyově nerovnosti nastane pro $v = k \cdot Pu$.

Definice: Odchylka přímky $[u]$ $(u \neq \vec{o})$ a vekt. podprostoru V je

$$\sphericalangle([u], V) = \min_{v \in V \setminus \{\vec{o}\}} \sphericalangle([u], [v])$$

Podle předchozí věty je

$$\cos \sphericalangle([u], V) = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$



Definice : odchylka dvou podprostorů V a W

① Nechť $V \cap W = \{\vec{o}\}$. Pak

$$\measuredangle(V, W) = \min_{\substack{v \in V \setminus \{o\} \\ w \in W \setminus \{o\}}} \measuredangle([v], [w])$$

② Nechť $V \cap W \neq \{\vec{o}\}$. Pak definujeme

$$\measuredangle(V, W) = \measuredangle\underbrace{\left(V \cap (V \cap W)^{\perp}, W \cap (V \cap W)^{\perp}\right)}_{\text{zde jsme v situaci ①}}$$

neboť
$$\left(V \cap (V \cap W)^{\perp}\right) \cap \left(W \cap (V \cap W)^{\perp}\right) =$$
$$= (V \cap W) \cap (V \cap W)^{\perp} = \{\vec{o}\}$$

③ Odchylka dvou afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je

$$\measuredangle(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \measuredangle(Z(\mathcal{M}), Z(\mathcal{N}))$$

Příklad: $U = \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{M} = [3,0,1,2] + [e_1+e_2,\ e_1+e_2+e_3]$$
$$\mathcal{N} = [2,3,4,5] + [e_2+e_4,\ e_2+e_3+e_4]$$

$$Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N}) = [e_3]$$

$$\big(Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N})\big)^\perp = [e_1, e_2, e_4]$$

$$Z(\mathcal{M}) \cap \big(Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N})\big)^\perp = [e_1+e_2]$$

$$Z(\mathcal{N}) \cap \big(Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N})\big)^\perp = [e_2+e_4]$$

$$\measuredangle(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \measuredangle\big(Z(\mathcal{M}), Z(\mathcal{N})\big) = \measuredangle\big([e_1+e_2], [e_2+e_4]\big) = \alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{|\langle e_1+e_2, e_2+e_4\rangle|}{\|e_1+e_2\|\,\|e_2+e_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

Odchylka je $\frac{\pi}{3}$.

Prostory se skal. součinem: vlastnosti ortonormální báze

Už jsme si ukázali, že každý vektorový prostor U nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ má ortonormální bázi. Takových bází je (v dimenzi >1) nekonečně mnoho.

Věta (vlastnosti ortonormální báze)

Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je ortonormální báze v U. Potom

(1) Souřadnice vektoru $v \in U$ v bázi α jsou

$$(v)_\alpha = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \langle v, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n \rangle \end{pmatrix}$$

(2) jsou-li $u, v \in U$ takové, že $(u)_\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a $(v)_\alpha = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, pak

$$\langle u, v \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

kde $\overline{y_i}$ je komplexně sdružené číslo k y_i (pro $y_i \in \mathbb{R}$, je $\overline{y_i} = y_i$).

Důsledek: Pro každý vekt. prostor U nad $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) dimenze n se skalárním součinem existuje lineární izomorfismus

$$\varphi : U \to \mathbb{C}^n \ (\mathbb{R}^n)$$

takový, že pro všechna $u, v \in U$ je

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle u, v \rangle_U$$

<u>Důkaz důsledku:</u> Vezmeme nějakou ortonormální bázi α v U a lineární izomorfismus

$$\varphi = (\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

Platí, že $\langle u, v\rangle_U = (u)_\alpha^{\perp} \overline{(v)_\alpha} = \langle (u)_\alpha, (v)_\alpha \rangle_{\mathbb{K}^n}$

<u>Důkaz věty:</u>

(1) Nechť $v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \quad / \langle -, u_1 \rangle$

$$\underline{\langle v, u_1 \rangle} = y_1 \langle u_1, u_1 \rangle + y_2 \langle u_2, u_1 \rangle + \dots + y_n \langle u_n, u_1 \rangle$$
$$= y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot 0 + \dots + y_n \cdot 0$$
$$\underline{= y_1}$$

Analogicky pro u_j, $j = 2, 3, \dots, n$.

(2) Nechť $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$
$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$

Pak $\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n y_j u_j \right\rangle =$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{=1} + \sum_{i \neq j} x_i \overline{y_j} \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=0}$$

$$= x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

Lineární operátory a jejich invariantní podprostory

Lineární operátor (transformace, endomorfismus) je lineární zobrazení vektorového prostoru U do téhož prostoru U

$$\varphi : U \longrightarrow U$$

Invariantní podprostor lin. operátoru $\varphi : U \to U$ je vektorový podprostor $V \subseteq U$ takový, že

$$\varphi(V) \subseteq V.$$

Triviální invariantní podprostory každého lin. operátoru $\varphi : U \to U$ jsou $\{\vec{o}\}$ a U.

$$\varphi(\vec{o}) = \vec{o} \Rightarrow \varphi(\{\vec{o}\}) = \{\vec{o}\}$$
$$\varphi(U) \subseteq U$$

Příklad $U = \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ukážeme, že podprostor $V = [v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]$ je invariantní.

Ukážeme, že $\varphi(V) \subseteq V$.

$$\varphi(v_1) = A\cdot v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = v_1 + 2v_2 \in V$$

$$\varphi(v_2) = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 \in V$$

$$\varphi(a v_1 + b v_2) = a\underset{\underset{V}{\Updownarrow}}{\varphi(v_1)} + b\underset{\underset{V}{\Updownarrow}}{\varphi(v_2)} \in V$$

Opakování: Matice lin. zobrazení v bázích α, β

Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární, $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ báze U a β báze prostoru V.
Matice φ v bázích α, β je

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta, (\varphi(u_2))_\beta, \dots (\varphi(u_n))_\beta \right)$$

Je-li $\varphi : U \to U$ lineární operátor, můžeme vzít $\beta = \alpha$ a mluvíme o matici lin. operátoru v bázi α:

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha, (\varphi(u_2))_\alpha, \dots, (\varphi(u_n))_\alpha \right)$$

Vraťme se k předchozímu příkladu

$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad \varphi(x) = A \cdot x$

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ stand. báze

$$(\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \left((Ae_1)_{\mathcal{E}}, (A \cdot e_2)_{\mathcal{E}}, (A \cdot e_3)_{\mathcal{E}}, (A \cdot e_4)_{\mathcal{E}} \right)$$

$$= \left(s_1 A, s_2 A, s_3 A, s_4 A \right) = A$$

Definovali jsme $V = \left[v_1 = e_1, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

Uvažujme bázi $\mathcal{B} = (v_1, v_2, e_3, e_4)$ prostoru $\mathbb{R}^4$.

$$(\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left((\varphi(v_1))_{\mathcal{B}}, (\varphi(v_2))_{\mathcal{B}}, (\varphi(e_3))_{\mathcal{B}}, (\varphi(e_4))_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right), \quad \text{neboť}$$

$$\varphi(v_1) = v_1 + 2v_2 = 1 \cdot v_1 + 2v_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\varphi(v_2) = (-2)v_1 + v_2 = (-2)v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 4e_3 + (-1)e_4$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-3)v_1 + 2v_2 + 1 \cdot e_3 + 4e_4$$

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ a $V \subseteq U$ je invariantní podprostor. Nechť $v_1, v_2, \dots v_k$ je báze V a nechť $B = (v_1, v_2, \dots v_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ je báze celého prostoru U. Pak

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \\ \underbrace{\qquad}_{k}\underbrace{\qquad}_{n-k} \end{array} \begin{array}{l} \} \, k \\ \} \, n-k \\ \end{array}$$

Důkaz: Zde je zachycena situace z předchozího příkladu. Protože $\varphi(v_j) \in V$, platí

$$\varphi(v_j) = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots a_{kj} v_k + 0 \cdot u_{k+1} + \dots + 0 \cdot u_n$$

a tedy matice vlevo dole je nulová.

Pokračování příkladu $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = A \cdot x$

$$V = \left[v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$ je inv. podprostor

$$W = \left[w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$ je rovněž inv. podprostor, neboť

$$\varphi(w_1) = 4 w_1 - w_2$$
$$\varphi(w_2) = 1 . w_1 + 4 w_2$$

Uvažujme bázi $\alpha = (v_1, v_2, w_1, w_2)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(v_1))_\alpha, (\varphi(v_2))_\alpha, (\varphi(w_1))_\alpha, (\varphi(w_2))_\alpha \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ a nechť V a W jsou invariantní podprostory takové, že
$$U = V \oplus W.$$
Nechť $v_1, \dots, v_k$ je báze V a $w_1, \dots, w_{n-k}$ je báze W. Pak v bázi
$$\alpha = (v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k})$$
má φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{k} & \underbrace{\qquad}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

Nás budou zajímat především jednodimenzionální invariantní podprostory $[v]$, $v \in U \setminus \{0\}$. Pro vektory v z těchto podprostorů platí, že existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ tak, že
$$\varphi(v) = \lambda v.$$