6. přednáška VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

Minule: lineární operátor $\varphi: U \to U$, invariantní podprostor $V \subseteq U$, $\varphi(V) \subseteq V$.

Důležité jsou invariantní podprostory tvaru $V = [v]$, kde $v \in U \setminus \{\vec{o}\}$. V tomto případě

$$\varphi(v) \in V$$

a tedy existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Definice: Vektor $v \in U \setminus \{\vec{o}\}$ se nazývá vlastní vektor operátoru φ, jestliže existuje číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Číslo λ se nazývá vlastní číslo operátoru φ.

Výpočet vlastního čísla a vlastního vektoru

Charakteristický polynom operátoru φ je polynom v proměnné λ

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)$$

kde $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je matice operátoru φ v nějaké bázi α. Tato definice je nezávislá na volbě báze α a polynom je stupně $n = \dim U$.

Důkaz nezávislosti $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$, $B = (\varphi)_{\beta,\beta}$.

Pak $B = (\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\beta}$

$$= (id)^{-1}_{\alpha,\beta} \, (\varphi)_{\alpha,\alpha} \, (id)_{\alpha,\beta} = P^{-1}AP$$

Je-li mezi maticemi B a A vztah $B = P^{-1}AP$, říkáme, že jsou podobné. Podobnost je relace ekvivalence.

Podobné matice mají stejný charakteristický polynom, tj.

$$\det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$$

Důkaz: $\det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP)$

$= \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) = \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot$

$\cdot \det P = \det(A - \lambda E)$

Kořen polynomu $p(\lambda)$ je číslo $\lambda_0 \in K$ takové, že $p(\lambda_0) = 0$.

LEMMA: Číslo λ_0 je vlastní číslo operátoru φ, právě když λ_0 je kořenem jeho charakteristického polynomu.

Důkaz: následující tvrzení jsou ekvivalentní

- $\exists u \in U \setminus \{\vec{o}\} \quad \varphi(u) = \lambda u$
- Pro nějakou bázi α a nějaké $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ je $(\varphi)_{\alpha,\alpha} (u)_\alpha = \lambda (u)_\alpha$

- $\exists u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ $\quad ((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E)(u)_\alpha = 0$
- $\exists x \in K^n \setminus \{o\}$ $\quad ((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E)\, x = 0$
- Homogenní rovnice $((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E)x = 0$ má netriviální řešení (tj $x \neq 0$).
- $\det((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E) = 0$
- λ je kořenem charakteristického polynomu operátoru φ.

Příklad: $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Char. polynom: vezmeme stand. bázi $\varepsilon = (e_1, e_2)$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(\lambda-3) + 4$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -1$

Spočítáme vlastní vektory

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = t \end{matrix}$$

Všechny vl. vektory k vl. číslu $\lambda_1 = 2$ jsou $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

Vlastní vektory k vl. číslu $\lambda_2 = -1$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 4t \end{matrix}$$

Vlastní vektory k vl. číslu $\lambda_2 = -1$ jsou $t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

Základní informace o kořenech polynomů

Polynom $p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$ s $a_n \neq 0$ má stupeň n.

Nulový polynom $p(\lambda) = 0$ má stupeň $-\infty$.

Pro stupně polynomů platí

$$st\,(p \cdot q) = st\, p + st\, q$$

Věta 1: λ_0 je kořenem polynomu p st. ≥ 1, právě když
$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda),$$
kde $q(\lambda)$ je polynom stupně st. $p - 1$.

Věta 2: nechť $p(\lambda) = \pm \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, kde $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ jsou celá čísla. Jestliže $p(\lambda)$ má racionální kořen λ_0, pak tento kořen dělí koeficient a_0, tj. λ_0 / a_0.

Charakteristické polynomy budou velmi často s celočíselnými koeficienty a u nejvyšší mocniny budou mít koeficient $(-1)^n$, kde n = dimense prostoru. Proto jejich vlastní čísla budeme hledat mezi děliteli absolutního členu a_0. Takových dělitelů je konečný počet.

Příklad $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Char. polynom je

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Kořeny hledáme mezi děliteli čísla 6, tj. mezi čísly $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$p(1) = -1+6-11+6 = 0$

Tedy

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)$$

a najdeme kořeny polynomu $\lambda^2-5\lambda+6$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3$$

Vlastní vektor k $\lambda_1 = 1$ $\qquad (A-E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & +1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = p \\ x_3 = 2p \\ x_1 = p \end{matrix}$$

$v_1 = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pro $p \neq 0$ je vl. vektor k vl. číslu 1

Analogicky

k $\lambda_2 = 2$ $\qquad v_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

k $\lambda_3 = 3$ $\qquad v_3 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vektory $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

tvoří bázi α prostoru $\mathbb{R}^3$. V této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

neboť $\varphi(v_1) = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$

$\varphi(v_2) = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor. Nechť vlastní vektory tvoří bázi α prostoru U. Pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla příslušná vlastním vektorům.

Věta: Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ různá vlastní čísla operátoru $\varphi : U \to U$, pak příslušné vlastní vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz matematickou indukcí podle k.

Pro $k = 1$ je $v_1 \neq \vec{o}$ a věta platí.

Nechť věta platí pro $k \geq 1$. Dokážeme ji pro $k+1$.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$ různá vlastní čísla
$v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ příslušné vlastní vektory.
Nechť

$$(0) \quad a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} = \vec{o}$$

Vynásobíme λ_{k+1}

$$(1) \quad \lambda_{k+1} a_1 v_1 + \dots + \lambda_{k+1} a_k v_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} v_{k+1} = \vec{o}$$

Na původní rovnici (0) aplikujeme φ

$$a_1 \varphi(v_1) + \dots + a_k \varphi(v_k) + a_{k+1} \varphi(v_{k+1}) = \vec{o}$$

tj. $(2) \quad a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_k \lambda_k v_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = \vec{o}$

Odečteme (2) − (1) a dostaneme

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) a_1 v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1}) a_k v_k = \vec{o}$$

Použijeme ind. předpoklad, že $v_1, \dots v_k$ jsou lin. nezávislé. Dostaneme

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) a_1 = \dots = (\lambda_k - \lambda_{k+1}) a_k = 0$$

Protože $\lambda_1 - \lambda_{k+1} \neq 0, \dots, (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \neq 0$, je

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Dosazení do původní rovnice (0) dostaneme také $a_{k+1} = 0$.

Tedy $v_1, \dots v_{k+1}$ jsou lin. nezávislé.

Důsledek: Nechť $\dim_K U = n$. Nechť $\varphi : U \to U$ má n různých vlastních čísel. Pak v U existuje báze α tvořená vlastními vektory a platí

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou příslušná vl. čísla.

Spektrum lineárního operátoru = množina všech vlastních čísel lin. operátoru.

Algebraická násobnost vlastního čísla λ_0

je takové číslo k, že platí

$$\text{char. polynom} = (\lambda - \lambda_0)^k \, q(\lambda), \quad q(\lambda_0) \neq 0.$$

To je algebraická násobnost λ_0 jako kořene charakteristického polynomu.

Geometrická násobnost vlastního čísla λ_0

je dimenze podprostoru $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 \, id)$

Neboť $\varphi(u) = \lambda_0 u \iff (\varphi - \lambda_0 id) u = 0$

$\iff u \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 id)$

Prostor $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 id)$ se nazývá vlastní podprostor příslušný vl. číslu λ_0.

Lemma 1: Součet alg. násobností vl. čísel operátoru $\varphi : V \to V$, $\dim V = n$, je menší nebo roven n.

Lemma 2: Alg. násobnost vl. čísla $\geq$ geom. násobnost vl. čísla.

Příklad 1 $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Char. polynom je $(2-\lambda)^3 \qquad \operatorname{Ker}(\varphi - 2\,\mathrm{id}) = \mathbb{R}^3$

alg. násobnost $= 3 =$ geom. násobnost

Příklad 2 $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

char. polynom je $(2-\lambda)^3$

$\operatorname{Ker}(\varphi - 2\,\mathrm{id}) = [e_2, e_3]$

alg. násobnost $= 3 > 2 =$ geom. násobnost

Příklad 3 $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

char. polynom $(2-\lambda)^3$

$\operatorname{Ker}(\varphi - 2\,\mathrm{id}) = [e_3]$

alg. násobnost $= 3 > 1 =$ geom. násobnost

Důkaz, že alg. nás. $\geq$ geom. nás.

Mějme vl. číslo λ_0 s geom. násobností k.
Tj. existují lin. nezávislé vl. vektory
$v_1, v_2, \dots v_k$

$$\varphi(v_i) = \lambda_0 v_i .$$

Tyto vektory doplníme do báze α celého prostoru
$$\alpha = (v_1, \dots v_k, u_{k+1}, \dots u_n)$$
V této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & C \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & & \lambda_0 & \\ \hline & O & & & D \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{1}\right\} n-k \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{\lambda_0\ 0\ \cdots\ 0\ \lambda_0}}_{k} \ \underbrace{\hphantom{DDDD}}_{n-k} \end{array}$$

Pak
$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0-\lambda & & & C \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_0-\lambda & \\ \hline & O & & D-\lambda E \end{array}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det\left(D - \lambda E\right)$$

$$= (\lambda_0-\lambda)^k \det\left(D-\lambda E\right).$$

Tedy alg. násobnost vl. čísla λ_0 je aspoň k.