7. přednáška Ortogonální a unitární operátory

U vekt. prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$

$\varphi : U \to U$ s vlastností

$$\forall u, v \in U \qquad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

ortogonální, je-li U nad $\mathbb{R}$,
unitární, je-li U nad $\mathbb{C}$.

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

víme, že jde o otočení kolem počátku o úhel α.

φ je ortogonální: $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \langle x, y \rangle$$

Vlastnosti ortog. a unit. operátorů

- $\|\varphi(u)\| = \|u\|$
- $\sphericalangle(\varphi(u), \varphi(v)) = \sphericalangle(u, v) \qquad u \neq \vec{o}, v \neq \vec{o}$
- φ zobrazuje ortonorm. báze na ortonorm. báze

1) $\|\varphi(u)\|^2 = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2$

2) $\cos\alpha = \dfrac{\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle}{\|\varphi(u)\| \, \|\varphi(v)\|} = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|} = \cos \sphericalangle(u, v)$

3) $u_1 \dots u_n \qquad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Totéž platí pro $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$.

Jak vypadají unitární operátory $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$\varphi(x) = A x \qquad A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$

Platí $\qquad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$$\langle A x, A y \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$(A x)^T \cdot \overline{A y} = x^T \cdot \overline{y}$$

$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \qquad x^T (A^T \overline{A}) \overline{y} = x^T E \overline{y}$

$x = e_i, y = e_j \qquad e_i \cdot (A^T \overline{A}) \cdot \overline{e_j} = e_i E e_j$

$$(A^T \overline{A})_{ij} = E_{ij}$$

$$A^T \overline{A} = E \quad | \,\overline{}$$

$$\overline{A}^T A = E$$

$$A = \begin{pmatrix} 3-2i & 6i \\ 4 & 1+2i \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 3+2i & -6i \\ 4 & 1-2i \end{pmatrix}$$

Takové matice se nazývají unitární.

$$\overline{A}^T \cdot A = E \quad (\Rightarrow A \cdot \overline{A}^T = E)$$

ekvivalentně • $A^{-1} = \overline{A}^T$

A

(2) • sloupce matice A tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{C}^n$

(3) • řádky matice A tvoří ortonorm. bázi v $\mathbb{C}^n$

Důkaz (2) $\quad A^T \overline{A} = E$

$$\langle s_j A, s_i A \rangle = \cancel{s_j(A)} \; \overline{s}_i(A) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Jak poznáme, že $\varphi(x) = Ax : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je unitární?

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$(Ax)^T A y = x^T y$$

$$x^T A^T A y = x^T E y$$

$$\boxed{A^T A = E}$$

Taková matice $\in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ se nazývá ortogonální.

ekvivalentně (1) $A^{-1} = A^T$

(2) sloupce A tvoří ortonorm. bázi v $\mathbb{R}^n$

(3) řádky A tvoří ortonorm. bázi v $\mathbb{R}^n$.

TVRZENÍ: Je-li $\varphi: U \to U$ unitární (ortogonální) a α je ortonormální báze v U, pak matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je unitární (ortogonální).

Důkaz: nad $\mathbb{R}$ $u, v \in U$

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

α ortonorm. báze

$$(\varphi(u))_\alpha^T \cdot (\varphi(v))_\alpha = (u)_\alpha^T \cdot (v)_\alpha$$

$$\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (u)_\alpha\right)^T \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (v)_\alpha = (u)_\alpha^T \cdot (v)_\alpha$$

$$(u)_\alpha^T \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha}^T \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} (v)_\alpha = (u)_\alpha^T E (v)_\alpha$$

$$(\varphi)^T_{\alpha,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} = E$$

$\Rightarrow$ $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je ortogonální matice

DETERMINANT

Lemma 1

(1) determinant ortogonální matice je roven 1 nebo -1.

(2) determinant unitární matice je kompl. číslo s absolutní hodnotou 1 $\quad (\cos\alpha + i \sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$

Důkaz: nad $\mathbb{C}$ $\quad A^T \bar{A} = E \quad | \det$

$$\det(A^T \bar{A}) = \det E$$

$$\det A^T \cdot \det \bar{A} = 1$$

$$\det A \cdot \overline{\det A} = 1$$

$$|\det A|^2 = 1$$

$$|\det A| = 1$$

nad $\mathbb{R}$ $\qquad |\det A| = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$.

Vlastní čísla a vektory ortog. a unitárních operátorů

Lemma 2

(1) Vlastní čísla mají abs. hodnotu rovnu 1.

(2) Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Důkaz:

nad $\mathbb{C}$ $\qquad u \in U$ vl. vektor, $u \neq \vec{o}$
$\varphi(u) = \lambda u$

(1)

$$\underbrace{\langle u, u \rangle}_{\neq \vec{o}} = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \langle \lambda u, \lambda u \rangle =$$
$$= \lambda \bar{\lambda} \langle u, u \rangle$$
$$= |\lambda|^2 \underbrace{\langle u, u \rangle}_{\neq \vec{o}}$$

$$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

(2) $\lambda \neq \alpha$ vl. čísla (víme, že $|\lambda| = |\alpha| = 1$)
u, v vlastní vektory $u \neq \vec{o}$, $v \neq \vec{o}$
$\varphi(u) = \lambda u$, $\quad \varphi(v) = \alpha v$

$$\underline{\langle u,v\rangle} = \langle \varphi(u),\varphi(v)\rangle = \langle \lambda u, \mu v\rangle =$$

$$\underline{= \lambda\overline{\mu}\langle u,v\rangle}$$

$$(1-\lambda\overline{\mu})\underline{\langle u,v\rangle} = 0$$

$$1-\lambda\overline{\mu} = 0 \iff \lambda\overline{\mu} = 1 \iff \underbrace{\overline{\lambda}\lambda}_{1}\overline{\mu} = \overline{\lambda} \iff \mu = \lambda$$

$$\mu \neq \lambda \Rightarrow 1-\lambda\overline{\mu} \neq 0 \Rightarrow \langle u,v\rangle = 0$$

u je kolmé na v

HLAVNÍ VĚTA PRO UNITÁRNÍ OPERÁTORY

(Neplatí pro ortogonální)

Nechť $\varphi : U \to U$ je unitární operátor. Pak v U existuje ortonormální báze α tvořená vlastními vektory. V této bázi

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla.

Důkaz: indukcí podle $n = \dim U$.

$\dim U = 1$, pak $\varphi(u) = \lambda u$

a hledaná báze je $\frac{u}{\|u\|}$ $u \neq \vec{0}$.

Nechť věta platí v prostorech dimenze $n-1 \geq 1$.
Mějme prostor U dimenze n a

$$\varphi : U \to U \quad \text{unitární}.$$

Dokážeme, že věta platí pro φ.

Char. polynom φ je stupně $n \geq 1$, má tedy v komplexním oboru kořen (základní věta algebry).

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$a_i \in \mathbb{C}$ $a_n \neq 0$, $n \geq 1$

Pak p má kořen v $\mathbb{C}$.

Vezmeme kořen $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ char. polynomu, ten je vlastní číslo φ s vlastním vektorem v_1, $\|v_1\| = 1$.

$[v_1]^\perp$ je vekt. podprostor v U dimenze $n-1$.

Dokážeme, že $[v_1]^\perp$ je invariantní vůči φ.

$u \in [v_1]^\perp$ tedy $\langle u, v_1 \rangle = 0$.
Chceme dokázat, že $\varphi(u) \in [v_1]^\perp$

Počítáme $\quad \varphi(v_1) = \lambda v_1 \quad \lambda \neq 0$, $|\lambda| = 1$

$$\langle \varphi(u), v_1 \rangle = \langle \varphi(u), \tfrac{1}{\lambda}\varphi(v_1) \rangle =$$

$$= \langle \varphi(u), \bar{\lambda}\varphi(v_1) \rangle = \lambda \langle \varphi(u), \varphi(v_1) \rangle$$

$$= \lambda \langle \underset{u \in [v_1]^\perp}{u, v_1} \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$$

Tedy $\varphi(u) \in [v_1]^\perp$.

Nyní zúžíme operátor φ na $[v_1]^\perp$

$$\varphi / [v_1]^\perp : [v_1]^\perp \longrightarrow [v_1]^\perp$$

$$\langle \varphi(v), \varphi(z) \rangle = \langle v, z \rangle \quad \forall v, z \in U$$

tedy i pro $v, z \in [v_1]^\perp$.

$\varphi/_{[v_1]^\perp}$ je unitární na prostoru $[v_1]^\perp$ dimenze $n-1$.

Použijeme ind. předpoklad

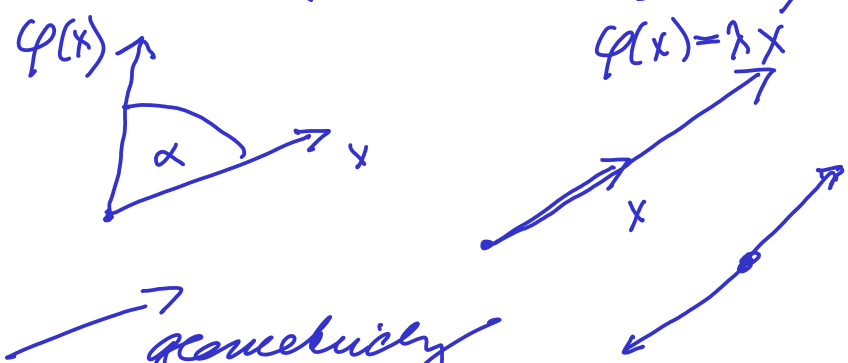
$\exists$ orton. báze $v_2, v_3, \dots v_n$ ve $[v_1]^\perp$ tvořená vlast. vektory.

Tedy $\alpha = (v_1, v_2, v_3, \dots v_n)$ je ortonormální báze prostoru U tvořená vl. vektory. $\quad (\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

Věta neplatí pro ortog. operátory

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\alpha \neq k\pi$



Nemá vl. čísla
zdůvodnění $\longrightarrow$ geometricky

spočítáme char. polynom

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\,\lambda + \lambda^2 + \sin^2\alpha$$

$$= \lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + 1 \qquad \alpha \neq k\pi$$

$$D = (-2\cos\alpha)^2 - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) < 0$$

Nemá reálné kořeny.
Komplexní kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{+2\cos\alpha \pm i2\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2} \qquad \alpha \neq k\pi$$

$$= \cos\alpha \pm i\sin\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

ORTOGONÁLNÍ ZOBRAZENÍ V $\mathbb{R}^2$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = Ax$, A ortogonální

A má sloupce velikosti 1 navzájem kolmé.

① $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\qquad a^2+b^2=1$

nebo

② $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

① $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad a^2+b^2=1$

V tomto případě je

$\boxed{\det A} = a \cdot a - b(-b) = a^2+b^2 \boxed{= 1}$.

Existuje $\alpha \in [0, 2\pi)$ tak, že

$$a = \cos\alpha, \quad b = \sin\alpha$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a zobrazení $\varphi(x) = Ax$ je otočení kolem počátku o úhel α proti směru hod. ručiček.

l) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ $\quad a^2+b^2 = \underline{1}$

$$\boxed{\det A} = a(-a) - b\cdot b = -(a^2+b^2) = \boxed{-1}$$

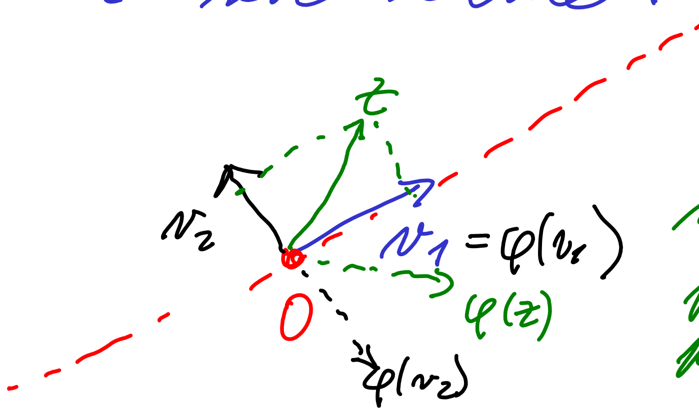
Char. polynom

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a+\lambda)(\lambda-a) - b^2 =$$

$$= \lambda^2 - a^2 - b^2 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

φ má vl. čísla 1 a -1. Vlastní vektory v_1 (k 1) a v_2 (k -1) musí být na sebe kolmé.



Jde o symetrii podle přímky procházející počátkem se směrovým vektorem v_1

Lze spočítat $v_1 = \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$ vl. vektor k $\underline{\underline{1}}$

$v_2 = \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$ vl. vektor k $\underline{\underline{-1}}$

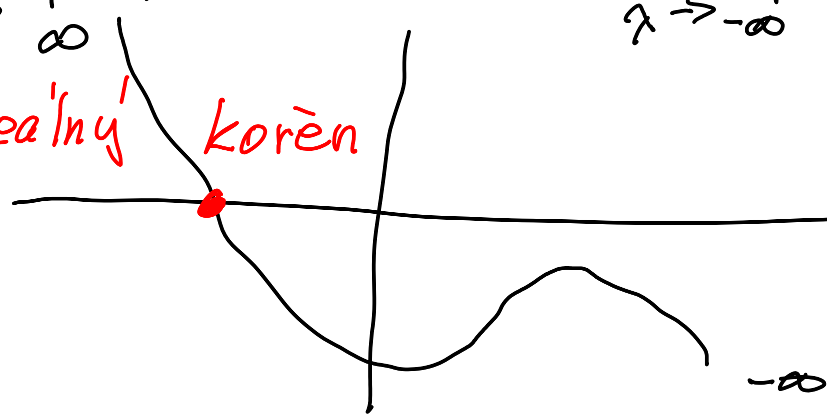
ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY NA $\mathbb{R}^3$

mají char. polynom

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Polynom 3. stupně má vždy reálný kořen.

$$\lim_{\lambda\to\infty} p(\lambda) = -\infty \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} p(\lambda) = \infty$$



- jestliže tento polynom má kořen $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pak má také kořen $\overline{\lambda_0}$ (komplex. sdružené číslo)

$$p(\lambda_0) = 0, \text{ pak } \overline{p(\lambda_0)} = 0$$

$$0 = \overline{-\lambda_0^3 + a_2\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_0} = -\overline{\lambda_0}^3 + \overline{a_2}\,\overline{\lambda_0}^2 + \overline{a_1}\,\overline{\lambda_0} + \overline{a_0} = -\overline{\lambda_0}^3 + a_2\overline{\lambda_0}^2 + a_1\overline{\lambda_0} + a_0$$

$\overline{\lambda_0}$ je rovněž kořen!

- jestliže $\varphi(x) = Ax$ má char. polynom o kořenech $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, pak

$$\pm 1 = \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

$$\det A = \det(A - 0 \cdot E) = p(0) = a_0$$

$$p(\lambda) = -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$
$$p(0) = -(-\lambda_1)(-\lambda_2)(-\lambda_3) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

Ortog. operátor $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(x) = Ax$, A ortog. matice

Mohou nastat 2 možnosti

① $\det A = 1$, $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$

Pak $1 = \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

vl. čísla v $\mathbb{R}$ existují, je ± 1 $\qquad (\pm 1) \underbrace{(\cos\alpha + i \sin\alpha)(\cos\alpha - i \sin\alpha)}_{1}$

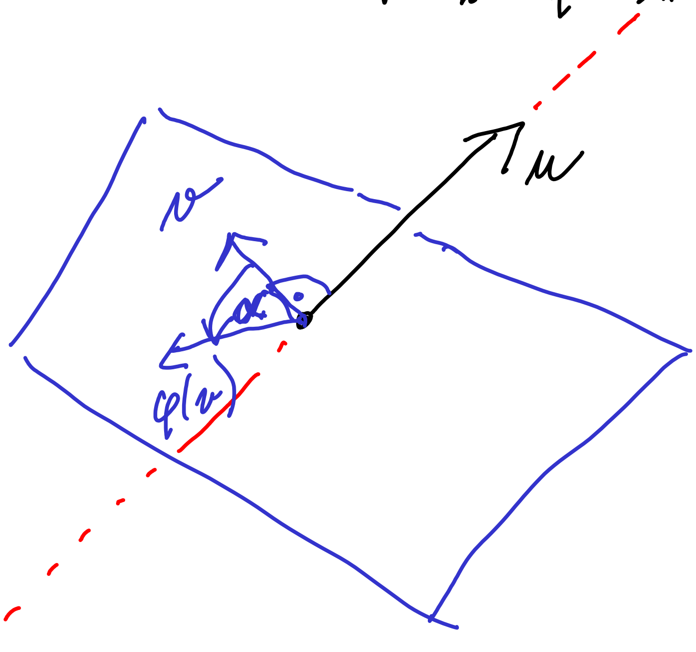
φ má vlastní číslo 1.

Vezmeme u vlastní vektor k 1.

$\varphi | [u] : [u] \to [u]$ je identita

a $[u]^\perp$ je invariantní, v tom 2-dim podprostoru lze ukázat, že φ je otočení o úhel α. Tento úhel určíme tak, že vezmeme vektor $v \perp u$, spočítáme $\varphi(v)$ (to je opět kolmé na u)

a $$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\| \, \|\varphi(v)\|}$$



Závěr: Je to otočení kolem osy procházející počátkem se směrovým vektorem u (vlastní vektor k 1).

② $\det A = -1$ $\qquad -1 = \det A = \lambda_1 \underline{\lambda_2} \, \underline{\lambda_3}$

$$(\pm 1) \cdot \underbrace{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)}_{1}$$

$\Rightarrow$ φ má vl. číslo -1.

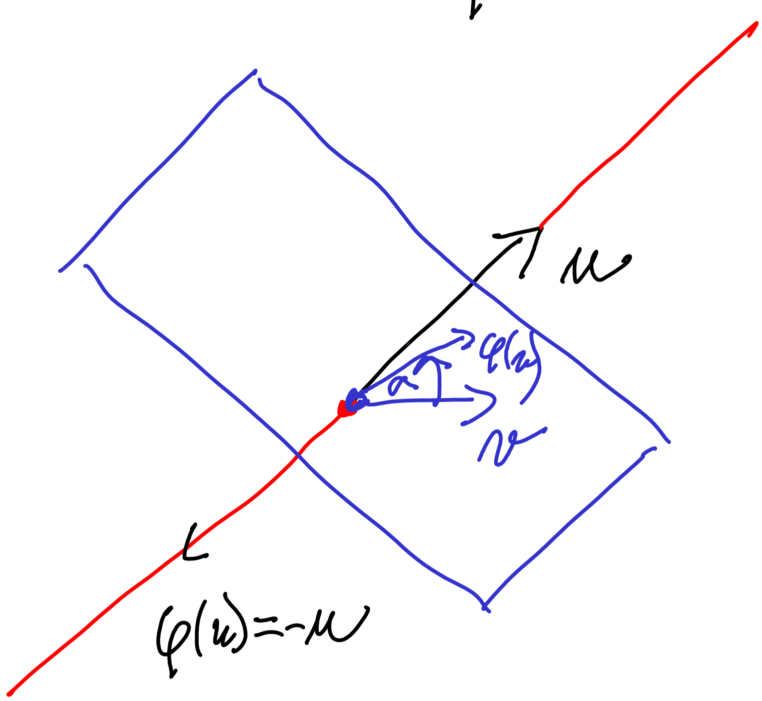
Nechť u je vl. vektor k -1.

$$\varphi|[u] : [u] \to [u] \quad \varphi = -id$$

V rovině $[u]^{\perp}$ je φ otáčení o úhel α.

Tento úhel α určíme tak, že vezmeme $v \perp u$, $v \neq \vec{o}$, spočítáme $\varphi(v)$ a hodnotu

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\| \, \|\varphi(v)\|}$$



Závěr: Výsledné je složení

(1) symetrie podle roviny $[u]^\perp$ (modrá rovina)

(2) složená s otočením o úhel α kolem přímky proch. počátkem se směr. vektorem u (vl. vektor k -1).

- Symetrie podle roviny je také složení, kde otočení je o úhel $\alpha = 0$.

  Vlastní čísla jsou $-1, \underbrace{1, 1}_{\text{alg. nás. } 2}$

- Jiný zvláštní případ

  Vlastní číslo -1 alg (i geom.) nás. 3.

  Je symetrie podle počátku.