8. přednáška: Samoadjungované operátory

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem. Nechť
$\varphi: U \to V$
je lineární zobrazení. Lineární zobrazení

$$\varphi^*: V \to U$$

se nazývá <u>adjungované zobrazení</u> k φ, jestliže

$$\forall u \in U\ \forall v \in V \qquad \langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U .$$

Ke každému zobrazení existuje vždy právě jedno adjungované. Ukážeme si to na příkladu:

<u>Příklad</u> $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$; $\varphi(x) = Ax$, $A \in Mat_{k \times n}(\mathbb{C})$. Hledejme $\varphi^*: \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ ve tvaru

$$\varphi^*(y) = By ,$$

kde $B \in Mat_{n \times k}(\mathbb{C})$.

Následující rovnosti jsou ekvivalentní

$$\langle \varphi(x), y \rangle_{\mathbb{C}^k} = \langle x, \varphi^*(y) \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{C}^k} = \langle x, By \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$(Ax)^T \cdot \overline{y} = x^T \overline{(By)}$$

$$x^T A^T \cdot \overline{y} = x^T \overline{B}\, \overline{y}$$

$$A^T = \overline{B}$$

$$\overline{A^T} = B$$

<u>Závěr:</u> Je-li φ zadán maticí A, je adjungovaný operátor zadán maticí $\overline{A}^T$.

Nad reálnými čísly bude φ^* zadán maticí A^T.

<u>Označení:</u> Budeme psát

$$A^* = \overline{A}^T \quad \text{nad } \mathbb{C},$$
$$A^* = A^T \quad \text{nad } \mathbb{R}.$$

<u>Definice:</u> Lineární operátor $\varphi : U \to U$ se nazývá <u>samoadjungovaný</u>, jestliže

$$\varphi = \varphi^*,$$

tj. $\forall u, v \in U$: $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$.

<u>Příklad 1</u> $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tvaru $\varphi(x) = Ax$ je samoadjungovaný, právě když

$$A = A^T,$$

tj. <u>matice A je symetrická</u>.

Příklad 2: $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\varphi(x) = Ax$
je samoadjungovaný, právě když

$$A = A^* = \bar{A}^T.$$

Takové matice nazýváme hermitovské.
Příklad hermitovské matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4+i & 3i \\ 4-i & 3 & 5-8i \\ -3i & 5+8i & -10 \end{pmatrix}$$

(Na diagonále jsou reálná čísla!)

Příklad 3 - geometrický příklad samoadj. operátoru

Nechť V je podprostor ve vekt. prostoru U a
$P : U \to U$
je kolmá projekce na podprostor V. Ukážeme, že P je samoadjungovaný operátor.

Vektory u a v lze psát ve tvaru

$$u = \underbrace{Pu}_{\in V} + \underbrace{(u - Pu)}_{\in V^\perp}$$

$$v = \underbrace{Pv}_{\in V} + \underbrace{(v - Pv)}_{\in V^\perp}$$

Proto

$$\langle Pu, v\rangle = \langle Pu, Pv + (v - Pv)\rangle = \langle Pu, Pv\rangle + \langle \underbrace{Pu}_{\in V}, \underbrace{v - Pv}_{\in V^\perp}\rangle = \langle Pu, Pv\rangle$$

Analogicky $\langle u, Pv \rangle = \langle Pu + (u - Pu), Pv \rangle = \langle Pu, Pv \rangle$.
Tedy

$$\langle Pu, v \rangle = \langle u, Pv \rangle,$$

P je samoadjungovaný operátor.

Lemma: Je-li $\varphi: U \to U$ samoadjungovaný operátor a α je ortonormální báze U, pak matice

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$ je symetrická (je-li U nad $\mathbb{R}$)
hermitovská (je-li U nad $\mathbb{C}$)

Dk: Následující je ekvivalentní (díky lemmu, jak lze psát skalární součin v ortonormální bázi α!):

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

$$(\varphi(u))_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(\varphi(v))_\alpha}$$

$$\{(\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (u)_\alpha\}^T \cdot \overline{(v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (v)_\alpha}$$

$$(u)_\alpha^T \; \underline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}^T} \; \overline{(v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \; \underline{\overline{(\varphi)}_{\alpha,\alpha}} \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}^T = \overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}}$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}}^T$$

Lemma (vlastní čísla a vektory samoadj. operátorů)

(1) Vlastní čísla jsou vždy reálná (i nad $\mathbb{C}$!)

(2) Vlastní vektory ke různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Dk: (1) Nechť $u \neq \vec{o}$, $\varphi(u) = \lambda u$.

$$\lambda\langle u,u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \langle \varphi(u), u\rangle = \langle u, \varphi(u)\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \bar{\lambda}\langle u,u\rangle$$

Protože $\langle u,u\rangle \neq 0$, je $\lambda = \bar{\lambda}$ reálné číslo.

(2) Nechť $\lambda \neq \mu$ jsou dvě vlastní čísla s vlastními vektory u a v, tj. $\varphi(u) = \lambda u$, $\varphi(v) = \mu v$.

$$\lambda\langle u,v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \mu\langle u,v\rangle$$

Tedy $(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0.$

Protože $\lambda - \mu \neq 0$, je $\langle u, v\rangle = 0$, tj. $u \perp v$.

HLAVNÍ VĚTA O SAMOADJUNGOVANÝCH OPERÁTORECH

Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor (U nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$). Pak v U existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru φ. V této bázi α je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla.

Poznámka: Obdobné tvrzení jako pro unitární operátory. Pozor platí nad $\mathbb{C}$ i nad $\mathbb{R}$. Rovněž jeho důkaz je analogický.

Důkaz indukcí podle $\dim U = n$.

První $n=1$: Pro $\dim_{\mathbb{C}} U = 1$ věta platí: $\varphi(u) = \lambda u$. Za bázi vezmeme $\frac{u}{\|u\|}$, $u \neq \vec{0}$. Přitom $\lambda \in \mathbb{R}$.

Předp. že věta platí v prostorech dimenze $n-1$. Nechť $\dim U = n$. Charakteristický polynom má kořen λ_1 v $\mathbb{C}$, protože to je vlastní číslo samoadj. operátoru, je $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Proto existuje vlastní vektor $u_1 \in U$, $\|u_1\| = 1$, $\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$.

Uvažujme $(n-1)$-dim prostor $[u_1]^\perp$. Ukážeme, že to je invariantní podprostor vzhledem k φ:

$v \in [u_1]^\perp$, potom

$$\langle \varphi(v), u_1 \rangle = \langle v, \varphi(u_1) \rangle = \langle v, \lambda_1 u_1 \rangle = \lambda_1 \langle v, u_1 \rangle = 0$$

Tedy $\varphi(v) \in [u_1]^\perp$.

Operátor $\varphi/[u_1]^\perp : [u_1]^\perp \longrightarrow [u_1]^\perp$ je samoadjungovaný na prostoru dimenze $n-1$. Proto v $[u_1]^\perp$ existuje podle indukčního předpokladu ortonormální báze $u_2, u_3, \ldots u_n$ tvořená vlastními vektory.

Pak $u_1, u_2, \ldots, u_n$ je ortonormální báze celého prostoru U tvořená vlastními vektory, což jsme chtěli dokázat.

Poznámka: Každá reálná symetrická matice A určuje nejen samoadjungované zobrazení $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, ale také samoadjungované zobrazení $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$.

Důsledek 1: (Věta o spektrálním rozkladu samoadj. operátorů)

(Spektrum lineárního operátoru je množina jeho vlastních čísel.)

Každý samoadjungovaný operátor $\varphi : U \to U$ lze psát ve tvaru

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k ,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla operátoru φ a $P_1, P_2, \ldots, P_k$ jsou kolmé projekce na vlastní podprostory $\ker(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})$, ker $(\varphi - \lambda_2 id), \dots,$ ker $(\varphi - \lambda_k id)$. Tyto podprostory jsou navzájem kolmé.

Důkaz: Víme již, že U má bázi tvořenou vlastními vektory. Potom pro $u \in \ker(\varphi - \lambda_i u)$ platí

$$\varphi(u) = \lambda_i u = \lambda_1 \underbrace{P_1(u)}_{O} + \dots + \lambda_i P_i(u) + \dots + \lambda_k \underbrace{P_k(u)}_{O} =$$

$$= (\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k)(u)$$

Protože rovnost $\varphi(u) = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i\right)(u)$ platí pro všechny vektory dané báze, platí

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$$

na celém U.

Důsledek 2 :

Každou symetrickou reálnou matici A můžeme psát ve tvaru

$$A = P^T D P,$$

kde P je ortogonální matice a

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A.

Důkaz: Uvažujme zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$. φ je samoadjungované zobrazení, neboť A je symetrická matice. Nechť α je ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$ tvořená vlastními vektory. Potom

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A \qquad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D.$$

Platí

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\varepsilon}$$

$$(1) \qquad A = P^{-1} D P$$

Matice $P = (id)_{\alpha,\varepsilon}$ je ortogonální, neboť je maticí přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi. Proto

$$(2) \qquad P^{-1} = P^T$$

Dáme-li dohromady (1) a (2) dostaneme

$$A = P^T D P,$$

kde $P^T = (id)_{\varepsilon,\alpha}$ vznikne zapsáním standardních souřadnic vektorů báze α do sloupců.

$$P^T = P^{-1} = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \left((u_1)_\varepsilon (u_2)_\varepsilon \dots (u_n)_\varepsilon \right).$$

Důsledek 3 pro kvadratické formy:

Pro každou kvadratickou formu $g : U \to \mathbb{R}$ na prostoru U nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem existuje ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, .. u_n)$ v U taková, že v souřadnicích této báze je

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + .. + \lambda_n x_n^2 ,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice kvadratické formy v nějaké ortonormální bázi β.

Důkaz: Nechť $f : U \times U \to \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma, která zadává kvadratickou formu

$$g(u) = f(u, u).$$

V souřadnicích nějaké ortonormální báze β je matice této symetrické formy symetrická matice B.

$$f(u,v) = (u)_\beta^T \, B \, (v)_\beta = (u)_\beta^T B^T (v)_\beta$$
$$= \left(B (u)_\beta\right)^T \cdot (v)_\beta =$$
$$= \left((\varphi)_{\beta,\beta} (u)_\beta\right)^T \cdot (v)_\beta$$
$$= \langle \varphi(u), v \rangle ,$$

kde $\varphi : U \to U$ je lineární zobrazení, které má v bázi β matici B. Protože B je symetrická, je φ samoadjungované.

Proto v U existuje ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ tvořená vlastními vektory. Matice f v bázi α je

$$A_{ij} = f(u_i, u_j) = \langle \varphi(u_i), u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \begin{cases} \lambda_i & i = j \quad (\text{vlastní číslo}) \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Tedy vyjádření f v souřadnicích báze α je

$$f(u,v) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n .$$

Pro kvadratickou formu je

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 .$$

<u>Důležitá poznámka:</u> Již dříve jsme ukázali, že pro kvadratickou formu existuje báze taková, že v jejích souřadnicích je

$$g(u) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

<u>ALE</u>, taková báze <u>NEBYLA ortonormální</u>. Algoritmus stejných řádkových a sloupcových úprav nám <u>NEDÁ</u> ortonormální bázi (ani ortogonální)!