10. přednáška I. Aplikace pseudoinverzní matice

Minule A tvaru $k \times n$

sing. rozklad

$$\underset{k\times k}{A = P}\ \underset{k\times n}{S}\ \underset{n\times n}{Q^*}$$

P, Q unitární (ortogonální)

$$S = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\ r \\ \}\ k-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} \end{array} \qquad D = \begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_r \end{pmatrix} \qquad s_i > 0.$$

$$\underset{n\times k}{A^{(-1)}} = \text{"}\,(PSQ^*)^{(-1)}\,\text{"} = \text{"}\,Q^{*(-1)} S^{(-1)} P^{(-1)}\,\text{"}$$

$$\overset{?}{=} \text{"}\,Q\, S^{(-1)} P^*\,\text{"} = Q \underbrace{\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} s_1^{-1} & & & \\ & s_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_r^{-1} \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\ r \\ \}\ n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{k-r} \end{array} \end{array}}_{S^{(-1)}} P^*$$

Vlastnosti $A^{(-1)}$ ... 7 bodů

Důkaz (4) $A^{(-1)}A$ je matice kolmé projekce prostoru $\mathbb{K}^n$ na $(\ker \varphi)^\perp$, kde

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k \qquad \varphi(x) = A$$

$$A = PSQ^* \qquad Q = (id)_{\varepsilon_n, \alpha}$$

Báze

$\alpha = (u_1, \dots u_r, u_{r+1}, \dots u_n)$ je ortonorm. báze tvořená vl. vektory k A^*A

kde $u_{r+1} \dots u_n$ jsou vl. vektory k vl. číslu 0
a tyto generují $\ker \varphi = \ker \varphi^* \circ \varphi$.

$$\varphi^{(-1)}(y) = A^{(-1)} y \quad : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$$

$$\varphi^{(-1)} \varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad (\varphi^{(-1)} \circ \varphi)_{\varepsilon_n, \varepsilon_n} = A^{(-1)} A$$

$$(\varphi^{(-1)} \varphi)_{\alpha, \alpha} = (id)_{\alpha, \varepsilon_n} \, (\varphi^{(-1)} \circ \varphi)_{\varepsilon_n, \varepsilon_n} \, (id)_{\varepsilon_n, \alpha}$$

$$= Q^* \, \underline{A}^{(-1)} \, \underline{A} \, Q =$$

$$= \underbrace{Q^* (Q}_{E_{n \times n}} S^{(-1)} \underbrace{P^*) (P}_{E_{k \times k}} S \underbrace{Q^*) \, Q}_{E_{n \times n}} =$$

$$= \underbrace{S^{(-1)}}_{n \times k} \cdot \underbrace{S}_{k \times n} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \} \, r \\ \} \, n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} & \end{array}$$

$n \times n$

$1 \le i \le r$

$$(\varphi^{(-1)} \varphi)(u_i) = u_i$$

$r+1 \le j \le n$

$$(\varphi^{(-1)} \varphi)(u_j) = 0$$

Vidíme, že $\varphi^{(-1)} \circ \varphi$ je kolmá projekce
na $[u_1, u_2, \dots u_r] = (\ker \varphi)^{\perp}$.

Další vlastnosti dokázány v přípravě na přednášku.

Aproximace řešení soustavy lin. rovnic

A $k \times n$ (obvykle s $k > n$)

$$Ax = b \qquad x \in \mathbb{K}^n \qquad b \in \mathbb{K}^k$$

Taková soustava má řešení, právě když

(*) $$h(A) = h(A \mid b)$$

$$\Longleftrightarrow \quad b \in \operatorname{im} \varphi \qquad \varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k, \quad \varphi(x) = Ax$$

Když podmínka (*) není splněna, tak hledáme $x \in \mathbb{K}^n$ tak, aby

$\|Ax - b\|$ byla minimální.

x je NEJLEPŠÍ APROXIMACE ŘEŠENÍ.

<u>VĚTA:</u> Funkce $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \|Ax - b\|$$

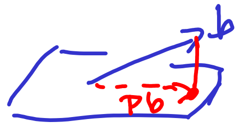
nabývá svého minima v bodech

$$x = A^{(-1)} b + y,$$

kde $Ay = 0$.

Důkaz: Další vlastnost pseudoinverzní matice je,

(5) $AA^{(-1)}$ je matice kolmé projekce $\mathbb{K}^n \longrightarrow \operatorname{im}\varphi \qquad \varphi(x)=Ax$



$$\min_{x\in\mathbb{K}^n}\|Ax-b\| = \min_{v\in\operatorname{im}\varphi}\|v-b\| = \|P(b)-b\| =$$

kde P je kolmá projekce $\mathbb{K}^k$ do $\operatorname{im}\varphi$

$P = AA^{(-1)}$

$$= \|AA^{(-1)}b-b\|$$

Tedy $x = A^{(-1)}b$ splňuje podmínku minimality $\|Ax-b\|$ a samozřejmě $A^{(-1)}b+y$, kde $Ay=0$ splňují stejnou podmínku

$$\|A(A^{(-1)}b+y)-b\| = \|AA^{(-1)}b-b\| = \|Pb-b\|.$$

Příklad:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 \qquad &= 7 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad h(A) = 2 < h(A|b)$$

Nejlepší aproximace je $A^{(-1)}b$.

$Ay = 0 \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$A^{(-1)}$ jsme spočítali na konci minulé přednášky:

$$A^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{(-1)} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$f(x_1, x_2)$

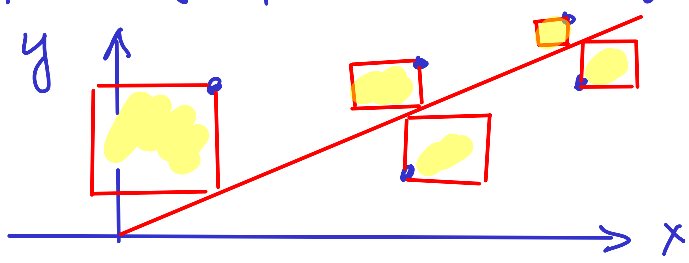
$= (x_1 + 2x_2 - 3)^2 + (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 5)^2$ je minimální pro $x_1 = 14/3$, $x_2 = 1/3$.

Příklad 2 Lineární regrese

Veličiny x, y, ve vztahu $y = \beta x$

To β dopředu neznáme. Naměříme n hodnot dvojic (x, y)

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$



Hledáme β tak, aby

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta x_i)^2 \quad \text{byla co nejmenší.}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Hledáme β jako nejlepší aproximaci soustavy

$$A \cdot \beta = b$$

$$\begin{aligned} x_1 \beta &= y_1 \\ x_2 \beta &= y_2 \\ &\vdots \\ x_n \beta &= y_n \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0 \qquad A^* A \qquad 1 \times 1$$

$$\beta = A^{(-1)} b = \underbrace{(A^* A)^{(-1)} A^*}_{A^{(-1)}} b \qquad \text{vlastnost (7)}$$

$$= \left((x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^{(-1)} (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\underset{\substack{\neq \\ 0}}{}$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Další úloha na lin. regresi

$$y = \alpha + \beta x$$

$$\alpha + \beta x_i = y_i$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (A^* A)^{(-1)} A^* \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Polární rozklad matice

Motivace: Každé kompl. číslo $a+ib \in \mathbb{C}$ lze psát ve tvaru

$$a+ib = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$r \geq 0$

Tento rozklad je jednoznačný pro $a+ib \neq 0$.

V řeči lin. zobrazení

$$\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \varphi(z) = (a+ib)z$$

Toto zobrazení můžu psát ve tvaru složeného zobrazení

$$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$$

$\varphi_1: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \varphi_1(z) = (\cos\alpha + i\sin\alpha) z$

je unitární.

$\varphi_2: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \varphi_2(z) = r z . \qquad r \geq 0$

φ_2 je samoadjungované a pozitivně semidefinitní

$$(r)^* = \bar{r} = r$$

$$\langle r z, z \rangle = r \|z\|^2 \geq 0$$

Věta o polárním rozkladu

Je-li A čtvercová matice $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, pak ji lze rozložit na součin

$$A = R \cdot U,$$

kde R je samoadjungovaná ($R^* = R$), pozitivně semidefinitní ($\langle Rx, x \rangle \geq 0$) a U je unitární (ortogonální) matice.

Navíc platí, že $R^2 = A \cdot A^*$ (píšeme, že $R = \sqrt{AA^*}$). Je-li A invertibilní, jsou R a U určeny jednoznačně.

Důkaz: $A = PSQ^*$

$$A = PS\underbrace{P^*P}_{E}Q^* = (PSP^*)(PQ^*) = R \cdot U$$

P, Q^* jsou unitární $\Rightarrow$ $P \cdot Q^*$ je unitární

$$(P\cdot Q^*)(PQ^*)^* = PQ^*Q^{**}P^* = P\underbrace{Q^*Q}P^* = PP^* = E$$

$$R^* = (PSP^*)^* = P^{**}S^*P^* = PSP^* = R$$

$$\langle Rx, x\rangle = \langle PSP^*x, x\rangle = \langle SP^*x, P^*x\rangle \geq 0.$$

$$AA^* = (RU)(RU)^* = RUU^*R^* = RR^* = R^2$$

Příklad: Polární rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PSQ^* = P\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^*$$

$$= (PSP^*)(PQ^*) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{20} & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

LINEÁRNÍ PROCESY

Systém, v čase n je zadán vektorem

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_m(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Časový vývoj je určen maticí A tvaru $m \times m$

$$X(n+1) = A\,X(n)$$

$X(0)$ je nějaký počáteční stav.

Lineární (iterovaný) proces

Ukážeme, jakou roli hrají vl. čísla a vektory matice A.

(1) Dravec a kořist

Dva živ. druhy dravec D a kořist K

$$X(n) = \begin{pmatrix} D_n \\ K_n \end{pmatrix}$$

Změna za rok je popsána takto

$$D_{n+1} = 0{,}6\, D_n + 0{,}5\, K_n$$

$$K_{n+1} = -p\, D_n + 1{,}2\, K_n$$

$$p \geq 0$$

$$X(n+1) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -p & 1{,}2 \end{pmatrix}}^{A} X(n)$$

Zajímá nás dlouhodobý vývoj v závislosti na parametru $p \geq 0$.

Vlastní čísla a vektory v závislosti na p

(1) $p = 0{,}16$ $\quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0{,}8 \quad u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $p = 0{,}175$ $\quad \lambda_1 = 0{,}95,\ \lambda_2 = 0{,}5 \quad u_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $p = 0{,}135$ $\quad \lambda_1 = 1{,}05,\ \lambda_2 = 0{,}75 \quad u_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$X(0) = \begin{pmatrix} D_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = a\, u_1 + b\, u_2$$

V čase n je stav populace

$$X(n) = A\,X(n-1) = A\left(A\,X(n-2)\right) = A^2 X(n-2)$$
$$= \dots = \underline{A^n} \cdot X(0)$$

$$X(n) = A^n (a u_1 + b u_2) =$$
$$= a\,A^n u_1 + b\,A^n u_2 =$$
$$= a\,A^{n-1} A u_1 + b\,A^{n-1} A u_2 =$$
$$= a\,A^{n-1} \lambda_1 u_1 + b\,A^{n-1} \lambda_2 u_2 =$$
$$= a\,\lambda_1^n u_1 + b\,\lambda_2^n u_2$$

(1) $p = 0{,}16$ $\quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 \in [0,1)$

$\lambda_1^n = 1, \quad \lambda_2^n \longrightarrow 0$ pro $n \to \infty$

$$X(n) = a u_1 + b \lambda_2^n u_2 \longrightarrow a u_1$$

Stav obou populací se stabilizuje

stabilní stav je násobkem vl. vektoru k $\lambda_1 = 1$.

(2) $p = 0{,}175$ $\quad \lambda_1^n = 0{,}95^n \longrightarrow 0 \quad \lambda_2^n = 0{,}85^2 \to 0$

$$X(n) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obě populace vymizí

$X(n) = a\,\lambda_1^n \begin{pmatrix}10\\9\end{pmatrix}$ + něco malého

(3) $p = 0{,}135$ $\quad \lambda_1^n = 1{,}05^n \to \infty$, $\quad \lambda_2 = 0{,}75^n \to 0$

$a \neq 0$ populace exponenciálně roste

ale poměr $D_n : K_n$ se blíží

ke poměru dravců a kořisti

ve vlastním vektoru $u_1 = \begin{pmatrix}10\\9\end{pmatrix}$

$$\frac{D_n}{K_n} \longrightarrow \frac{10}{9}$$

(2) Leslieho pop. model

Populace je rozdělena na m generací

v čase n

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_m(n) \end{pmatrix}$$

A Leslieho matice $m \times m$

$$\begin{pmatrix}
f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_m \\
\tau_1 & 0 & 0 & & 0 \\
0 & \tau_2 & 0 & & 0 \\
0 & 0 & \tau_3 & & 0 \\
 & & & & \\
0 & 0 & 0 & \tau_{m-1} & 0
\end{pmatrix}$$

$$x_1(n+1) = f_1 x_1(n) + f_2 x_2(n) + \dots + f_m x_m(n)$$

$$x_2(n+1) = \tau_1 x_1(n) \qquad \tau_i \in [0,1]$$

$\tau_i = 1-$ úmrtnost

$$X(n+1) = A\, X(n)$$

(3) Markovův proces (Markovovův)

Systém má stavy $1, 2, \dots, m$

Ve stavu i v čase n je s pravděpodobností

$$p_i(n)$$

$$P(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_m(n) \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i(n) = 1$$

pravděpodobnostní vektor.

$$P(n+1) = A\, P(n)$$

$A = (a_{ij})$ je Markovova matice

$a_{ij} =$ pravd., že systém

přejde ze stavu $\underline{j}$ do stavu $\underline{i}$

$$p_1(n+1) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(n) \\ \vdots \\ p_m(n) \end{pmatrix}$$

$$a_{11} \cdot p_1(n) + a_{12} \cdot p_2(n) + \dots + a_{1m} p_m(n)$$

$$P(n+1) = A\, P(n)$$

Snadno lze dk, že součet všech čísel v každém sloupci matice A je $\underline{1}$.

$P(0), P(1), \dots P(n)$ jsou pravděpodobnostní vektory.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \hline \end{matrix}$$

$A - E$

$$\begin{matrix} a_{11}-1 & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22}-1 & \end{matrix}$$

Σ řádku: $1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$ $\qquad$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$\det(A-E)=0 \Rightarrow 1$ je vždy vlastní číslo Mark. matice

Teorie k Leslieho modelu a Markovým procesům:

A pozitivní, jestliže $\forall i,j \ A_{ij}>0$

A <u>primitivní</u>, jestliže $\exists k$, A^k je pozitivní

Věta Perronova – Frobeniova

A primitivní matice. Ze všech vlastních čísel (reálných i komplexních) vezmeme to, které má největší absolutní hodnotu). Takové je jenom jedno a nazýváme jej <u>dominantní</u>.

Má tyto vlastnosti: označme jej λ_1

(1) $\lambda_1 > 0$ reálné

(2) geom. násobnost λ_1 je 1 a vlastní vektor u_1 lze zvolit tak, že všechny jeho složky jsou kladné.

(3) Pokud je $\lambda_1 = 1$, pak se systém určený modelem

$$X(n+1) = A\,X(n)$$

stabilizují pro $n \to \infty$ a konvergují k násobku vlastního vektoru k λ_1.

(4) Jestliže $\lambda_1 < 1$, pak systém ve všech složkách konverguje k 0.

(5) Pokud je A Leslieho matice a $\lambda_1 > 1$, pak populace expanduje a poměry mezi jednotlivými generacemi se blíží k poměrům ve vlastním vektoru k λ_1.