11. přednáška JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Dodatek k minulé přednášce: Každá Leslieho matice má právě jedno kladné vlastní číslo.

Motivace: Existují lineární operátory, které nelze diagonalizovat, tj. neexistuje báze α tvořená vlastními vektory, ve které je $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ diagonální.

Příklad: $\varphi(x) = Ax$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vlastní číslo 2 je alg. násobnosti 2, ale geometrické násobnosti 1.

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$

ale dim řešení soustavy $(A-2E)x = 0$ je 1. Všechny vlastní vektory jsou násobky vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Motivace - zpracování: Cílem je najít pro každý lineární operátor bázi α takovou, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je co nejjednodušší. To bude Jordanův kanonický tvar.

Jordanova buňka na vlastní číslo λ_0 velikosti k je matice tvaru $k \times k$

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(J_k(\lambda_0) - \lambda E\right) = (\lambda_0 - \lambda)^k$$

Čtvercová matice J je v Jordanově kanonickém tvaru, je-li blokově diagonální a na diagonále má Jordanovy buňky:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

S Jordanovými buňkami souvisí pojem řetězce operátoru φ na vlastní čísla λ_0.

Nechť $\varphi : U \longrightarrow U$ má vlastní číslo λ_0. Řetězec operátoru φ délky k je posloupnost k nenulových vektorů

$$u_1, u_2, \dots, u_k$$

taková, že

$$
\begin{aligned}
\varphi(u_1) - \lambda_0 u_1 &= 0 \\
\varphi(u_2) - \lambda_0 u_2 &= u_1 \\
\varphi(u_3) - \lambda_0 u_3 &= u_2 \\
&\cdots \\
\varphi(u_k) - \lambda_0 u_k &= u_{k-1}
\end{aligned}
$$

Schématicky budeme zapisovat

$$0 \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_1 \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_2 \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_3 \longleftarrow \cdots u_{k-1} \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_k$$

Všimněte si, že u_1 je vlastní vektor k vlastnímu číslu λ_0.

Lemma: Vektory řetězce $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz indukcí podle k:

Pro $k=1$ je u_1 vlastní vektor, $u_1 \neq \vec{o}$ je LN.

Nechť platí pro $k-1 \geq 1$ a $u_1, \ldots u_k$ je řetězec. Nechť

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \vec{o}$$

Aplikujeme $\varphi - \lambda_0 id$, protože $(\varphi - \lambda_0 id)(u_i) = u_{i-1}$ pro $i \geq 2$ a $(\varphi - \lambda_0 id) u_1 = 0$, dostaneme

$$\sum_{i=2}^{k} a_i u_{i-1} = \vec{o}$$

Podle ind. předpokladu jsou $u_1, \ldots, u_{k-1}$ LN, proto $a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0$.

Dosazením do původní rovnice (*), dostaneme

$$a_1 u_1 = \vec{o}.$$

Protože $u_1 \neq \vec{o}$, je $a_1 = 0$ a tedy $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou LN.

Souvislost řetězce s Jord. buňkou

Nechť $u_1, u_2, \dots u_k$ je řetězec pro vl. číslo λ_0 operátoru φ.

$$V = [u_1, u_2, \dots u_k]$$

Platí

$$\varphi(V) \subseteq V$$

neboť

$$\begin{aligned} \varphi(u_1) &= \lambda_0 u_1 \\ \varphi(u_2) &= \lambda_0 u_2 + u_1 \\ &\dots \\ \varphi(u_k) &= \lambda_0 u_k + u_{k-1} \end{aligned}$$

Vezmeme tedy $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ a spočítáme pro

$$\varphi/V : V \to V$$

matici

$$(\varphi/V)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$= J_k(\lambda_0).$$

Věta o Jordanově kan. tvaru

Nechť U je vekt. prostor dimenze n nad $\mathbb{K}$. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor takový, že součet algebraických násobností jeho vlastních čísel je n.

Potom v U existuje báze α taková, že
$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$
je matice v Jordanově kanonickém tvaru. Tento tvar je určen jednoznačně, až na pořadí buněk.

Poznámka 1: Báze α NENÍ určena jednoznačně!

Poznámka 2: Báze α je posloupnost tzv. řetězců k vlastním číslům operátoru φ.

Dodatek k větě: Je-li U vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, má každý char. polynom operátoru $\varphi : U \to U$ n komplexních kořenů včetně násobností. Proto je podmínka z věty v tomto případě vždy splněna.

Věta o Jord. kanonickém tvaru – maticová verze

Nechť $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, jejíž char. polynom má v kořenech vešlné násobnosti.

Pak A je podobná matici J v Jordanově kanonickém tvaru, tj.

$$J = P^{-1} A P,$$

kde P je nějaká regulární matice. Matice J je určena jednoznačně, až na pořadí buněk.

Obě verze Jordanovy věty jsou ekvivalentní!

Dokážeme: verze pro operátor $\Rightarrow$ maticová verze

Nechť $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Uvažujme operátor

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad \varphi(x) = Ax.$$

Nechť α je báze v $\mathbb{K}^n$ taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J \quad \text{matice v JKT}.$$

Pak

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon_n} (\varphi)_{\varepsilon_n,\varepsilon_n} (id)_{\varepsilon_n,\alpha} =$$

$$= P^{-1} A P.$$

Důsledek: Dvě komplexní matice A, B tvaru $n \times n$ jsou podobné, právě když mají stejný Jordanův kanonický tvar (až na pořadí bloků).

Jordanův kanonický tvar je invariant podobnosti!

PŘÍKLADY

Příklad 1a $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Chceme najít JKT pro matici A

Char. polynom je $\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$

Vl. čísla $\lambda_1 = 2$ vl. vektor $v_1 = (1, -2, 3)^T$

$\lambda_2 = 1$ alg. násob. 2

geom. násob. 2

vlastní vektory $v_2 = (3, 6, -8)^T$

$v_3 = (1, -1, 1)^T$

Vezmeme bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha, \varepsilon_3} (\varphi)_{\varepsilon_3, \varepsilon_3} (id)_{\varepsilon_3, \alpha}$$
$$= P^{-1} \quad A \quad P$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Zkouška $\quad PJ = AP$
(bez počítání inverze P^{-1}).

Příklad 1b $\quad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Vl. čísla $\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 1$ alg. nás. 2

Vlastní vektory

$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = (1, 0, 0)^T$
$\lambda_2 = 1 \qquad v_2 = (1, -1, 0)^T \qquad$ geom. nás. 1

Musíme najít řetězec délky 2 k vl. číslu $\lambda_2 = 1$

$$\vec{o} \xleftarrow{A - 1E} v_2 = (1, -1, 0)^T \xleftarrow{A - 1 \cdot E} v_3$$

Řešíme soustavu $\quad (A - E) v_3 = v_2$.

Má více řešení. Vybereme jedno

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Vektory v_1, v_2, v_3 tvoří bázi α

Platí

$$\varphi(v_1) = 2v_1$$
$$\varphi(v_2) = v_2$$
$$\varphi(v_3) = v_2 + v_3$$

Proto $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = J$ je matice v JKT.

Opět

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon_3} (\varphi)_{\varepsilon_3,\varepsilon_3} (id)_{\varepsilon_3,\alpha}$$
$$= P^{-1} A P$$

$\boxed{\text{PRAVIDLO 1}}$ JKT matice A obsahuje na diagonále vlastní čísla matice A, každé tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

$\boxed{\text{PRAVIDLO 2}}$ V JKT matice A je počet Jordanových buněk s vl. číslem λ_0 roven geometrické násobnosti vl. čísla.

Každé buňce odpovídá 1 řetízek. Na začátku každého řetízku stojí vlastní vektor.

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tato dvě pravidla umožňují pomocí algebraické a geometrické násobnosti najít JKT matic 2×2 a 3×3. Pro matice 4×4 však už nestačí!

Klasifikace JKT pro matice 3×3

(1) 3 různá vl. čísla

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(2A) 2 různá vlastní čísla

λ_1 alg. nás. 1

λ_2 alg. nás. 2

geom. nás 2

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(2B) 2 různá vl. čísla

λ_1 alg. nás. 1

λ_2 alg. nás. 2

geom. nás. 1

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

3A Jediné vl. číslo alg. nás 3, geom. nás. 3

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

3B Jediné vl. číslo alg. nás. 3, geom. nás. 2

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right)$$

3C Jediné vl. čísla alg. nás 3, geom. nás. 1

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Je ještě potřeba najít matici P tak, aby

$$J = P^{-1} A P.$$

K tomu musíme hledat řetězce!

Příklad 2

$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda A) = (2-\lambda)^3$$

$\lambda_1 = 2$ je vl. číslo alg. násob. 3, geom. násob. 1

Vlastní vektor $u_1 = (2,1,2)^T$.

Musíme najít řetězec délky 3 pro vl. číslo 2. Ten začíná vektorem u_1

$$(A-2E)u_2 = u_1$$
$$(A-2E)u_3 = u_2$$

Jedno z mnoha řešení je

$$u_2 = (5,2,1)^T, \quad u_3 = (3,1,0)^T$$

Matice φ v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J = (id)_{\alpha,\varepsilon_3}(\varphi)_{\varepsilon_3,\varepsilon_3}(id)_{\varepsilon_3,\alpha}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice P není určena jednoznačně, neboť soustava
$$(A-2E)u_2 = u_1$$
$$(A-2E)u_3 = u_2$$
má více řešení!

Příklad 3 $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda E) = (2-\lambda)^3$$

Vl. číslo $\lambda_1 = 2$ alg. nás. 3, geom. nás. 2 s vlastními vektory $au + bv$

$$u = (2,-1,0)^T, \quad v = (0,0,1)^T$$

Víme, že JKT je

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Báze α taková, že
$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$$
se skládá ze dvou řetězců pro vl. čísla 2. Jeden má délku 1, druhý délku 2. Musíme zjistit, kterým vlastním vektorem začíná řetězec délky 2. Řešíme soustavu

$$(A-2E)w = au + bv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tato soustava má řešení, právě když

$$2a+b=0.$$

Proto zvolme $a=1$, $b=-2$ a vyřešme soustavu

$$(A-2E)w = u-2v$$

To vede na $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Možné řešení je $w=(-1,1,0)$

Vektory

$$0 \xleftarrow{A-2E} u-2v \xleftarrow{A-2E} w$$
$$u-2v = (2,-1,-2) \longleftarrow (-1,1,0)$$

tvoří řetězec délky 2.

Vezmeme bázi $\alpha = (\underbrace{u}_{\substack{\text{řetězec} \\ \text{délky } 1}}, \underbrace{u-2v, w}_{\text{řetězec délky } 2})$

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = J = (id)_{\alpha,\varepsilon_3}\, A\, (id)_{\varepsilon_3,\alpha}$$

$$(id)_{\varepsilon_3,\alpha} = P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice 4×4 JKT nelze již najít pomocí alg. a geom. násobnosti v případě, že matice má jedno vl. číslo alg. násobnosti 4 a geom. násobnosti 2.

Máme 2 možnosti

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right) \qquad J = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right)$$

Příklad 4 $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (1+\lambda)^4$$

$\lambda_1 = -1$ vl. číslo alg. nás. 4, geom. nás. 2

Vlastní vektory $au + bv$

$$u = (1, 0, 3, 0)^T \qquad v = (0, 0, 1, -2)^T$$

Hledáme řetězec délky aspoň 2.

$$(A + E)\,w = au + bv$$

V tomto případě má soustava řešení pro všechna a i b. (Udělejte si sami!) Tedy řešitelné jsou obě soustavy

$$(A+E)u_1 = u \quad , \quad (A+E)v_1 = v$$

Dostáváme 2 řetězce délky 2. Ty tvoří bázi α

$$\alpha = (\underbrace{u, u_1}_{1.\ \text{řetězec}}, \underbrace{v, v_1}_{2.\ \text{řetězec}})$$

Např. $u_1 = (0, -1, 0, 3)^T$, $v_1 = (0, -2, 0, 5)^T$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = J = (id)_{\alpha,\varepsilon_4} A \underbrace{(id)_{\varepsilon_4,\alpha}}_{P}$$

$$= P^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Kontrola správnosti výpočtu matice P:

Ověříme $PJ = AP$.

Příklad 5 $\quad \varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \ \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda E) = (1-\lambda)^4$$

Vl. číslo $\lambda = 1$ alg. nás. 4, geom. nás. 2

vlastní vektory $au + bv$

$$u = (0,1,0,1)^T, \quad v = (-2,0,3,0)^T$$

Řešíme soustavu $(A-E)w = au + bv$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & 0 & -2 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení, právě když

$$a + 6b = 0.$$

Zvolíme $b = 1, \ a = -6$

$$-6u + v = (-2,-6,3,-6)^T$$

je začátek řetízce délky 3.

$$(A-E)w = -6u + v$$

$$w = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0\right)^T + a_1 u + b_1 v$$

jsou všechna řešení. Hledáme 3. vektor řetězce

$$(A-E)z = w$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} + a_1 + 4b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení, právě když

$$-1 + a_1 + 6b_1 = 0.$$

Zvolíme $b_1 = 0$, $a_1 = 1$.

$$w = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T \qquad z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

Našli jsme řetězec délky 3

$$\vec{o} \longleftarrow -6u + v \longleftarrow w = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T \longleftarrow z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

a řetězec délky 1 (lin. nezávislý)

$$\vec{o} \longleftarrow u$$

Báze $\alpha = (\underbrace{-6u+v,\ w,\ z}_{\text{řetězec délky } 3},\ \underbrace{u}_{\text{řetězec délky } 1})$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right) = J = (id)_{\alpha,\varepsilon_4} A \, (id)_{\varepsilon_4,\alpha}$$

kde $(id)_{\varepsilon_4,\alpha} = P = \begin{pmatrix} -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 6 & 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$