# 12. přednáška: I. DETERMINANT, II. JORD. KANONICKÝ TVAR

## ① Determinant matice

$$\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

Ukážeme si stand. definici determinantu.

Grupa je neprázdná množina $G$ společně s operací

$$\cdot \; : \; G \times G \longrightarrow G,$$

která má vlastnosti

(1) $\forall a,b,c \in G \quad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

(2) Existence jedn. prvku
$\exists e \in G \; \forall a \in G \quad a\cdot e = e\cdot a = a$

(3) $\forall a \in G \; \exists a^{-1} \in G \quad a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e$

Příklady:

① $G = \mathbb{K}\setminus\{0\}$ s operací násobení
$e = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}$

② Vekt. prostor $U$ nad $\mathbb{K}$ pouze s operací $+$
$+ : U \times U \longrightarrow U$
$e = \vec{0} \qquad u^{-1} := -u$

general linear

③ $G = GL(n,\mathbb{K}) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}),\ \det A \neq 0\}$
operace násobení matic
$e = E$, inv. matice

④ $G = O(n) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}),\ A\cdot A^T = E\}$
operace násobení, $A, B \in O(n)$, $A\cdot B \in O(n)$

(5) $G = U(n) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C}), A\cdot A^* = E\}$
operace maticového násobení

(6) $G = S_n$ = množina všech permutací množiny $\{1,2,\dots n\}$

Permutace je bijektivní zobrazení
$$\tau : \{1,2,\dots n\} \to \{1,2,\dots n\}$$
Lze zadat tabulkou

$$\begin{array}{c|cccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \tau(i) & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{3 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \quad 5 \quad 2}_{\text{permutace, jak ji známe ze střední školy}}} \end{array}$$

operace v $S_n$ je skládání zobrazení
$\pi$, $\tau$, $\pi \circ \tau$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\tau(i)$ | 4 | 2 | 1 | 3 |

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\pi(j)$ | 3 | 4 | 1 | 2 |

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\pi \circ \tau(i)$ | 2 | 4 | 3 | 1 |

Inverzní permutace

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\tau^{-1}(j)$ | 3 | 2 | 4 | 1 |

id = jednotk. prvek

Homomorfismus grup je zobrazení mezi dvěma grupami
$$f : G \to H,$$

takové, že

$$\forall a,b \in G \;:\quad f(a \underset{G}{\cdot} b) = f(a) \underset{H}{\cdot} f(b)$$

$\Rightarrow$ důsledek

$$f(e_G) = e_H$$

$$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$$

## Příklady homomorfismů grup

① $\det : GL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Cauchyova věta – det je homomorfismus z $(GL(n,\mathbb{K}), \cdot)$ do $(\mathbb{K}\setminus\{0\}, \cdot)$

② $f : U \to V$ lineární zobrazení mezi vekt. prostory je homomorfismus grup

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

$$f : (U, +) \longrightarrow (V, +)$$

Znaménko permutace $\pi : \{1, 2, .. n\} \to \{1, 2, .. n\}$

$$\operatorname{sign} \pi = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{j - i}{\pi(j) - \pi(i)}$$

$$\pi \qquad \begin{array}{ccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi(i) & 2 & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\operatorname{sign} \pi = \frac{(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)}{(4-2)(3-2)(1-2)(3-4)(1-4)(1-3)} = (-1)^4 = 1$$

$\operatorname{sign} \pi = \pm 1$ záleží na počtu záporných ve jmenovateli

Jestliže pro dvojici $i < j$, platí $\pi(i) > \pi(j)$ nazveme tuto dvojici transverse permutace $\pi$.

$$\boxed{\operatorname{sign} \pi = (-1)^{\text{počet transverzí}}}$$

$$\tau \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \underline{n} & \underline{n-1} & \underline{n-2} & \dots & 1 \end{array}$$

Počet transverzí $\quad n-1 + n-2 + n-3 + \dots + 0$

$$= \underline{(n-1+0) + (n-2+1) + \dots}$$

$$2$$

$$\frac{(n-1)n}{2} \qquad \operatorname{sign} \tau = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Znaménko permutace je homomorfismus grup

$$\operatorname{sign} : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{1,-1\}, \cdot)$$

$$\operatorname{sign}(\pi \circ \tau) = \operatorname{sign} \pi \cdot \operatorname{sign} \tau$$

Zvláštní permutací jsou transpozice $(i,j)$ ... „prohazuje" čísla $i$ a $j$

$$\begin{array}{c|ccccccccc} k & 1 & 2 & \dots & \boxed{i} & i+1 & \dots & \boxed{j} & j+1 \dots & n \\ (i,j)(k) & 1 & 2 & \dots & \boxed{j} & i+1 & \dots & \boxed{i} & j+1 \dots & n \end{array}$$

$$\operatorname{sign}(i,j) = -1 = (-1)^{(i-j)+(i-j+1)} = (-1)^{2(i-j)+1} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{array}$$

$$(5-2) + (5-2+1)$$

## Standardní definice determinantu

Nechť $A$ je matice $n \times n$ s prvky $a_{ij}$ v $\mathbb{K}$. Definujeme

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} (\operatorname{sign} \tau)\, a_{1\tau(1)}\, a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)}$$

V součinu jsou zastoupeny všechny řádky a všechny sloupce, každý právě jednou.

$2! = 2\cdot 1$ 2 sčítanci
$3! = 3\cdot 2$ 6 sčítanců
$4! = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$ sčítanců

**Věta:** Takto definovaný determinant má všechny vlastnosti uvedené v 1. semestru.

Dokažme si, že jestliže $B$ vznikne z $A$ výměnou $r$-tého a $s$-tého řádku, pak

$$\det B = -\det A.$$

Vezmeme $r = 1$, $s = 2$.  $B = (b_{ij})$, $A = (a_{ij})$

$$\det B = \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sign}\tau \; b_{1\tau(1)} b_{2\tau(2)} b_{3\tau(3)} \cdots b_{n\tau(n)}$$

$$= \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sign}\tau \; a_{2\tau(1)} a_{1\tau(2)} a_{3\tau(3)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

$$= \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sign}\tau \; \underline{a_{1\tau(2)}} a_{2\tau(1)} a_{3\tau(3)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

$\pi = \tau\circ(1,2)$

$\underline{1} \to 2 \to \underline{\tau(2)}$  $3 \to 3 \to \tau(3)$
$2 \to 1 \to \tau(1)$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \quad a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$\pi = \tau \circ (1,2)$$

$$\operatorname{sign} \pi = \operatorname{sign} \tau \cdot \underbrace{\operatorname{sign} (1,2)}_{-1} = - \operatorname{sign} \tau$$

$$= - \Big( \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \pi \quad a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \Big)$$

$$\tau \in S_n \qquad \tau \circ (1,2) \in S_n$$

$$= - \Big( \sum_{\pi \in S^n} \operatorname{sign} \pi \quad a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \Big)$$

$$= - \det A$$

## 2 Aplikace JKT

Maticová verze: Je-li $A$ matice $n \times n$ nad $\mathbb{K}$ taková, že její char. polynom má $n$ kořenů v $\mathbb{K}$ včetně násobností, pak existuje matice $J$ v JKT taková, že

$$(*) \qquad J = P^{-1} A P,$$

kde $P$ je regulární matice.

$$(*) \iff P J P^{-1} = A$$

Počítání s mocninami matice $A$

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A, \quad \ldots$$

Skaláry platí binomická věta

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + b^n$$

S maticemi taková věta obecně NEPLATÍ

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) =$$

$$= A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B$$

$$= A^2 + \underbrace{A\cdot B + B\cdot A}_{\neq} + B^2$$

$$A\cdot B + A\cdot B$$

$$2\,A\cdot B$$

Když $A, B$ komutují, binomická věta platí

$$(A+B)^n = A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \dots + B^n$$

$$\boxed{A = P J P^{-1}}$$

$$A^n = (PJ\underbrace{P^{-1})(P}_{E}J\underbrace{P^{-1})(P}_{E}J\underbrace{P^{-1})}_{E}\dots\underbrace{(P}_{E}JP^{-1})$$

$$= P\, J^n\, P^{-1} \qquad \boxed{A^n = P J^n P^{-1}}$$

Výpočet $J^n$, stačí pro Jord. buňku

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda E_k + D_k$$

$$D_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

① $(\lambda E)^n = \lambda^n E$

② $$D_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_k^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_k^k = D_k^{k+1} = \dots = D^n = 0 \qquad n \geq k$$

$$J_k^n(\lambda) = (\lambda E_k + D_k)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} E_k D_k^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} D_k^i \qquad D_k^0 = E_k$$

JKT

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{k_s}(\lambda_s)} \end{pmatrix}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} J_{k_1}^n(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}^n(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_s}^n(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

# Exponenciála z matice

A matice $n \times n$, matice $e^A$ je rovněž tvaru $n \times n$ a spočte se takto:

$$\underline{e^A} \underset{def}{=} E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots +$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

Lze ukázat, že prvky v $\underline{k}$-tém řádku a $\underline{s}$-tém sloupci řady konvergují. (absolutně)

Pro čísla $\quad \underline{e^{a+b} = e^a \cdot e^b}$

Pro matice $\quad e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ obecně,

ale pro $\underline{A \cdot B = B \cdot A}$ to platí

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \quad ( = e^B \cdot e^A)$$

Protože $\quad J_k(\lambda) = \lambda E + D_k \qquad \lambda E \cdot D_k = D_k \cdot \lambda E$

$$\Rightarrow \quad e^{J_k(\lambda)} = e^{\lambda E + D_k} = e^{\lambda E} \cdot e^{D_k}$$

$$e^{\lambda E} = E + \lambda E + \frac{\lambda^2 E^2}{2!} + \frac{\lambda^3 E^3}{3!} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^2 & & & \\ & \lambda^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \dots$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda} & & & \\ & e^{\lambda} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & e^{\lambda} \end{pmatrix} = e^{\lambda} E$$

$$e^{D_k} = E + D_k + \frac{D_k^2}{2!} + \dots \frac{D_k^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{0}{k!} + 0 \dots$$

$e^{D_k}$ je definována pomocí KONEČNÉHO součtu. SOUČTU.

Dále $\quad J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_2}(\lambda_s) \end{pmatrix}$

$e^{\lambda_1}(D_{k_1} \dots)$

$$\underline{e^{J}} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{J_{k_1}(\lambda_1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{e^{J_{ks}(\lambda_s)}} \end{pmatrix}$$ je to konečný součet

$e \doteq 2{,}71 \dots$

# Souvislost s řešením soustav lin. diferenciálních rovnic

$$x'(t) = a\,x(t)$$
$$x(0) = x_0$$

$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Řešení je $\quad x(t) = e^{at} x_0$

Soustava $n$ lin. dif. rovnic o $n$-neznámých funkcích

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \dots a_{2n} x_n(t) \\ &- - - \\ x_n'(t) &= a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) \end{aligned}$$

$x_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Maticově

$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (\mathbb{C}^n)$

$$x'(t) = A\,x(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$x_1(0) = x_{10}$$
$$x_2(0) = x_{20}$$
$$\vdots$$
$$x_n(0) = x_{n0}$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= A\,x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}}$$

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$$

$$A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ nebo } (\mathbb{C})$$

$$y'' + ay' + by = 0 \quad !$$

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = y'(t).$$

$$\underline{x_1'(t)} = y'(t) = \underline{x_2(t)}$$

$$\underline{x_2'(t)} = y''(t) = -a\,y'(t) - b\,y(t)$$
$$= \underline{-b\,x_1(t) - a\,x_2(t)}$$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} x(t)$$

$$x'(t) = Ax(t)$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

má řešení
$$x(t) = \underset{\substack{\text{matice} \\ n \times n}}{e^{At}} \underset{\text{sloupec velikosti } n}{x_0}$$

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0 = \left(E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots\right) \cdot x_0$$

Řada konverguje stejnoměrně na každém kompaktním intervalu v $t$, můžeme ji derivovat člen po členu:

$$x'(t) = \left(0 + A + \frac{A^2}{2!}2t + \frac{A^3}{3!}3t^2 + \dots\right)x_0$$

$$= A\left(E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots\right)x_0$$

$$= A \cdot \underbrace{e^{At} \cdot x_0}_{x(t)} = A \cdot x(t)$$

Pomocí exponenciály lze řešit takovéto soustavy.

$$y'(t) = J\,y(t) \qquad J \text{ JKT}$$
$$y(0) = y_0$$

řešení je $e^{Jt}\,y_0$ a to lze spočítat pomocí konečného součtu

Chceme řešit
$$x'(t) = A\,x(t)$$
$$x(0) = x_0 = P y_0$$

a víme, že
$$A = P J P^{-1} \qquad J \text{ JKT}$$

Máme, že řešení je
$$\boxed{x(t) = P\,y(t)},$$

kde
$$y'(t) = J\,y(t)$$
$$y(0) = y_0$$

$$x'(t) = \big(P\,y(t)\big)' = P\,y'(t) = P J\,y(t)$$
$$= P\underbrace{(P^{-1} A P)}_{J}\,y(t) =$$
$$= A\big(P\,y(t)\big) = A\,x(t)$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \underline{P}^{-1} J P \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det P = 1$$

$$x'(t) = A x(t)$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y'(t) = J y(t)$$

$$y(0) = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = e^{Jt} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & \\ & e^{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} t} = e^{3t} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{3t} \left( E + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & e^{3t}\cdot t \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & e^{3t}\cdot t \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & e^{3t}\cdot t \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 2e^{3t} + 4e^{3t}\cdot t \\ 4e^{3t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2e^{3t} + 4e^{3t}\cdot t \\ 2e^{3t} + 4e^{3t}\cdot t \\ -3e^{2t} + 4e^{3t} + 8e^{3t}\cdot t + 4e^{3t} \end{pmatrix}$$