13. přednáška: DŮKAZ VĚTY O JKT

Dodatek k minulé přednášce

Ukázali jsme si, že z podobnosti matic
$$A = PBP^{-1}$$
plyne podobnost
$$A^n = PB^nP^{-1}.$$
Protože e^A a e^B definujeme pomocí mocninné řady, pak odtud plyne také podobnost
$$e^A = Pe^BP^{-1}.$$

Je-li tedy J Jord. kan. tvar matice A takový, že
$$A = PJP^{-1},$$
pak řešení soustavy rovnic
$$x'(t) = Ax(t)$$
$$x(0) = x_0$$
je funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$: $x(t) = e^{At}x_0 = Pe^{Jt}P^{-1}x_0.$

Přitom e^{Jt} spočítáme pomocí reálných funkcí $e^{\lambda_i t}$ a konečného součtu matic.

Věta o JKT: Nechť $\varphi: U \to U$ je lin. operátor. Předpokládejme, že součet alg. násobností jeho vlastních čísel je roven $\dim U$. Potom v U existuje báze α taková, že
$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$
je matice v JKT. Tento tvar je určen jednoznačně,

až na pořadí buněk.

Úplný důkaz najdete v učebních materiálech v bak. práci Ivany Bachurové, zkrácenou verzi pak v textu prof. Slováka Lin. algebra v kapitole 5.

Nové pojmy Nilpotentní operátor: $\exists k \in \mathbb{N} \quad \varphi^k = 0$.

Kořenový podprostor vlastního čísla λ lineárního operátoru $\varphi : U \to U$ je vektorový podprostor

$$R_\lambda = \{ u \in U ,\ \exists k \in \mathbb{N} ,\ (\varphi - \lambda\, id)^k (u) = 0 \}$$

Vlastnosti kořenového podprostoru

1. R_λ je vektorový podprostor, $\ker (\varphi - \lambda\, id) \subseteq R_\lambda$.
2. R_λ je invariantní vůči každému lineárnímu operátoru $\psi : U \to U$, který komutuje s φ. Speciálně je invariantní vůči $\varphi - \mu\, id$
3. Je-li $\lambda \neq \mu$, pak $(\varphi - \mu\, id)/_{R_\lambda} : R_\lambda \to R_\lambda$ je izomorfismus.
4. $(\varphi - \lambda\, id)/R_\lambda : R_\lambda \to R_\lambda$ je nilpotentní.

Důkaz: (2) Nechť $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, nechť $v \in R_\lambda$, kde $(\varphi - \lambda\, id)^k(v) = 0$. Potom

$$(\varphi - \lambda\, id)^k(\psi(v)) = \psi\,(\varphi - \lambda\, id)^k(v) = \psi(0) = 0$$

Tedy $\psi(v) \in R_\lambda$.

(3) Nechť $v \in R_\lambda$ je takové, že $(\varphi - \lambda\, id)^{k-1}(v) \neq 0$ a $(\varphi - \lambda\, id)^k(v) = 0$. Potom

$$(\varphi - \mu\, id)(v) = (\varphi - \lambda\, id)(v) + (\lambda - \mu)(v).$$

Kdyby $(\varphi - \mu\, id)(v) = 0$, pak by $(\varphi - \lambda\, id)\, v = (\mu - \lambda)\, v$

$$(\varphi - \lambda\, id)^k(v) = (\varphi - \lambda\, id)^{k-1}\,(\varphi - \lambda\, id)(v) = (\varphi - \lambda\, id)^{k-1}(\mu - \lambda)\, v$$
$$= (\mu - \lambda)(\varphi - \lambda\, id)^{k-1}(v) \neq \vec{o}\,, \text{ spor.}$$

(4) R_λ má konečnou dimenzi, je tedy generován prvky $v_1, \dots, v_s$ takovými, že

$$(\varphi - \lambda\, id)^{k_i}(v_i) = 0.$$

Položme $k = \max\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$. Pak pro všechna $v \in R_\lambda$ je $v = \sum_{i=1}^{s} a_i v_i$

a $(\varphi - \lambda\, id)^k(v) = \sum_{i=1}^{s} a_i (\varphi - \lambda\, id)^k(v_i) = \sum_{i=1}^{s} a_i \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

Příklad: Nechť $\varphi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$, $\varphi(x) = Jx$, kde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & 0 & \lambda_2 & \\ & & & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$R_{\lambda_1} = [e_1, e_2, e_3, e_4]$$

$$R_{\lambda_2} = [e_5, e_6, e_7]$$

Důkaz věty o JKT má dva kroky

$\boxed{\text{1. krok}}$

Věta: Za předpokladů Jordanovy věty je

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}$$

a

$$\dim R_{\lambda_i} = \text{alg. násobnost vlastního čísla } \lambda_i$$

Definice součtu více podprostorů

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{ v_1 + v_2 + \dots + v_k \in U,\ v_i \in V_i \}$$

Součet je direktní (píšeme $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$), jestliže platí $\forall v_i \in V_i$:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = \vec{o} \Rightarrow v_1 = v_2 = \dots = v_k = \vec{o}.$$

Důkaz, že součet R_{λ_i} je direktní, indukcí podle k (počet R_{λ_i}).

Pro $k=1$ zřejmé. Nechť $R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_{k-1}}$ je direktní. Vezmeme

$$v_i \in V_i \quad , \quad 1 \le i \le k$$

a nechť

$$(*) \qquad v_1 + v_2 + \dots + v_k = \vec{o}$$

Aplikujme na tuto rovnici operátor

$$(\varphi - \lambda_k \, id)^r$$

takový, že $(\varphi - \lambda_k \, id)^r v_k = \vec{o}$. Potom

$$\underbrace{(\varphi - \lambda_k \, id)^r (v_1)}_{u_1 \in R_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{(\varphi - \lambda_k \, id)^r (v_{k-1})}_{u_{k-1} \in R_{\lambda_{k-1}}} = \vec{o}$$

Tedy na sumu $u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} = \vec{o}$, kde $u_i \in R_{\lambda_i}$ aplikujeme ind. předpoklad a dostaneme

$$u_1 = u_2 = \dots = u_{k-1} = \vec{o}.$$

Protože $(\varphi - \lambda_k \, id)^r$ je izomorfismus na prostorech R_{λ_i} , $1 \le i \le k-1$, je rovněž

$$v_1 = v_2 = \dots = v_{k-1} = \vec{o}$$

a odtud i $v_k = \vec{o}$. Dokázali jsme, že součet $R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_k}$ je direktní.

Důkaz, že součet $R_{\lambda_1}+\dots+R_{\lambda_k}=U$ se dělá pomocí věty:

Pomocná věta: Za předpokladů Jordanovy věty existuje v U báze B taková, že

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & * & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

je horní trojúhelníková matice.

Její důkaz je založen na pojmu kvocient vektorového prostoru (viz v algebře pojem faktorová grupa). Pouze naznačíme.

Nechť U je vekt. prostor a $V \subseteq U$ jeho podprostor. Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor a V je jeho invariantní podprostor. Definujeme

(1) vektorový prostor

$$U/V = \{ u+V ,\ u \in U \}$$ množina podmnožin

s operacemi

$$(u_1+V)+(u_2+V) := (u_1+u_2)+V$$

$$a(u+V) := au+V .$$

(2) Lineární operátor $\tilde{\varphi} : U/V \longrightarrow U/V$

$$\tilde{\varphi}(u+V) = \varphi(u) + V .$$

Důkaz pomocné věty: Indukcí podle $\dim U = n$.

Nechť věta platí pro prostory dimenze $\leq n-1$.
Pro $n=1$ evidentně platí.

Nechť $\varphi : U \to U$. φ má vlastní číslo λ_1 s vlastním vektorem v_1. Položme
$V = [v_1]$, $\tilde{\varphi} : U/V \longrightarrow U/V$.
$U/V = U/[v_1]$ má dimenzi $n-1$.
Nechť $\alpha = (v_1, u_2, \ldots u_n)$ je nějaká báze prostoru U. Pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & D \\ \hline 0 & \\ 0 & C \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$$

Char. polynom φ je roven $(\lambda_1 - \lambda)\det(C - \lambda E)$.
Dále $\tilde{\varphi}$ má v bázi
$\tilde{\alpha} = (u_2 + V, u_3 + V, \ldots, u_n + V)$
matici

$$(\tilde{\varphi})_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}} = C .$$

Proto $\det(C - \lambda E)$ má součet alg. násobností kořenů roven $n-1$. Na $\tilde{\varphi} : U/V \to U/V$ můžeme aplikovat indukční předpoklad.

Proto existuje báze prostoru U/V

$$\tilde{\beta} = (v_2+V,\ v_3+V,\ \dots,\ v_n+V)$$

taková, že

$$(\tilde{\varphi})_{\tilde{\beta},\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} \lambda_{i_2} & & & * \\ & \lambda_{i_3} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

Pak $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je báze prostoru U a platí

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_{i_2} & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}.$$

∎

Důkaz, že $R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_k} = U$. Především musí být, že plyne z $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}}_{a}^{a} = 0$.

$\dim R_{\lambda_i}$ = počet λ_i na diagonále = alg. nás. λ_i.

Proto

$$\dim(R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \dots \oplus R_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^{k} \dim R_{\lambda_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \text{alg. nás. } \lambda_i = n.$$

Tedy

$$R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} \subseteq U$$

a

$$\dim(R_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}) = \dim U.$$

Proto

$$R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} = U.$$

$\boxed{\text{2. krok}}$

Budeme se zabývat pouze operátorem $\varphi - \lambda_i id$ na R_{λ_i}. Označme

$$\psi = \varphi - \lambda_i id \quad , \quad R_{\lambda_i} = V .$$

Platí, že

$$\psi^r = 0$$

pro vhodné r, tedy ψ je <u>nilpotentní</u>.

<u>Cyklický operátor</u>

Operátor $\psi : V \longrightarrow V$ je cyklický, jestliže existuje báze $B = (v_1, v_2, \dots v_s)$ prostoru V taková, že

$$\psi(v_1) = \vec{o}, \quad \psi(v_2) = v_1, \quad \psi(v_3) = v_2, \dots , \quad \psi(v_s) = v_{s-1}$$

($v_1, v_2, \dots v_s$ je řetězec pro vl. číslo 0!).

Speciálně, každý cyklický operátor je nilpotentní.

<u>Věta:</u> Nechť $\psi : V \longrightarrow V$ je nilpotentní. Pak existuje rozklad prostoru V na direktní součet invariantních podprostorů

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_p$$

takový, že ψ / V_i je cyklický.

V každém V_i vezmeme příslušnou cyklickou bázi. Dohromady dávají bázi B a platí

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & & & 0 \\ & J_{k_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_p}(0) \end{pmatrix}$$

Důkaz existenční části věty o JKT pomocí předchozí věty:

Platí, že v R_{λ_i} máme bázi B_i a

$$(\varphi - \lambda_i\, id)_{B_i, B_i} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & & & 0 \\ & J_{k_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_p}(0) \end{pmatrix}$$

Tedy

$$(\varphi)_{B_i B_i} = (\varphi - \lambda_i id)_{B_i, B_i} + (\lambda_i id)_{B_i B_i}$$

$$= \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_i) & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_p}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Uděláme-li to pro všechny kořenové podprostory, dostaneme bázi

$$\alpha = (B_1, B_2, \dots, B_k) \quad \text{a} \quad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = J \text{ v JKT.}$$

Důkaz věty o nilpotentním operátoru

- Nechť $\psi^s = 0$ na V.

  $0 = \operatorname{im} \psi^s \subseteq \operatorname{im} \psi^{s-1} \subseteq \dots \subseteq \operatorname{Im} \psi^2 \subseteq \operatorname{Im} \psi \subseteq \operatorname{Im} \mathrm{id} = V$

  $0 = P_s \subsetneq P_{s-1} \subsetneq \qquad \subsetneq P_2 \subsetneq P_1 \subsetneq P_0$

  Nikde nenastane rovnost! Z $P_{i+1} = P_i \neq 0$ plyne $P_s = P_{s-1} = \dots = P_{i+1} = P_i \neq 0$.

- Vyberme bázi P_{s-1} $e_1^{s-1}\ e_2^{s-1} \dots e_{\ell_1}^{s-1}$

  Jejich obrazy v ψ jsou nulové. Vezmeme vektory $e_1^{s-2}, e_2^{s-2}, \dots, e_{\ell_1}^{s-2}$ takové, že

  $$\psi(e_i^{s-2}) = e_i^{s-1}$$

  Není těžké dokázat, že

  $$e_1^{s-1}, e_2^{s-1}, \dots, e_{\ell_1}^{s-1}, e_1^{s-2}, e_2^{s-2}, \dots, e_{\ell_1}^{s-2}$$

  jsou lineárně nezávislé. Doplníme je na bázi celého P_{s-2} vektory

  $$\bar{e}_{\ell_1+1}^{s-2}, \bar{e}_{\ell_1+2}^{s-2}, \dots, \bar{e}_{\ell_2}^{s-2}$$

  Platí $\psi(\bar{e}_j^{s-2}) = \sum_i a_i e_i^{s-1}$. Když uděláme modifikaci

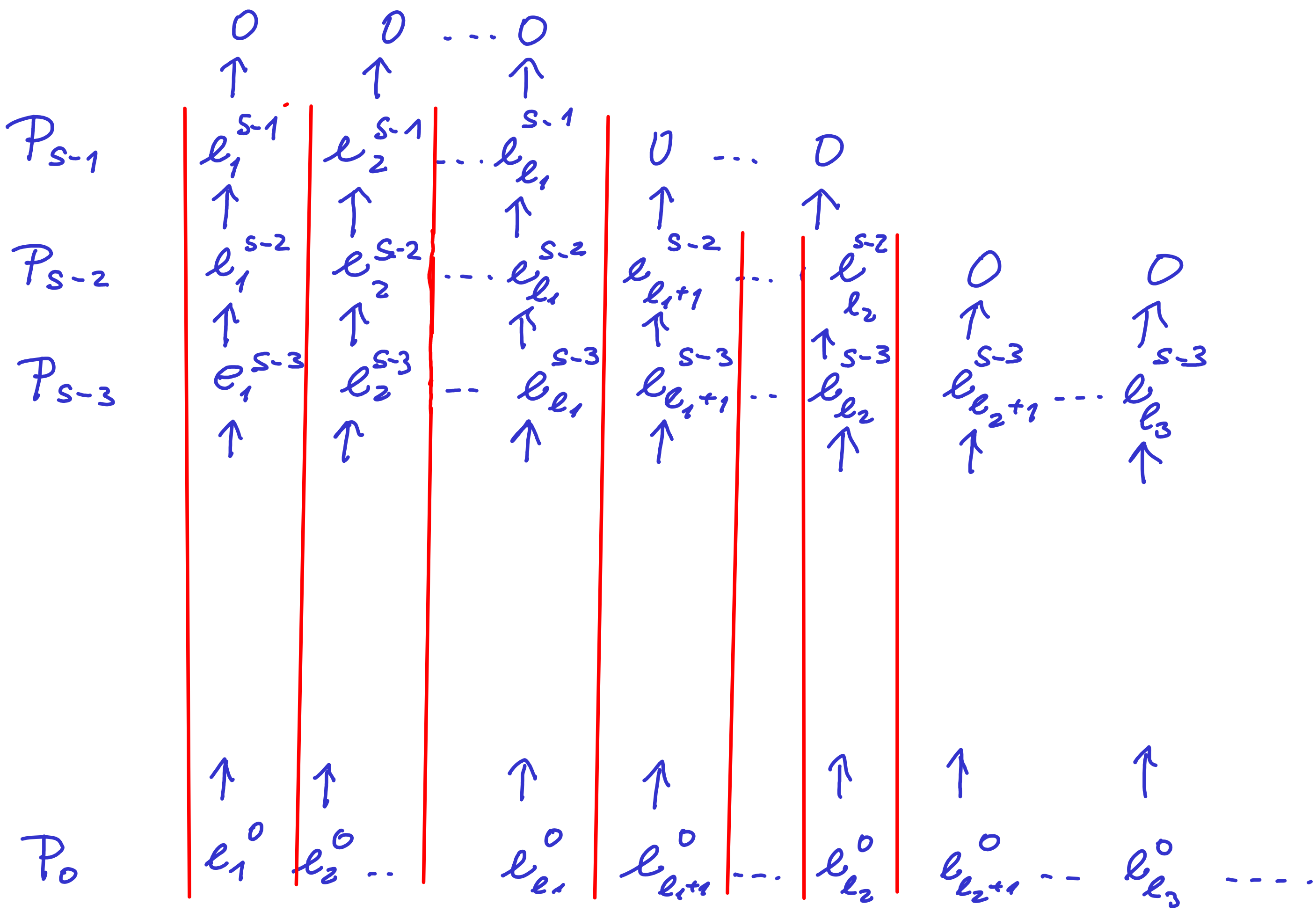
  $$e_j^{s-2} = \bar{e}_j^{s-2} - \sum_i a_i e_i^{s-2}$$

  dostaneme novou bázi P_{s-2}

$e_1^{s-1}, \dots, e_{l_1}^{s-1}, e_1^{s-2}, \dots, e_{l_1}^{s-2}, e_{l_1+1}^{s-2}, \dots, e_{l_2}^{s-2}$

takovou, že $\varphi(e_j^{s-2}) = \vec{o}$ $\quad l_1+1 \le j \le l_2$.

(Není těžké to dokázat!) Takto pokračujeme dále. Dostáváme báze prostorů $P_{s-1}, P_{s-2}, P_{s-3}, \dots P_0 = V$



$V_1 \quad V_2 \dots V_{l_1}$

$V_1 = [e_1^0, e_1^1, \dots e_1^{s-1}]$ atd.

Tím dostaneme rozklad na podprostory V_i na nichž je operátor φ cyklický.

Jednoznačnost JKT.

Stačí ukázat, že počet buněk velikosti q pro vlastní číslo λ nezávisí na volbě báze v R_λ.

Podívejme se na tabulku na předchozí straně:

Počet buněk velikosti $\underline{s}$ je $l_1 = \dim P_{s-1}$
$= \dim \operatorname{Im} \psi^{s-1}$

Počet buněk velikosti $\underline{s-1}$ je $l_2 - l_1 =$
$= \dim P_{s-2} - 2\dim P_{s-1}$

Počet buněk velikosti $\underline{s-2}$ je $l_3 - l_2 =$
$= \dim P_{s-3} - 2\dim P_{s-2} + \dim P_{s-1}$

Přitom $\dim P_{s-i} = \dim \operatorname{im} \psi^{s-i}$ závisí pouze na ψ.