

Euklidovska geometrie II

Příklad: V \mathbb{R}^4 je dán bod $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Spejtkáme jeho vzdálenost od nadroviny

$$\mathcal{N} = \{ y \in \mathbb{R}^4, ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 + l = 0 \}$$

kde $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$.

Nadrovina v \mathbb{R}^m je $(m-1)$ -rozměrný afinní podprostor v \mathbb{R}^m .

Podle naší věty o vzdálenosti bodu A od nadroviny \mathcal{N} platí, že $B \in \mathcal{N}$, je

$$\text{dist}(A, \mathcal{N}) = \| P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A-B) \|$$

Spejtkáme kuto kolmou projekci množiny bod $B \in \mathcal{N}$.

(2)

Předpokládejme, že $d \neq 0$.

$$B = \left(0, 0, 0, -\frac{e}{d} \right)$$

$$Z(\lambda) : ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 = 0$$

$$\begin{aligned} \dim Z(\lambda) &= \dim \mathbb{R}^4 - h(\text{matrix}) \\ &= 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

$Z(\lambda)^\perp$ obsahují vektor
 (a, b, c, d)

$$\dim Z(\lambda)^\perp = 1$$

$$\left\langle (a, b, c, d), (y_1, y_2, y_3, y_4) \right\rangle = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 = 0$$

$(y_1, y_2, y_3, y_4) \in Z(\lambda)$

Obraťme $n = (a, b, c, d)$... je to každý vektor $Z(\lambda)^\perp$.

Správíme halmen protože $A - B = \left(x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{e}{d} \right)$

do přírody $[n]$.

$$P(A - B) = \alpha n \quad (A - B) - \alpha n \perp n$$

$$\langle A - B, n \rangle - \alpha \langle n, n \rangle = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle A-B, m \rangle}{\langle m, m \rangle} = \frac{x_1 a + x_2 b + x_3 c + d x_4 + e}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad (3)$$

$$\|P_{Z(m)}(A-B)\| = \|\alpha m\| = |\alpha| \cdot \|m\| = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

Odchytky apimnich podmereni

Opalerasimi: nichel dva nucheni $m, n, m \neq \vec{0}, n \neq \vec{0}$

π nichel $\alpha \in [0, \sqrt{c}]$

$$\cos \alpha = \frac{\langle m, n \rangle}{\|m\| \|n\|}$$

$$-1 \leq \frac{\langle m, n \rangle}{\|m\| \|n\|} \leq 1$$

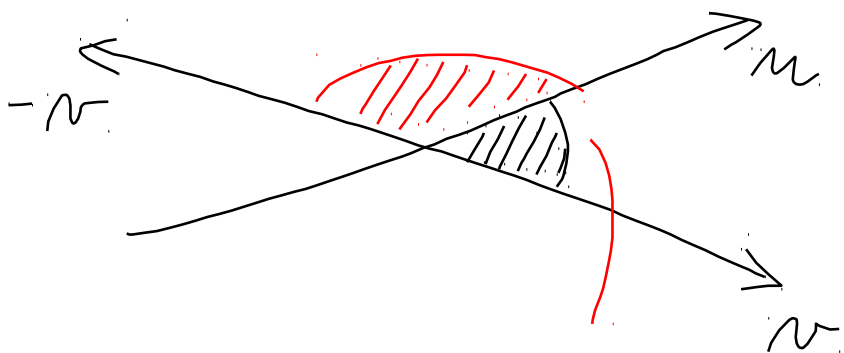
Odchytka shu primels $[m], [n], m \neq \vec{0}, n \neq \vec{0}$

(4)

$\angle([u], [v])$ nihel v intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\cos(\angle([u], [v])) = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|}$$

odchyhan u a v .



odchyhan u a $-v$
 $[u], [v]$.

$$\angle([u], [v]) = \angle(u, v)$$

$$\begin{aligned} \angle([u], [v]) &= \angle([u], [-v]) \\ &= \frac{|\langle u, -v \rangle|}{\|u\| \|-v\|} = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \end{aligned}$$

(+) $\angle(u, -v)$

Prile kalma' meyhice pi nei'karn' odchytele

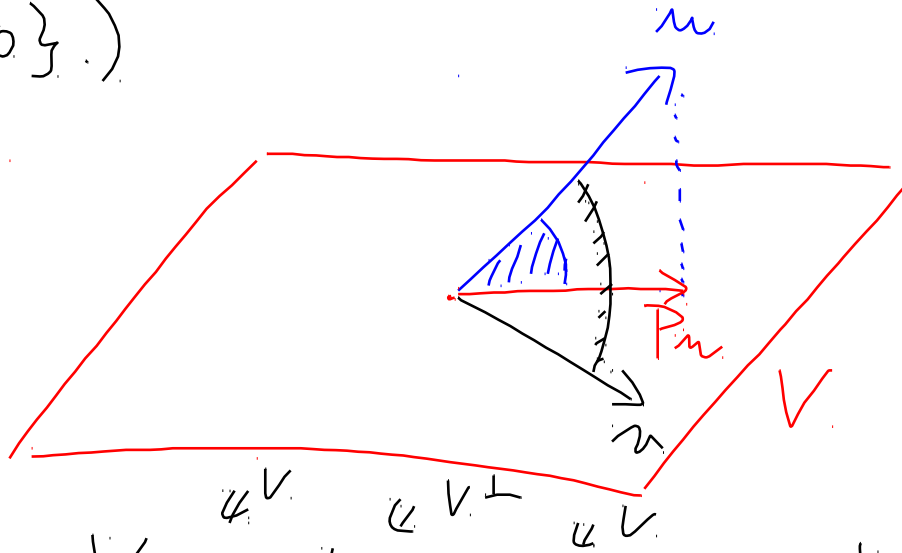
Veita: Necht U je vekt. prvka se stava' minim' soucinem a V me'jaly' p'ho vektoru a P kalma' meyhice da V . Necht $u \in U$ je li'kovaly' a Pu je p'ho kalma' meyhice da V . Potom Pu je az' na' menubary'.

(5)

našobek jediný vektor $n \in V$ a plátna

$$\frac{\|P_n\|}{\|n\|} = \max_{r \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle n, r \rangle|}{\|n\| \|r\|} = \max_{r \in V \setminus \{0\}} \left(\cos(\angle([n], [r])) \right)$$

(když se minimalizuje úhel mezi $[n]$ a $[r]$, kde $r \in V \setminus \{0\}$.)



$$\frac{|\langle n, n \rangle|}{\|n\| \|n\|} = \frac{|\langle P_n + (n - P_n), n \rangle|}{\|n\| \|n\|} = \frac{|\langle P_n, n \rangle|}{\|n\| \|n\|} \stackrel{\text{Cauchy-}}{\leq} \frac{\|P_n\| \|n\|}{\|n\| \|n\|} = \frac{\|P_n\|}{\|n\|}$$

Bornův a Cauchyho nerovnosti
nastane pouze pro n a P_n k'u. p'ímě.

(6)

Pomocí této věty můžeme mě odchytku pírůky a podprostoru.

Definice odchytky dvou afinních podprostorů M a N

$$\textcircled{1} \quad \delta(M, N) = \delta(Z(M), Z(N))$$

$\textcircled{2}$ Necht' $V, W \subseteq U$, $V \cap W = \{0\}$. Pak

$$\delta(V, W) = \min_{\substack{v \in V \setminus \{0\} \\ w \in W \setminus \{0\}}} \delta(v, w)$$

$\textcircled{3}$ Jestliže $V, W \subseteq U$ a $V \cap W \neq \{0\}$, pak

$$\delta(V, W) = \delta(V \cap (V \cap W)^\perp, W \cap (V \cap W)^\perp)$$

proto je afinnější podle (2), neboť

$$(V \cap (V \cap W)^\perp) \cap (W \cap (V \cap W)^\perp) = (V \cap W) \cap (V \cap W)^\perp = \{0\}$$

(7)

Prüfblad $U = \mathbb{R}^4$

$$M = (3, 0, 1, 2) + [e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3]$$

$$N = (2, 3, 4, 5) + [e_2 + e_4, e_2 + e_3 + e_4]$$

$$Z(M) \cap Z(N) = [e_3]$$

$$(Z(M) \cap Z(N))^\perp = [e_1, e_2, e_4]$$

$$Z(M) \cap (Z(M) \cap Z(N))^\perp = [e_1 + e_2]$$

$$Z(N) \cap (Z(M) \cap Z(N))^\perp = [e_2 + e_4]$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\angle(m, n)) &= \cos(\angle[l_1+l_2, l_2+l_4]) = \frac{|\langle l_1+l_2, l_2+l_4 \rangle|}{\|l_1+l_2\| \|l_2+l_4\|} \\
 &= \frac{\langle l_2, l_2 \rangle}{\sqrt{1^2+1^2} \sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{2} \quad \angle(m, n) = \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Dodatek k prostorům se skal. součinem

Ortonormalní báze v reálných prostorech mají "hebe" vlastnosti:

Věta: Necht' U je reálný prostor s skalárním součinem nad \mathbb{C} (nebo \mathbb{R}).

Necht' $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je ortonormalní báze prostoru U . Potom

(9)

(1) sarradvice kasdeho vektore u v na n α lse qorital yodmoduri nemari shala'imiko ra'icim:

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} \langle u, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle \\ \langle u, u_3 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, u_n \rangle \end{pmatrix}$$

(2) na libovolne dva vektory $u, v \in U$ kabene, re $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\text{ji } \langle u, v \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n. \quad (*)$$

Dimendeke: Kaidy' vekt. peker U naad \mathbb{C} (naba \mathbb{R}) dimense n ji isomafni ρ \mathbb{C}^n (naba \mathbb{R}^n) re madu shala'imim ra'icimem.

Isomafimms ji da'u solhasemim $()_\alpha : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ (naba \mathbb{R}^n)

kde α ji ni'jila' otovama'ku' base. Pi'kom plaki'

(10)

$$\langle u, v \rangle_u = \langle (u)_\alpha, (v)_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

Toto je rovnice (*).

Důkaz rovnice: Necht $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$.

Vynásobením této rovnice skalární vektoru u_j dostaneme

$$\begin{aligned} \langle u, u_j \rangle &= \langle x_1 u_1, u_j \rangle + \dots + \langle x_j u_j, u_j \rangle + \dots + \langle x_n u_n, u_j \rangle \\ &= x_1 \underbrace{\langle u_1, u_j \rangle}_0 + \dots + x_j \underbrace{\langle u_j, u_j \rangle}_1 + \dots + x_n \underbrace{\langle u_n, u_j \rangle}_0 \\ &= \underline{x_j} \end{aligned}$$

Pro $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ a $v = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$ je

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n y_j u_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y_j} \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{=1}$$

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

Lineární operátor (transformace, endomorfismus)

je lineární zobrazení $\varphi: \underline{U} \rightarrow \underline{U}$.

Invariantní podprostor lineárního operátoru $\varphi: U \rightarrow U$ je
některý podprostor $V \subseteq U$ takový, že
$$\varphi(V) \subseteq V.$$

Nejtěsnější podprostor $\neq \{0\}$ a U je řadu invariantních a nanejvýše
je minimální invariantní podprostor. Nám smákně je
pro daný operátor $\varphi: U \rightarrow U$ najít rozklad prostoru U na
direktní součet invariantních podprostorů V_i

$$U = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$$

a platilo by $\varphi(V_i) \subseteq V_i$. Tím se nám nyní zjednoduší řešení.

(12)

operátorem sjednotivosti.

Najdete φ najít rozklad na podprostoru dimenze 1.Na nich φ púrohi jako násobení skalárem.

Příklad $U = \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2 \right]$$

 φ invariantní podprostor

$$\varphi(v_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 \in V$$

$$\varphi(v_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 \in V$$

$$\begin{aligned} \varphi(av_1 + bv_2) &= \\ &= a\varphi(v_1) + b\varphi(v_2) \in V \end{aligned}$$

\uparrow \quad \uparrow
 V \quad V

$$\varphi(V) \subseteq V$$

Nutně
znát

(14)

$$(\varphi(m))_{\alpha} = (\varphi)_{\alpha, \alpha} \cdot (m)_{\alpha}$$

$$(m_1)_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lze znázornit jako komutativní diagram:

$$\begin{array}{ccc} \overset{m}{U} & \xrightarrow{\varphi} & \overset{\varphi(u)}{U} \\ \downarrow (\cdot)_{\alpha} & & \downarrow (\cdot)_{\alpha} \\ \mathbb{K}^m & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}^m \\ (m)_{\alpha} \cdot x & \longmapsto & (\varphi)_{\alpha, \alpha} \cdot x \end{array}$$

Zpět k našemu příkladu

$$U = \mathbb{R}^4, \varphi(x) = Ax$$

$$\mathcal{E} = (e_{11}, e_{21}, e_{31}, e_{41}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right)$$

$$V = [v_1, v_2]$$

$$(\varphi)_{\mathcal{E}, \mathcal{E}} = A$$

(15)

Uzskaites φ \mathbb{R}^4 bāzē $B = [v_1, v_2, e_3, e_4]$

$$(\varphi)_{B,B} = \left((\varphi(v_1))_B \quad (\varphi(v_2))_B \quad (\varphi(e_3))_B \quad (\varphi(e_4))_B \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mē pārbaudīsim

$$\varphi(v_1) = v_1 + 2v_2 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\varphi(v_2) = -2v_1 + v_2 = (-2)v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

Tagad

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 + 4e_3 - e_4 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 4 \cdot e_3 + (-1) \cdot e_4$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -3v_1 + 2v_2 + 1 \cdot e_3 + 4e_4$$

↙ mē pārbaudīsim
 kādā
 kādā
 mē pārbaudīsim

(16)

Vēta medli $\varphi: U \rightarrow U$ a $V \subseteq U$ ir invariantu podmoda.

Medli v_1, v_2, \dots, v_k ir bāze V a medli $B = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$

ir bāze U . Pask

$$(\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} k \\ \} n-k \end{array} \right\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n-k}$

1. rāpēc

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$$

1. rāpēc matice ir $(\varphi(v_1))_B$

$$\varphi(v_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{k1}v_k + 0 \cdot v_{k+1} + \dots + 0 \cdot v_n$$

