

Seminář z matematiky II – jaro 2023 – 6. písemka

1. (10 bodů) Uvažujme těleso $\mathcal{F} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \odot)$, kde $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ je standardní komutativní grupa se sčítáním po složkách a operace \odot je definována předpisem

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac - 2bd, ad + bc + 2bd).$$

Určete, pro která $k \in \mathbb{Z}$ je $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \cdot, \square)$ vektorový prostor nad \mathcal{F} , kde $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \cdot)$ je standardní komutativní grupa s násobením po složkách a operace $\square: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ je definována předpisem

$$(a, b) \square (r, s) = (r^{a-b} \cdot s^{kb}, r^b \cdot s^{a+3b}).$$

2. Prémiový příklad (3 body) Ukažte, že \mathcal{F} je opravdu těleso, a určete dimenzi prostoru \mathcal{V} .