2. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 5. 3. 2024

1. Pro vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ ve vektorovém prodstoru U nad $\mathbb{K}$ definujeme tyto dvě množiny:

(1) $[u_1, u_2, \dots, u_k] = \{a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k \in U; a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}\}$.

(2) $\langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle$ je nejmenší vektorový podprostor v U obsahující vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Doakžte, že

$$[u_1, u_2, \dots, u_k] = \langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle.$$

2. Uvažujme opět vektorový prostor U a v něm dva vektorové podprostory V a W. Dokažte, že následující dva výroky jsou ekvivalentní.

(1) $V \cap W = \{0\}$.

(2) $(\forall u \in V + W)(\exists! v \in V)(\exists! w \in W)(u = v + w)$.

3. Definujte infimum množiny reálných čísel. Pomocí infima ukažte, že každá klesající posloupnost kladných čísel má limitu.

4. Nechť f a g jsou reálné funkce takové, že pro $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Dokažte z definice limity, že

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \infty.$$

5. Je-li $\varphi : U \to V$ prosté lineární zobrazení, pak platí, že z lineární nezávislosti vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$ v U, plyne lineární nezávislost vektorů $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k)$ v prostoru V. Dokažte.