4. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 19. 3. 2024

1. Nechť funkce $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová. Pak rovněž funkce $1/f(x)$ je spojitá v každém bodě intervalu (a,b). Dokažte. Před důkazem spojistostii v bodě $c \in (a,b)$ dokažte

$$(\exists K > 0)\ (\exists \delta > 0)\ \forall x \in (c-\delta, c+\delta)\ |f(x)| > K.$$

Budete to potřebovat.

2. Nechť $[a_n, b_n]$ pro $n \in \mathbb{N}$ je systém do sebe vložených intervalů

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n].$$

Pomocí suprema vhodné množiny dokažte, že průnik všech těchto intervalů je neprázdný, tj.

$$\cap_n^\infty [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Ukažte, že tvrzení neplatí pro otevřené intervaly.

3. Nechť $U = \{a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dokažte, že to je vektorový prostor nad racionálními čísly $\mathbb{Q}$, najděte nějakou jeho bázi a dokažte, že je to skutečně báze.

4. Cauchyova nutná a postačující podmínku pro existenci vlastní limity $\lim_{x\to a} f(x)$ je

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x, y \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\})\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(1) Dokažte, že je to podmínka nutná.
(2) Pomocí této podmínky dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

neexistuje.

5. Nechť U je vektorový prostor se skalárním součinem a nechť $P : U \to U$ je kolmá projekce na podprostor $V \subset U$. Dokažte, že

(1) $P \circ P = P$ (symbol $\circ$ znamená skládání zobrazení).
(2) Pro všechna $u, v \in U$ platí

$$\langle Pu, v\rangle = \langle u, Pu\rangle.$$

($\langle u, v\rangle$ značí skalární součin.)