5. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 2. 4. 2024

1. Napište si přesná znění těch tvrzení, která jsme v semináři dokázali na základě axiomu o supremu. Některá z nich můžete použít při řešení následujících úloh.

2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme uzavřený interval $[c_n, d_n]$. Nechť

$$\cap_{n=1}^{\infty}[c_n, d_n] = \emptyset.$$

Potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\cap_{n=1}^{k}[c_n, d_n] = \emptyset.$$

Dokažte.

3. Cauchyova nutná a postačující podmínku pro existenci vlastní limity posloupnosti $\lim_{n\to\infty} x_n$ říká

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists p \in \mathbb{N})\ (\forall k, n \geq p)\ |x_n - x_k| < \varepsilon.$$

(1) Dokažte, že je to podmínka nutná.
(2) Dokažte, že je to podmínka postačující.

4. Nechť spojitá funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má derivaci ve všech bodech otevřeného intervalu (a, b) a $f(a) = f(b)$. Dokažte, že pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že derivace funkce f v bodě c je

$$f'(c) = 0.$$

Návod: Pokud f není na $[a, b]$ konstantní, uvažujte bod, v němž nabývá svého maxima nebo minima.

5. Řekneme, že reálná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lokálně konstantní v bodě c, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že f je konstantní na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$. Dokažte, je-li f lokálně konstantní v každém bodě, je konstantní na celém $\mathbb{R}$.
Návod: Ukažte, že f je konstantní na každém uzavřeném intervalu $[a, b]$.