6. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 9. 4. 2024

Důkazy vět, které znáte z prvního semestru lineární algebry.

1. Ve vektorovém prostoru U nad $\mathbb{K}$ máme posloupnost lineárně nezávislých vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ a další posloupnost vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Dokažte indukcí podle n, že z vektorů druhé posloupnosti lze vybrat několik vektorů $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_p}$ tak, že platí

(1) Vektory $v_1, v_2, \ldots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_p}$ jsou lineárně nezávislé.
(2) Pro lineární obaly platí

$$[v_1, v_2, \ldots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_p}] = [v_1, v_2, \ldots, v_k, u_1, u_2, \ldots, u_n].$$

2. Pomocí předchozího tvrzení dokažte: Je-li U konečně generovaný vektorový prostor, pak lze každý seznam lineárně nezávislých vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ doplnit na bázi.

3. Dokažte Steinitzovu větu: Nechť ve vektorovém prostoru U platí, že $[v_1, v_2, \ldots, v_k] \subseteq [u_1, u_2, \ldots, u_n]$. Jestliže jsou vektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárně nezávislé, pak $k \leq n$.
Návod: Místo implikace dokazujte její obměnu.

4. Pomocí Steinitzovy věty dokažte:

(1) Každé dvě báze v konečně generovaném vektorovém prostoru mají stejný počet vektorů. (To umožňuje definovat korektně dimenzi.)
(2) Podprostor V konečně generovaného podprostoru U je konečně generovaný a $\dim V \leq \dim U$.

5. Pomocí tvrzení úloh 2 a 4(2) dokažte, že pro konečně dimenzionální prostor U a lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ platí

$$\dim U = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi.$$