7. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 16. 4. 2024

1. Pomocí vět dokazovaných v minulé (tj. 6.) domácí úloze dokažte:

(a) Je-li V podprostor prostoru U konečné dimenze a $\dim V = \dim U$, pak $V + U$.

(b) Pro vektorové podprostory U a V v konečně generovaném prostoru Z platí

$$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim U + \dim V.$$

2. Pomocí věty o střední hodnotě
Je-li $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá a má derivaci na (a, b), pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

dokažte:
Má-li funkce $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ kladnou derivaci v každém bodě, je na (c, d) rostoucí.

3. Dokažte, že podmnožina reálných čísel

$$\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

s operacemi sčítání a násobení racionálních čísel je těleso (tj, $\mathbb{K}$ s operací sčítání je komutativní grupa, $\mathbb{K} - \{0\}$ s operací násobení je komutativní grupa).

4. Nalezněte nějakou bázi a určete dimenzi podprostoru generovaného množinou $\{\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Vysvětlení: Jde vektorový prostor $V = \{p\sqrt{3} + q\sqrt{5} + r\sqrt{6}; p, q, r \in \mathbb{K}\}$ nad $\mathbb{K}$.

5. Dokažte, že každá neklesající funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má pouze spočetně mnoho bodů, v nichž není spojitá.
Návod: Každému bodu nespojitosti a přiřaďte neprádný interval

$$\left(\lim_{x \to a_-} f(x), \lim_{x \to a_+} f(x) \right).$$