8. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 16. 4. 2024

1. Buď V vektorový prostor, $v_1, \dots, v_n \in V$ vektory a $\varphi\colon V \to V$ lineární zobrazení. Přímo z definice lineární nezávislosti dokažte, že jsou-li vektory

$$v_1 - \varphi(v_1), v_2 - \varphi(v_2), \dots, v_n - \varphi(v_n)$$

lineárně nezávislé, tak i vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé. Ukažte, že opačná implikace obecně neplatí.

2. Zopakujme si definici stejnoměrné spojitosti funkce f na intervalu I: Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá na I, jestliže

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I\ (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

Z této definice dokažte:

(1) Funkce $f(x) = x^2$ je stejnoměrně spojitá na každém intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
(2) Funkce $f(x) = x^2$ není stejnoměrně spojitá na intervalu $(1, \infty)$.

3. Pomocí věty o střední hodnotě dokažte: Je-li $f : I \to \mathbb{R}$ funkce, která má na intervalu I omezenou první derivaci v každém bodě, pak je f stejnoměrně spojitá na intervalu I.

4. Má-li funkce $f : I \to \mathbb{R}$ v každém bodě intervalu I derivaci a pro $a < b$ platí $f'(a) < 0 < f'(b)$, pak existuje $c \in [a, b]$ takové, že $f'(c) = 0$.