9. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 30. 4. 2024

1. Dokažte, že každá spojitá funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá. Ukažte na protipříkladu, že tvrzení neplatí pro otevřený interval (a, b).

Návod. Můžete to dělat sporem (nebo nepřímo) s použitím faktu, že každá posloupnost v intervalu $[a, b]$ má konvergentní podposloupnost s limitou v $[a, b]$.

2. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární samoadjungovaný operátor takový, že $\varphi \circ \varphi = \varphi$, tj. $\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$ pro všechny vektory $u \in U$. Dokažte, že φ je kolmá projekce na nějaký podprostor prostoru U.

3. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární samoadjungovaný operátor takový, že $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$, tj. $\varphi(\varphi(u)) = u$ pro všechny vektory $u \in U$. Dokažte, že φ je symetrie podle nějakého podprosoru prostoru U.

4. Nechť K_1, K_2, K_3, K_4 jsou konvexní množiny v rovině. Jestliže každé tři z nich mají neprázdný průnik, pak průnik všech čtyř je neprázdný.
Na základě tohoto tvrzení, dokažte analogické tvrzení pro $n \geq 4$ konvexních množin.