

Jméno:

| 1 | 2 | 3 | Celkem |
|---|---|---|--------|
| | | | |

3. písemka ze semináře z matematiky II

1. (4 body) Necht' posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ leží celá v intervalu $[a, b]$. Dokažte, že existuje podposloupnost $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, která je konvergentní a její limita leží v intervalu $[a, b]$.

Návod. Můžete použít tvrzení o průniku uzavřených intervalů.

2. (4 body) Řekneme, že reálná funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je lokálně rostoucí v bodě c , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že f je rostoucí na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$. Dokažte, je-li f lokálně rostoucí v každém bodě, je rostoucí na celém \mathbb{R} . (3 body)

Návod: Ukažte, že f je rostoucí na každém uzavřeném intervalu $[a, b]$.

Ukažte na příkladu, že tvrzení neplatí, pokud budeme předpokládat pouze, že f je lokálně rostoucí zprava, tj. pro každé c existuje $\delta > 0$ tak, že f je rostoucí na $[c, c + \delta)$. (1 bod)

3. (4 body) Nalezněte nějakou bázi a určete dimenzi podprostoru generovaného množinou

$$\left\{ \frac{1}{x}, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x^2-x} \right\}$$

ve vektorovém prostoru $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ nad \mathbb{R} .