

Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Celkem	11	12

Vstupní písemka ze semináře z matematiky II, únor 2024

Max. počet bodů 40

- 1a. Napište definici lineární nezávislosti vektorů  $v_1, v_2, \dots, v_k$  ve vektorovém prostoru  $V$ . (1 bod)
- 1b. Mějme lineární zobrazení  $\varphi : U \rightarrow U$  a vektory  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ . Dokažte: Jsou-li vektory  $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k)$  lineárně nezávislé, jsou lineárně nezávislé i vektory  $u_1, u_2, \dots, u_k$ . (3 body)
- 2a. Napište definici lineárního zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory. (1 bod)
- 2b. Napište jak vypadají všechna lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^k$ . (3 body)
- 3a. Napište definici jádra lineárního zobrazení a definici podprostoru ve vektorovém prostoru. (2 body)
- 3b. Dokažte: Jádro  $\ker \varphi$  lineárního zobrazení  $\varphi : U \rightarrow V$  je vektorový podprostor ve  $V$ . (2 body)
4. Dokažte: Lineárního zobrazení  $\varphi : U \rightarrow V$  je prosté, právě když jeho jádro  $\ker \varphi$  obsahuje pouze nulový vektor. (4 body)
- 5a. Napište definici lineárního obalu vektorů  $u_1, u_2, \dots, u_k$  ve vektorovém prostoru  $U$ . (1 bod)
- 5b. Z definice lineárního obalu dokažte rovnost  $[u_1, u_2, u_3] = [u_1, u_2 - u_1, u_1 + u_2 + 2u_3]$ . (3 body)
- 6a. Napište definici suprema množiny  $M \subseteq \mathbb{R}$ . (2 body)
- 6b. Se všemi potřebnými předpoklady zformulujte základní větu, která o supremu platí. (2 body)
- 7a. Napište definici limity posloupnosti reálných čísel. (1 bod)
- 7b. Pomocí věty o supremu z předchozí úlohy dokažte: Každá rostoucí posloupnost záporných reálných čísel má limitu. (3 body)
- 8a. Napište definici limity reálné funkce  $f$  v bodě  $a \in \mathbb{R}$ . (1 bod)
- 8b. Z definice limity dokažte:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

pokud limity vpravo existují. (3 body)

- 9a. Pomocí kvantifikátorů napište negaci definice

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

(1 bod)

- 9b. Dokažte z definice limity (resp. z předchozí úlohy), že limita v bodě 2 funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že  $f(x) = 0$  pro  $x$  iracionální a  $f(x) = 1$  pro  $x$  racionální, není rovna 0. (3 body)

- 10a. Napište definici spojitosti reálné funkce v bodě  $a \in \mathbb{R}$ . (1 bod)

- 10b. Dokažte z definice spojitosti: Jestliže jsou dvě funkce  $f$  a  $g$  spojité v bodě  $a \in \mathbb{R}$ , pak je v tomto bodě spojitý i jejich součin. (3 bod)

Pro ty, kteří už mají všechno hotovo

11. Nechť  $U$  je vektorový prostor a  $\varphi : U \rightarrow U$  lineární zobrazení takové, že  $\varphi \circ \varphi = \varphi$ . Pak prostor  $U$  lze zapsat jako direktní součet dvou podprostorů, které souvisejí s  $\varphi$ . Napište a dokažte. (4 body)

12. Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je rostoucí funkce. Co netriviálního můžete říci o množině bodů nespojitosti této funkce? Své tvrzení dokažte. (4 body)