Program 4, semináře z matematiky II

Řešení příkladů z 1. písemky.

Řešení 2. domácí úlohy.

1. Pro vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ve vektorovém prodstoru U nad $\mathbb{K}$ definujeme tyto dvě množiny:

(1) $[u_1, u_2, \ldots, u_k] = \{a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k \in U; a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}\}$.

(2) $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle$ je nejmenší vektorový podprostor v U obsahující vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Dokažte, že

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k] = \langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle.$$

2. Uvažujme opět vektorový prostor U a v něm dva vektorové podprostory V a W. Dokažte, že následující dva výroky jsou ekvivalentní.

(1) $V \cap W = \{0\}$.

(2) $(\forall u \in V + W)(\exists! v \in V)(\exists! w \in W)(u = v + w)$.

3. Je-li $\varphi : U \to V$ prosté lineární zobrazení, pak platí, že z lineární nezávislosti vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_k$ v U, plyne lineární nezávislost vektorů $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_k)$ v prostoru V. Dokažte.

Další úlohy

4. Nechť U je vektorový prostor a $\varphi : U \to U$ lineární zobrazení takové, že $\varphi \circ \varphi = 0$. Pak je prostor U direktním součtem

$$U = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{im}(\varphi).$$

Dokažte.

5. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $f(a) > c > f(b)$. Pomocí infima vhodné množiny dokažte, že existuje $y \in [a, b]$ takové, že $f(y) = c$.