

Úlohy řešené na 7. semináře z matematiky II

Řešení písemky

1. Nechť funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě a a $f(a) \neq 0$. Dokažte, že funkce $1/f(x)$ je definována na nějakém okolí bodu a a je v bodě a spojitá.

2. Nechť $U = \{a\sqrt{3} + b\sqrt{5} \in \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dokažte:

- (a) U je vektorový prostor nad racionálními čísly \mathbb{Q} (1 bod),
- (b) Reálná čísla $\sqrt{3}$ a $\sqrt{5}$ tvoří jeho bázi (3 body).

3. **Plíživé lemma** Nechť M je podmnožina intervalu $[a, b]$ s těmito vlastnostmi:

- (1) $a \in M$,
- (2) Je-li $x \in M$ a $x \neq b$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že $[x, x + \delta) \subseteq M$,
- (3) Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost prvků množiny M a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

pak $x \in M$.

Dokažte, že $M = [a, b]$.

Další úlohy

4. Pomocí předchozího plíživého lemmatu dokažte, že každá spojitá funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je shora omezená.

5. Dokažte, že každá spojitá funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá svého maxima v nějakém $x_0 \in [a, b]$. (Použije se výsledek úloh 4 a 1.)

6. Každá posloupnost čísel $x_n \in [a, b]$ obsahuje konvergentní podposloupnost. Limita této podposloupnosti leží v $[a, b]$. (To znamená, že uzavřený interval je kompaktní metrický prostor.)