M4010 Rovnice matematické fyziky

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

19. února 2024

Rovnice typu $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$

charakteristický systém

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,y)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x,y)$$

$$\xrightarrow[\text{systému ODR}]{\text{řešení}}$$

charakteristiky

$$x = x(s, C_1, C_2)$$
$$y = y(s, C_1, C_2)$$

$$\Big\downarrow \text{ eliminace parametru } s$$

charaktristická rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

$$\xrightarrow[\text{řešení ODR}]{}$$

první integrál

$$\varphi(x,y) = const$$

$$\longrightarrow$$

obecné řešení

$$u(x,y) = \Phi\big(\varphi(x,y)\big)$$

Rovnice typu $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u)$

charaktristická rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \xrightarrow[\text{řešení ODR}]{} \text{první integrál} \quad \varphi(x,y) = const$$

transformace

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x,y) \\ \eta &= y \end{aligned} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = F(\xi,\eta,u) \xrightarrow[\text{řešení ODR}]{} V(\xi,\eta,u) = \Phi(\xi)$$

řešení v implicitním tvaru: $V\big(\varphi(x,y),y,u\big) = \Phi\big(\varphi(x,y)\big)$

Okrajová úloha

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0, \quad u\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big) = g(\sigma)$$

počáteční úloha pro charakteristický systém

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,y)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x,y)$$

$$x(0) = X(\sigma), \; y(0) = Y(\sigma)$$

řešení počáteční úlohy

parametrické vyjádření řešení úlohy

$$x = x(s,\sigma)$$
$$y = y(s,\sigma)$$

$$u = g(\sigma)$$

eliminace parametru s

$$\sigma = \sigma(x,y)$$

řešení úlohy

$$u(x,y) = g\big(\sigma(x,y)\big)$$

Okrajová úloha pro quasilineární rovnici

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \quad u\big(X(\sigma),Y(\sigma)\big) = g(\sigma)$$

počáteční úloha pro charakteristický systém

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,y,u),\ x(0) = X(\sigma)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x,y,u),\ y(0) = Y(\sigma)$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = c(x,y,u),\ u(0) = g(\sigma)$$

řešení počáteční úlohy

parametrické vyjádření řešení úlohy

$$x = x(s,\sigma)$$
$$y = y(s,\sigma)$$
$$u = u(s,\sigma)$$

vyjádření parametrů s, σ

$$s = s(x,y)$$
$$\sigma = \sigma(x,y)$$

řešení úlohy

$$u(x,y) = u\big(s(x,y),\sigma(x,y)\big)$$

Okrajová úloha pro obecnou rovnici

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=0, \qquad u\big(X(\sigma),Y(\sigma)\big)=g(\sigma)$$

Označení $p=u_x,\ q=u_y$: $F(x,y,u,p,q)=0$

počáteční úloha pro
charakteristický systém

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= F_p(x,y,u,p,q), & x(0)&=X(\sigma)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= F_q(x,y,u,p,q), & y(0)&=Y(\sigma)\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= pF_p(x,y,u,p,q)+qF_q(x,y,u,p,q), & u(0)&=g(\sigma)\\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} &= -F_x(x,y,u,p,q)-pF_u(x,y,u,p,q), & p(0)&=p_0\\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} &= -F_y(x,y,u,p,q)-qF_u(x,y,u,p,q), & p(0)&=q_0
\end{aligned}$$

řešení
počáteční
úlohy

charakteristický
pruh

$$\begin{aligned}
x&=x(s,\sigma)\\
y&=y(s,\sigma)\\
u&=u(s,\sigma)\\
p&=p(s,\sigma)\\
q&=q(s,\sigma)
\end{aligned}$$

parametrické
vyjádření
řešení úlohy

při tom: $F\big(X(\sigma),Y(\sigma),g(\sigma),p_0,q_0\big)=0$

$$p_0X'(\sigma)+q_0Y'(\sigma)=g'(\sigma)$$

MASARYKOVA
UNIVERZITA