Obsah

1 Rovnice prvního řádu **1**
Jednorozměrná rovnice kontinuity . . . 1
1.1 Rovnice ve dvou nezávisle proměnných . . . 3
1.1.1 Lineární rovnice . . . 3
Řešení rovnice $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$ . . . 4
1.1.2 Kanonický tvar a řešení rovnice lineární v prvních derivacích . . . 7
1.1.3 Okrajové úlohy . . . 13
Okrajová úloha pro rovnici $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u)$ . . . 13
Okrajová úloha pro obecnou rovnici . . . 17
Quasilineární rovnice a její geometrická interpretace . . . 22
1.2 Rovnice v n nezávisle proměnných . . . 25
Rovnice lineární v derivacích s nulovou pravou stranou . . . 26
Quasilineární rovnice . . . 31
Okrajová úloha pro obecnou rovnici . . . 33
Cvičení . . . 34

2 Rovnice druhého řádu lineární ve druhých derivacích **37**
2.1 Rovnice ve dvou nezávisle proměnných . . . 37
2.1.1 Charakteristiky a kanonický tvar rovnice . . . 38
Hyperbolická rovnice . . . 38
Parabolická rovnice . . . 41
Eliptická rovnice . . . 42
2.1.2 Kanonický tvar lineární rovnice s konstantními koeficienty . . . 44
2.2 Rovnice v n nezávisle proměnných . . . 46

3 Hyperbolické rovnice **51**
Kmitání struny . . . 51
3.1 Rovnice v jedné prostorové proměnné . . . 55
3.1.1 Počáteční úloha pro rovnici na přímce a d'Alembertův vzorec . . . 56
Homogenní rovnice s obecnými počátečními podmínkami . . . 56
Nehomogenní rovnice s nulovými počátečními podmínkami . . . 58
Obecná počáteční úloha a jednoznačnost řešení . . . 59
3.1.2 Počáteční úloha pro rovnici na polopřímce . . . 61
Pevný konec . . . 61
Volný konec . . . 64
3.1.3 Počáteční úloha pro rovnici na úsečce . . . 65
Dva pevné konce – užití d'Alembertova vzorce . . . 65
3.1.4 Obecná okrajová úloha – metoda separace proměnných . . . 67
Homogenní Robinovy okrajové podmínky . . . 68
Nehomogenní Robinovy podmínky . . . 73
Klasická aplikace: Kmity strun hudebních nástrojů . . . 75

4 Parabolické rovnice **81**
Jednorozměrná rovnice difúze / vedení tepla . . . 81
Speciální případy a okrajové podmínky . . . 84
Nejjednodušší řešení . . . 86
4.1 Rovnice ve dvou proměnných, evoluční rovnice v jedné prostorové proměnné . . . 88
4.1.1 Homogenní úlohy pro homogenní rovnici na přímce . . . 89
Periodické okrajové podmínky . . . 90
Podmínky integrovatelnosti . . . 92
4.1.2 Homogenní úlohy pro homogenní rovnici na polopřímce . . . 98
4.1.3 Homogenní úlohy pro homogenní rovnici na úsečce . . . 100
4.1.4 Homogenní úlohy pro homogenní rovnici – shrnutí . . . 103
4.1.5 Úlohy pro nehomogenní rovnice . . . 103
Nehomogenní Robinovy podmínky . . . 107
4.1.6 Úloha bez počátečních podmínek . . . 109
Klasická aplikace: Teplotní vlny . . . 111

5 Eliptické rovnice **113**
5.1 Rovnice ve dvou proměnných . . . 113
5.1.1 Okrajová úloha na obdélníku . . . 114
Nehomogenní rovnice s homogenními okrajovými podmínkami . . . 114
Homogenní rovnice s jednou homogenní okrajovou podmínkou . . . 117
Homogenní rovnice s nehomogenními okrajovými podmínkami . . . 120
5.1.2 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici na kruhu . . . 122
Kruhová inverze . . . 126
5.1.3 Jednoduché harmonické funkce . . . 127
5.2 Rovnice v n proměnných . . . 129
5.2.1 Jednoznačnost řešení okrajových úloh pro Poissonovu rovnici . . . 129
5.2.2 Harmonické funkce . . . 130
Fundamentální harmonické funkce . . . 131
Integrální reprezentace dvakrát diferencovatelné funkce . . . 135
Vlastnosti harmonických funkcí . . . 137
5.2.3 Greenovy funkce . . . 139
Greenova funkce pro Dirichletovu úlohu na speciálních oblastech . . . 142
5.2.4 Vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru . . . 144
Pro Dirichletovu úlohu na obdélníku . . . 146

A Distribuce **149**
A.1 Základní pojmy . . . 149
A.2 Konvergence v prostoru distribucí . . . 153
A.2.1 δ-vytvořující posloupnosti . . . 153
A.3 Derivování distribucí . . . 154
Cvičení . . . 159

B Okrajové úlohy pro obyčejné lineární rovnice druhého řádu **161**
B.1 Formulace úloh . . . 161
Diferenciální operátor . . . 161
Okrajové podmínky . . . 162
Symetrický diferenciální operátor . . . 163
B.2 Homogenní okrajová úloha s parametrem . . . 164
Sturmova-Liouvilleova úloha . . . 167
B.3 Nehomogenní rovnice s homogenními okrajovými podmínkami . . . 168
Fourierova metoda . . . 168
Metoda variace konstant . . . 170
Greenova funkce . . . 171

B.4 Úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami 172
Cvičení 173

C Některé diferenciální a integrální identity **175**
C.1 Transformace Laplaceova operátoru 175
C.2 Integrace per partes a Greenovy vzorce 177

Kapitola 1

Rovnice prvního řádu

Jednorozměrná rovnice kontinuity

Uvažujme nějakou kapalinu proudící v dlouhé tenké trubce. Předpokládejme, že v každém místě a v každé chvíli známe rychlost proudění. V kapalině navíc mohou probíhat nějaké procesy, které mění její množství; kapalina může například unikat prasklinami ve stěně trubky, nebo její součástí mohou být nějaké bakterie nebo řasy, které se množí, takže se množství kapaliny zvětšuje a podobně. Předpokládejme, že i tyto procesy známe. Chceme popsat, jak se mění množství kapaliny v libovolném bodě uvažované trubky.

Poněvadž trubka je „dlouhá a tenká“, můžeme ji považovat za jednorozměrný prostor; v ose trubky je umístěna osa x. Množství kapaliny budeme vyjadřovat pomocí délkové hustoty ϱ, hmotnosti vztažené k délce. Hustota může být v každém časovém okamžiku a v každém bodě jiná, tedy $\varrho = \varrho(t,x)$. Množství $m = m(t,\alpha,\beta)$ kapaliny mezi libovolně zvolenými body α a β v časovém okamžiku t je s hustotou ϱ svázána vztahem

$$m(t,\alpha,\beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varrho(t,x)\mathrm{d}x.$$

Rychlost proudění v také může být v každém časovém okamžiku a v každém bodě jiná, tedy $v = v(t,x)$. Pokud v bodě x a v čase t proudí kapalina zleva doprava, bude $v(t,x) > 0$, pokud zprava doleva, bude $v(t,x) < 0$. Rychlost proudění vyjadřuje skutečnost, že množství kapaliny $\mu = \mu(t,\tau,x)$, které proteče přes bod x za časový interval od t do $t+\tau$ je dáno integrálem

$$\mu(t,\tau,x) = \int\limits_{t}^{t+\tau} v(s,x)\varrho(s,x)\mathrm{d}\tau.$$

Třetím procesem je přibývání nebo mizení kapaliny. To také může být různé v různých časech a v různých bodech. Navíc může záviset i na hustotě kapaliny; hustší kapalina méně uniká prasklinami a podobně. Proces změny množství kapaliny vyjádříme „hustotou změny“ $f = f(t,x,\varrho)$; pokud je $f > 0$, jedná se o přírůstek, pokud $f < 0$, jedná se o úbytek. Veličina f vyjadřuje, že celkový přírůstek nebo úbytek množství kapaliny $\nu = \nu(t,\tau,\alpha,\beta)$ v úseku od α do β v časovém intervalu od t do $t+\tau$ je dán dvojnásobným integrálem

$$\nu(t,\tau,\alpha,\beta) = \int\limits_{t}^{t+\tau} \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(s,x,\varrho(s,x)\big)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s.$$

Nyní už můžeme vyjádřit množství kapaliny v úseku od α do β po uplynutí času τ od okamžiku t. Kapaliny tam bude tolik, kolik jí tam bylo, plus kapalina která přitekla přes bod α, minus kapalina, která odtekla přes bod β, plus nebo minus kapalina, která v příslušném časovém intervalu v tomto úseku „vznikla“ nebo „zmizela“. Formálně

$$m(t+\tau,\alpha,\beta) = m(t,\alpha,\beta) + \mu(t,\tau,\alpha) - \mu(t,\tau,\beta) + \nu(t,\tau,\alpha,\beta).$$

Jednotlivé členy této „bilanční rovnice“ jsou již vyjádřeny pomocí integrálů.

O „hustotě změny“ f budeme předpokládat, že je spojitá. Pak také integrál

$$\int_\alpha^\beta f\big(s,x,\varrho(s,x)\big)\mathrm{d}x$$

je spojitou funkcí proměnné s a podle věty o střední hodnotě integrálního počtu existuje číslo $\vartheta_1 \in [0,1]$ takové, že

$$\int_t^{t+\tau}\left(\int_\alpha^\beta f\big(s,x,\varrho(s,x)\big)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \tau\int_\alpha^\beta f\big(t+\vartheta_1\tau,x,\varrho(t+\vartheta_1\tau,x)\big)\mathrm{d}x.$$

Je-li funkce μ spojitě diferencovatelná ve třetí proměnné, můžeme členy vyjadřující přítok a odtok přepsat pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule ve tvaru

$$\mu(t,\tau,\beta) - \mu(t,\tau,\alpha) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}\mu(t,\tau,x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_t^{t+\tau} v(s,x)\varrho(s,x)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x.$$

Opět podle věty o střední hodnotě integrálního počtu existuje číslo $\vartheta_2 \in [0,1]$, že

$$\int_t^{t+\tau} v(s,x)\varrho(s,x)\mathrm{d}s = \tau v(t+\vartheta_2\tau,x)\varrho(t+\vartheta_2\tau,x).$$

Je tedy

$$\mu(t,\tau,\beta) - \mu(t,\tau,\alpha) = \tau\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x} v(t+\vartheta_2\tau,x)\varrho(t+\vartheta_2\tau,x)\mathrm{d}x.$$

„Bilanční rovnici“ tak můžeme přepsat do tvaru

$$\int_\alpha^\beta\left(\frac{\varrho(t+\tau,x)-\varrho(t,x)}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}v(t+\vartheta_2\tau,x)\varrho(t+\vartheta_2\tau,x) - f\big(t+\vartheta_1\tau,x,\varrho(t+\vartheta_1\tau,x)\big)\right)\mathrm{d}x = 0$$

Pokud předpokládáme, že integrovaná funkce je spojitá, poslední rovnost může být splněna pouze tehdy, když je tato funkce nulová, neboť body α a β byly zvoleny libovolně. Musí tedy platit

$$\frac{\varrho(t+\tau,x)-\varrho(t,x)}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}v(t+\vartheta_2\tau,x)\varrho(t+\vartheta_2\tau,x) = f\big(t+\vartheta_1\tau,x,\varrho(t+\vartheta_1\tau,x)\big)$$

a limitním přechodem $\tau \to 0$ dostaneme

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\varrho(t,x) = f\big(t,x,\varrho(t,x)\big),$$

nebo po rozepsání derivace součinu $v\varrho$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}(t,x) + v(t,x)\frac{\partial\varrho}{\partial x}(t,x) = -\varrho(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) + f\big(t,x,\varrho(t,x)\big).$$

To je rovnice pro hledanou hustotu ϱ, v níž se objevují první parciální derivace hledané funkce, tato funkce a nějaké další známé funkce nezávisle proměnných t, x a případně ϱ. U diferenciálních rovnic bývá obvyklé, že u hledané funkce se nepíší nezávisle proměnné; ty jsou dány proměnnými, podle kterých se parciálně derivuje. Pokud ještě pro zjednodušení zápisu označíme $w(t,x) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x)$, dostaneme rovnici kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + v(t,x)\frac{\partial \varrho}{\partial x} = w(t,x)\varrho + f(t,x,\varrho).$$

1.1 Rovnice ve dvou nezávisle proměnných

Jedná se o rovnice tvaru

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{1.1}$$

kde F je spojitá funkce pěti proměnných definovaná na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}^5$ s neprázdným vnitřkem G°.

Klasické (silné) řešení rovnice (1.1) je funkce u definovaná na množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ takové, že $\bar{\Omega} = \overline{\Omega^\circ}$, přitom funkce u je na vnitřku množiny Ω diferencovatelná, na uzávěru množiny Ω je spojitá a splňuje vztahy

$$\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) \in G \quad \text{a} \quad F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0$$

pro všechny body (x,y) z vnitřku množiny Ω.

Graf řešení rovnice (1.1) se nazývá *integrální plocha* této rovnice.

1.1.1 Lineární rovnice

Lineární rovnice je tvaru

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = g(x,y), \tag{1.2}$$

kde a, b, c, g jsou spojité funkce dvou proměnných definované na podmnožině Ω prostoru $\mathbb{R}^2$, která má vlastnost $\bar{\Omega} = \overline{\Omega^\circ}$. O funkcích a, b budeme navíc předpokládat, že jsou v každém bodě Ω° nenulové.

Kdyby totiž byla například funkce a nulová, rovnice by nabyla tvaru

$$b(x,y)u_y + c(x,y)u = g(x,y)$$

a mohli bychom ji považovat za rovnici obyčejnou – proměnnou y bychom chápali jako nezávisle proměnnou, proměnnou x bychom považovali za parametr.

Pokud je funkce g na pravé straně rovnice (1.2) nulová, tj. pokud rovnice je tvaru

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, \tag{1.3}$$

řekneme, že tato rovnice je *homogenní.* Množina řešení rovnice (1.3) splňuje *princip superpozice:* Lineární kombinace řešení rovnice (1.3) je opět řešením této rovnice. Podrobněji:

• Je-li funkce u řešením rovnice (1.3) a α je libovolné reálné číslo, pak také funkce αu je řešením této rovnice.

Důkaz: Poněvadž

$$\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial(\alpha u)}{\partial y} = \alpha\frac{\partial u}{\partial y},$$

platí

$$a\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} + b\frac{\partial(\alpha u)}{\partial y} + c(\alpha u) = \alpha\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu\right) = 0.$$

$\square$

• Jsou-li funkce u_1, u_2 řešením rovnice (1.3) se stejným definičním oborem, pak také funkce u_1+u_2 je řešením této rovnice.

Důkaz: Poněvadž

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x}=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\quad \text{a}\quad \frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial y}=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial y},$$

platí

$$a\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x}+b\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial y}+c(u_1+u_2)=$$
$$=a\frac{\partial u_1}{\partial x}+b\frac{\partial u_1}{\partial y}+cu_1+a\frac{\partial u_2}{\partial x}+b\frac{\partial u_2}{\partial y}+cu_2=0+0=0.$$

$\square$

Protože funkce $u\equiv 0$ je zřejmě řešením rovnice (1.3), plyne z principu superpozice, že množina všech řešení rovnice (1.3) definovaných na jedné množině Ω tvoří reálný vektorový prostor.

Nyní se podívejme na strukturu množiny řešení nehomogenní rovnice (1.2). Pro ni platí:

• Jsou-li funkce u_1 a u_2 řešením nehomogenní rovnice (1.2), pak jejich rozdíl je řešením homogenní rovnice (1.3).

Důkaz:

$$a\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x}+b\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}+c(u_1-u_2)=$$
$$=a\frac{\partial u_1}{\partial x}+b\frac{\partial u_1}{\partial y}+cu_1-\left(a\frac{\partial u_2}{\partial x}+b\frac{\partial u_2}{\partial y}+cu_2\right)=g-g=0.$$

$\square$

• Je-li funkce u_N řešením nehomogenní rovnice (1.2), pak pro každé řešení u_H homogenní rovnice (1.3) je součet funkcí u_N+u_H také řešením nehomogenní rovnice (1.2).

Důkaz:

$$a\frac{\partial(u_N+u_H)}{\partial x}+b\frac{\partial(u_N+u_H)}{\partial y}+c(u_N+u_H)=$$
$$=a\frac{\partial u_N}{\partial x}+b\frac{\partial u_N}{\partial y}+cu_N+a\frac{\partial u_H}{\partial x}+b\frac{\partial u_H}{\partial y}+cu_H=g+0=g.$$

$\square$

Množinu řešení nehomogenní lineární rovnice (1.2) tedy můžeme chápat jako afinní prostor. Přesněji, řešení nehomogenní rovnice (1.2) jsou body afinního prostoru, jehož zaměřením je vektorový prostor všech řešení lineární homogenní rovnice (1.3).

Řešení rovnice $a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=0$

Tato rovnice je speciálním případem lineární homogenní rovnice. Představme si, že její řešení známe. Nechť tedy funkce $u=u(x,y)$ je řešením rovnice

$$a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=0. \tag{1.4}$$

Tuto funkci dvou proměnných můžeme znázornit pomocí vrstevnic. Nechť vrstevnice funkce u mají parametrické vyjádření tvaru

$$\begin{aligned} x&=x(s),\\ y&=y(s), \end{aligned} \tag{1.5}$$

kde parametr s probíhá nějaký reálný interval I. Poněvadž funkce u je diferencovatelná, jsou její vrstevnice hladké křivky, tj. funkce $x = x(s)$, $y = y(s)$ jsou diferencovatelné. (Poznamenejme, že pokud má funkce u ostré lokální extrémy, pak v bodech těchto extrémů vrstevnice degeneruje v jediný bod; tato skutečnost však další úvahy neovlivňuje.) Na vrstevnicích platí

$$u\big(x(s), y(s)\big) = const$$

(pro libovolnou hodnotu parametru $s \in I$). Derivováním této rovnosti podle parametru dostaneme rovnost

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u\big(x(s), y(s)\big) = \frac{\partial u\big(x(s), y(s)\big)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u\big(x(s), y(s)\big)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s};$$

použili jsme řetězové pravidlo pro derivování složené funkce. Porovnáním s rovnicí (1.4) vidíme, že poslední rovnost bude splněna, pokud

$$x'(s) = \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = a\big(x(s), y(s)\big), \quad y'(s) = \frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s} = b\big(x(s), y(s)\big).$$

Toto pozorování vede k rozhodnutí, že k parciální diferenciální rovnici (1.4) přiřadíme dvourozměrný autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a(x, y), \\ y' &= b(x, y). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Tento systém se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici* (1.4), jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice* (1.4). Charakteristiky jsou vrstevnicemi řešení u rovnice (1.4).

Dělením rovnic charakteristického systému (1.6) dostaneme *charakteristickou rovnici příslušnou k rovnici* (1.4); charakteristická rovnice má tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \tag{1.7}$$

a je to obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu. Budeme předpokládat, že tato rovnice má řešení. Poněvadž se jedná o rovnici prvního řádu, závisí její obecné řešení na jedné konstantě. Tuto konstantu osamostatníme na pravé straně rovnosti vyjadřující řešení charakteristické rovnice (1.7) a dostaneme

$$v(x, y) = const; \tag{1.8}$$

přitom v je diferencovatelná funkce definovaná na množině Ω. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit také jinak: charakteristickou rovnici (1.7) přepíšeme ve tvaru

$$b(x, y)\mathrm{d}x - a(x, y)\mathrm{d}y = 0; \tag{1.9}$$

funkce v je tedy kmenovou funkcí diferenciálu na levé straně. Funkce v se nazývá *první integrál rovnice* (1.4).

První integrál rovnice (1.4) lze také najít eliminací parametru s v řešení charakteristického systému (1.6), jinak řečeno převedením parametrické rovnice křivky na rovnici obecnou. Vrstevnice řešení u parciální diferenciální rovnice (1.4) mají tedy implicitní vyjádření (1.8), konstanta na pravé straně představuje hodnotu funkce u na příslušné vrstevnici. Označme tuto hodnotu symbolem $\Phi\big(v(x, y)\big)$.

Provedenými úvahami jsme vlastně našli **algoritmus** hledání řešení parciální diferenciální rovnice (1.4): K rovnici přiřadíme charakteristický systém (1.6) nebo charakteristickou rovnici (1.7), který (nebo kterou) vyřešíme a najdeme první integrál rovnice (1.4) ve tvaru (1.7). Pak vezmeme libovolnou diferencovatelnou funkci Φ jedné proměnné a položíme

$$u(x, y) = \Phi\big(v(x, y)\big). \tag{1.10}$$

Ještě je potřeba udělat zkoušku, že takto nalezená funkce u je skutečně řešením parciální rovnice (1.4). Jinak řečeno, dokázat následující:

Tvrzení 1. Nechť $v : \Omega \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce taková, že rovnost (1.8) je implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (1.6) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení charakteristické rovnice (1.7)). Je-li Φ libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné taková, že její definiční obor obsahuje obor hodnot funkce v, pak funkce u definovaná vztahem (1.10) je řešením rovnice (1.4).

Důkaz: Pro řešení $x = x(s)$, $y = y(s)$ charakteristického systému platí

$$v\big(x(s), y(s)\big) = const.$$

Derivováním této rovnosti podle parametru s dostaneme

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v\big(x(s), y(s)\big) = \frac{\partial v\big(x(s), y(s)\big)}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v\big(x(s), y(s)\big)}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s} =$$
$$= \frac{\partial v\big(x(s), y(s)\big)}{\partial x} a\big(x(s), y(s)\big) + \frac{\partial v\big(x(s), y(s)\big)}{\partial y} b\big(x(s), y(s)\big),$$

stručně

$$a(x,y)v_x(x,y) + b(x,y)v_y(x,y) = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi\big(v(x,y)\big)}{\partial x} = \Phi'\big(v(x,y)\big)v_x(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \Phi'\big(v(x,y)\big)v_y(x,y),$$

takže

$$a(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \big(a(x,y)v_x(x,y) + b(x,y)v_y(x,y)\big)\Phi'\big(v(x,y)\big) = 0.$$

□

Dostali jsme množinu řešení rovnice (1.4) ve tvaru (1.10). Prvky této množiny závisí na diferencovatelných funkcích, nikoliv na konstantách, jak tomu je v případě obyčejných diferenciálních rovnic. Odtud plyne, že (vektorový) prostor řešení lineární homogenní parciální diferenciální rovnice nemůže mít konečnou dimensi. Navíc zatím nevíme, zda rovnice (1.4) nemá nějaké další řešení, které není uvedeného tvaru.

Příklad.

$$u_x - 6x^2 u_y = 0.$$

Charakteristická rovnice je $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -6x^2$ a její řešení je bezprostředně dáno integrací pravé strany, $y = -2x^3 + const$. První integrál dané rovnice tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$2x^3 + y = const$$

a její řešení je dáno rovností

$$u(x,y) = \Phi(2x^3 + y),$$

kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce.

Zkouška:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(2x^3 + y) = \Phi'(2x^3 + y) \cdot 6x^2, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Phi(2x^3 + y) = \Phi'(2x^3 + y)$$

takže

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - 6x^2 \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 6x^2\Phi'(2x^3 + y) - 6x^2\Phi'(2x^3 + y) = 0.$$

■

1.1.2 Kanonický tvar a řešení rovnice lineární v prvních derivacích

Uvažujme parciální diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u). \tag{1.11}$$

Budeme hledat nějakou transformaci nezávisle proměnných, která tuto rovnici nějak zjednoduší. Současně budeme chtít, aby tato transformace nebyla příliš komplikovaná. Ponecháme tedy první souřadnici (nezávisle proměnnou x) beze změny a transformujeme pouze souřadnici druhou (nezávisle proměnnou y). Jinými slovy, původní souřadnice x, y transformujeme na nové souřadnice ξ, η tak, že

$$\xi = x, \quad \eta = v(x,y), \tag{1.12}$$

Přitom v je diferencovatelná funkce dvou proměnných. Aby se jednalo skutečně o transformaci prostoru $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, musí být zobrazení $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definované vztahem

$$\boldsymbol{\phi}(x,y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ v(x,y) \end{pmatrix},$$

regulární (invertovatelné). Existuje tedy inversní zobrazení $\boldsymbol{\phi}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; jeho druhou složku označíme χ, je to diferencovatelná funkce dvou proměnných. Přitom funkce v a χ splňují rovnosti $\chi(\xi,\eta) = y$, $v(x,y) = \eta$, podrobněji

$$\chi\big(x, v(x,y)\big) = y, \qquad v\big(\xi, \chi(\xi,\eta)\big) = \eta. \tag{1.13}$$

Poznamenejme, že k tomu, aby zobrazení $\boldsymbol{\phi}$ bylo regulární, stačí, aby funkce v měla nenulovou parciální derivaci podle druhé proměnné, tj. $v_y \neq 0$.

Nyní budeme rovnici (1.11) transformovat do nových nezávisle proměnných pomocí transformace (1.12). Parciální derivace hledané funkce u podle původních proměnných vyjádříme v nových proměnných pomocí „řetězového pravidla“ pro derivování složených funkcí:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi + u_\eta v_x, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\eta v_y.$$

Po dosazení do levé strany řešené rovnice (1.11) tedy dostaneme

$$au_x + bu_y = au_\xi + (av_x + bv_y)u_\eta.$$

Pokud funkce v bude taková, že výraz v závorce vymizí, daná rovnice se transformuje na rovnici, v níž vystupuje pouze jedna parciální derivace. Požadujeme tedy $av_x + bv_y = 0$, tj.

$$\frac{b}{a} = -\frac{v_x}{v_y}.$$

Výraz $-\dfrac{v_x}{v_y}$ ovšem vyjadřuje obyčejnou derivaci funkce $y = y(x)$ zadané implicitně rovnicí

$$v(x,y) = const.$$

Funkce $y = y(x)$ zadaná touto rovnicí tedy má derivaci tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}.$$

Porovnáním s (1.7) vidíme, že transformační funkce v současně implicitně vyjadřuje charakteristiky rovnice (1.4).

Transformovaná rovnice má tvar $au_\xi = f$. Funkce a je podle předpokladu nenulová, proto můžeme rovnici dále upravit, vyjádřit parciální derivaci u_ξ:

$$u_\xi = \frac{f}{a}u.$$

Dostáváme tak první závěr: Transformace nezávisle proměnných (1.12), kde funkce v představuje implicitní zápis (1.8) charakteristik rovnice (1.4), převádí rovnici (1.11) na rovnici

$$u_\xi = F(\xi, \eta, u); \tag{1.14}$$

přitom

$$F(\xi, \eta, u) = \frac{f\big(\xi, \chi(\xi, \eta), u\big)}{a\big(\xi, \chi(\xi, \eta)\big)},$$

kde funkce χ je definována rovnostmi (1.13). Rovnice (1.14) se nazývá *kanonický tvar rovnice* (1.11).

V rovnici (1.14) není derivace hledané funkce u podle proměnné η. Hledanou funkci tedy můžeme chápat jako funkci jedné nezávisle proměnné ξ a její parciální derivaci u_ξ chápat jako derivaci obyčejnou. V tomto pojetí bude nezávisle proměnná η mít roli parametru. Hledáme tedy řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu s parametrem η

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = F(\xi, \eta, u).$$

Pokud se nám podaří tuto rovnici vyřešit, tj. najít funkci $u = u(\xi, \eta)$, která ji splňuje, dostaneme zpětnou substitucí nezávisle proměnných řešení původní rovnice (1.11). Přitom je potřeba mít na paměti, že integrační konstanta objevující se při řešení obyčejné rovnice, bude záviset na parametru η. Ve vyjádření řešení rovnice (1.11) se tedy bude vyskytovat nějaká neurčená funkce proměnné η, tj. v původních nezávisle proměnných nějaká funkce argumentu $v(x, y)$. To je v souladu s výsledky uvedenými v 1.1.1.

Příklad

Hledejme řešení rovnice $yu_x + xu_y = u^2 + 1$ v kladném kvadrantu.

Příslušná charakteristická rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}$$

a její řešení je implicitně dáno rovností $x^2 - y^2 = const$. Transformace

$$\xi = x, \qquad \eta = x^2 - y^2$$

převede danou rovnici na kanonický tvar

$$\sqrt{\xi^2 - \eta}\, u_\xi = u^2 + 1.$$

Tuto rovnici budeme považovat za obyčejnou. Upravíme ji na tvar explicitní obyčejné diferenciální rovnice s parametrem η

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \frac{u^2 + 1}{\sqrt{\xi^2 - \eta}}$$

a vidíme, že se jedná o rovnici se separovanými proměnnými. Její řešení je implicitně dáno rovností

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = \int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - \eta}}.$$

Integrací dostaneme implicitní tvar řešení rovnice

$$\operatorname{arctg} u = \ln\left|\xi + \sqrt{\xi^2 - \eta}\right| + C(\eta),$$

kde C je integrační konstanta, která závisí na parametru η. V tomto případě můžeme funkci u vyjádřit explicitně,

$$u(\xi, \eta) = \operatorname{tg}\left(C(\eta) + \ln\left|\xi + \sqrt{\xi^2 - \eta}\right|\right).$$

Návratem k původním proměnným x, y dostaneme řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x,y) = \operatorname{tg}\big(C(x^2-y^2) + \ln(x+y)\big),$$

kde C je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné.

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že se skutečně jedná o řešení dané rovnice. Parciální derivace nalezené funkce u jsou[1]

$$u_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)}\left(2xC'(x^2-y^2) + \frac{1}{x+y}\right),$$
$$u_y(x,y) = \frac{1}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)}\left(-2yC'(x^2-y^2) + \frac{1}{x+y}\right),$$

takže platí

$$\begin{aligned}yu_x(x,y) + xu_y(x,y) &= \frac{1}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)} = \\ &= \frac{\sin^2\big(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\big) + \cos^2\big(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\big)}{\cos^2\left(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\right)} = \\ &= \operatorname{tg}^2\big(C(x^2-y^2)+\ln(x+y)\big) + 1 = u^2+1\end{aligned}$$

a rovnice je splněna. ■

Řešení $u = u(\xi,\eta)$ rovnice (1.14) v kanonickém tvaru obecně nelze explicitně vyjádřit. V některých případech, např. jedná-li se o rovnici se separovatelnými proměnnými nebo o rovnici exaktní, můžeme její řešení vyjádřit alespoň implicitně. Takové řešení závisí na integrační konstantě Φ, která ovšem sama závisí na parametru η. Řešení rovnice (1.14) tak zapíšeme ve tvaru

$$\psi(\xi,\eta,u) = \Phi(\eta);$$

přitom ψ je diferencovatelná funkce tří proměnných, Φ je diferencovatelná funkce jedné proměnné. Návratem k původním nezávisle proměnným x, y dostaneme implicitní tvar řešení rovnice (1.11)

$$\psi\big(x, v(x,y), u\big) = \Phi\big(v(x,y)\big).$$

Nejjednodušší je situace v případě lineární rovnice. Kanonický tvar rovnice (1.2) je

$$u_\xi = P(\xi,\eta)u + Q(\xi,\eta); \tag{1.15}$$

přitom

$$P(\xi,\eta) = -\frac{c\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)}{a\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)}, \quad Q(\xi,\eta) = \frac{g\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)}{a\big(\xi,\chi(\xi,\eta)\big)},$$

kde funkce χ je definována rovnostmi (1.13). Hledáme tedy řešení obyčejné lineární diferenciální rovnice prvního řádu s nezávisle proměnnou ξ a parametrem η:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = P(\xi,\eta)u + Q(\xi,\eta).$$

Její řešení je tvaru

$$u(\xi,\eta) = const\cdot\exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} P(\sigma,\eta)\mathrm{d}\sigma\right) + \int_{\xi_0}^{\xi} Q(s,\eta)\exp\left(\int_{s}^{\xi} P(\sigma,\eta)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s.$$

[1] Poznamenejme, že zápis $\sin^2\alpha$ označuje druhou mocninu funkční hodnoty goniometrické funkce sinus v bodě α, nikoliv dvakrát iterovanou funkci sinus; podobně pro funkce cosinus a tangens.

Integrační konstanta samozřejmě může záviset na parametru η, proto ji zapíšeme jako $\Phi(\eta)$. Řešení lineární parciální diferenciální rovnice v kanonickém tvaru (1.15) je tedy dáno formulí

$$u(\xi,\eta) = \Phi(\eta)\exp\left(\int\limits_{\xi_0}^{\xi} P(\sigma,\eta)\mathrm{d}\sigma\right) + \int\limits_{\xi_0}^{\xi} Q(s,\eta)\exp\left(\int\limits_{s}^{\xi} P(\sigma,\eta)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s, \tag{1.16}$$

kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné, ξ_0 je nějaké reálné číslo; ve většině případů lze položit $\xi_0 = 0$.

Řešení lineární rovnice (1.2) dostaneme z formule (1.16) návratem k původním nezávisle proměnným x, y pomocí rovností (1.13). Výsledek nyní můžeme zformulovat ve tvaru věty:

Věta 1. *Nechť $v : \Omega \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce taková, že rovnost (1.8) je implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (1.6) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení charakteristické rovnice (1.7)) a $\chi : \Omega \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že jsou splněny podmínky (1.13). Označme*

$$p(x,y,s) = -\frac{c\big(s,\chi\big(s,v(x,y)\big)\big)}{a\big(s,\chi\big(s,v(x,y)\big)\big)}, \qquad q(x,y,s) = \frac{g\big(s,\chi\big(s,v(x,y)\big)\big)}{a\big(s,\chi\big(s,v(x,y)\big)\big)}.$$

Je-li Φ diferencovatelná funkce jedné proměnné, jejíž definiční obor obsahuje obor hodnot funkce v, pak funkce u definovaná rovností

$$u(x,y) = \Phi\big(v(x,y)\big)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(x,y,\sigma)\mathrm{d}\sigma\right) + \int\limits_{x_0}^{x} q(x,y,s)\exp\left(\int\limits_{s}^{x} p(x,y,\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s$$

je řešením rovnice (1.2); číslo x_0 je libovolné takové, že integrály na pravé straně jsou konečné pro všechny dvojice $(x,y) \in \Omega$.

Důkaz není potřeba provádět, věta plyne z předchozích výpočtů. Lze ji ovšem také dokázat přímým výpočtem. Je to pěkné cvičení na derivování vícenásobně složených funkcí více proměnných. □

Výpočty provedené před Větou 1 ukazují, že z existence řešení charakteristické rovnice (1.7) plyne existence řešení lineární parciální rovnice (1.2) a toto řešení má tvar uvedený ve Větě 1. Existence řešení lineární parciální rovnice v tomto tvaru je tedy důsledkem existence řešení příslušné charakteristické rovnice, tj. obyčejné diferenciální rovnice.

Důsledek 1. *Lineární nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty u prvních derivací, tedy rovnice*

$$au_x + bu_y + c(x,y)u = g(x,y)$$

má řešení definované rovností

$$u(x,y) = \Phi(ay-bx)\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\int\limits_0^x c(x-\sigma,y-(b/a)\sigma)\mathrm{d}\sigma} + \frac{1}{a}\int\limits_0^x g\left(x-s, y-\frac{b}{a}s\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\int\limits_0^s c(x-\sigma,y-(b/a)\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s =$$

$$= \left(\Phi(ay-bx) + \frac{1}{a}\int\limits_0^x g\left(x-s,y-\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{a}\int\limits_s^x c(x-\sigma,y-(b/a)\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\int\limits_0^x c(x-\sigma,y-(b/a)\sigma)\mathrm{d}\sigma},$$

kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce.

Důkaz. V tomto případě je charakteristická rovnice tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{a}$$

a její řešení v implicitním tvaru je $ay - bx = const$. Tedy $v(x,y) = ay - bx$, $\chi(\xi,\eta) = \dfrac{1}{a}(b\xi + \eta)$, takže

$$c\big(s,\chi\big(s,v(x,y)\big)\big) = c\left(s, \frac{1}{a}(bs + ay - bx)\right) = c\left(s, y - \frac{b}{a}(x-s)\right),$$

a

$$g\big(s,\chi\big(s,v(x,y)\big)\big) = g\left(s, y - \frac{b}{a}(x-s)\right).$$

Dále platí

$$\int_0^x c\left(\sigma, y - \frac{b}{a}(x-\sigma)\right) \mathrm{d}\sigma = \int_0^x c\left(x-\sigma, y - \frac{b}{a}\sigma\right) \mathrm{d}\sigma,$$

$$\begin{aligned}\int_0^x g\left(s, y - \frac{b}{a}(x-s)\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\int_s^x c(\sigma, y-(b/a)\sigma)\mathrm{d}\sigma} \mathrm{d}s &= \\ = \int_0^x g\left(x-s, y - \frac{b}{a}s\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\int_{x-s}^x c(\sigma, y-(b/a)(x-\sigma))\mathrm{d}\sigma} \mathrm{d}s &= \\ = \int_0^x g\left(x-s, y - \frac{b}{a}s\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\int_0^s c(x-\sigma, y-(b/a)\sigma)\mathrm{d}\sigma} \mathrm{d}s&.\end{aligned}$$

□

Při řešení konkrétní lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných s nekonstantními koeficienty u prvních derivací bývá přehlednější rovnici transformovat na kanonický tvar, rovnici v kanonickém tvaru vyřešit a zpětně transformovat nezávisle proměnné, než používat vzorec z Věty 1.

Příklad.

$$yu_x - xu_y = x^2 + y^2$$

Rovnici budeme uvažovat na množině $G = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\big\}$, na jejímž vnitřku jsou oba koeficienty $a(x,y) = y$, $b(x,y) = -x$ nenulové. Příslušná charakteristická rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

Je to obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými a její řešení je implicitně dáno rovností $x^2 + y^2 = const$. Zavedeme tedy transformaci

$$\xi = x, \qquad \eta = x^2 + y^2.$$

Pak na množině G je

$$y = \sqrt{\eta - \xi^2}, \qquad \xi_x = 1, \quad \xi_y = 0, \quad \eta_x = 2x = 2\xi, \quad \eta_y = 2y = 2\sqrt{\eta - \xi^2},$$

takže

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + 2\xi u_\eta, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 2\sqrt{\eta - \xi^2}\, u_\eta.$$

Po dosazení do řešené rovnice dostaneme

$$\sqrt{\eta - \xi^2}\big(u_\xi + 2\xi u_\eta\big) - 2\xi\sqrt{\eta - \xi^2}\, u_\eta = \xi^2 + \eta - \xi^2$$

a odtud snadnou úpravou získáme kanonický tvar

$$u_\xi = \frac{\eta}{\sqrt{\eta - \xi^2}}.$$

Tuto jednoduchou obyčejnou rovnici řešíme integrací podle proměnné ξ,

$$u = \int \frac{\eta}{\sqrt{\eta - \xi^2}} \mathrm{d}\xi = \eta \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} + const.$$

Integrační konstanta závisí na parametru η, řešení rovnice v kanonickém tvaru je

$$u(\xi, \eta) = \eta \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} + \Phi(\eta),$$

kde η je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Návratem k původním proměnným dostaneme řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \Phi(x^2 + y^2).$$

Ještě můžeme využít skutečnosti, že pro $x > 0$, $y > 0$ je

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y},$$

a výsledek zapsat v trochu kratším tvaru

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \Phi(x^2 + y^2).$$

Ukážeme ještě řešení dané rovnice přímým dosazováním do formulí ve Větě 1. Máme

$$a(x, y) = y, \quad b(x, y) = -x, \quad c(x, y) = 0, \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Implicitní zápis řešení charakteristické rovnice je $x^2 + y^2 = const$ a tedy

$$v(x, y) = x^2 + y^2.$$

Tvar funkce χ dostaneme ze druhé rovnosti (1.13). Má platit

$$\eta = v\big(\xi, \chi(\xi, \eta)\big) = \xi^2 + \chi(\xi, \eta)^2,$$

takže $\chi(\xi, \eta) = \sqrt{\eta - \xi^2}$. Dále $p(x, y, s) = 0$ a

$$q(x, y, s) = \frac{g\big(s, \chi(s, v(x, y))\big)}{a\big(s, \chi(s, v(x, y))\big)} = \frac{s^2 + \chi\big(s, v(x, y)\big)^2}{\chi\big(s, v(x, y)\big)} = \frac{s^2 + \big(v(x, y) - s^2\big)}{\sqrt{v(x, y) - s^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - s^2}}.$$

Zvolíme $x_0 = 0$ a řešení dané rovnice rovnice dostaneme podle Věty 1 ve tvaru

$$u(x, y) = \Phi(x^2 + y^2) + \int_0^x \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - s^2}} \mathrm{d}s = \Phi(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

tedy až na pořadí sčítanců ve stejném, jako při předchozím způsobu řešení rovnice. ■

Rovnici (1.11) jsme transformovali do nových nezávisle proměnných tak, že jsme ponechali první souřadnici nezměněnu a za druhou jsme vzali funkci vyjadřující charakteristiku rovnice. To není jediná možnost, jak parciální rovnici (1.11) transformovat na kanonický tvar, tj. na obyčejnou rovnici s parametrem. Stejně dobře můžeme ponechat druhou souřadnici a první nahradit charakteristikou.

Příklad.

$$2u_x + 3u_y - xu = 0$$

Charakteristická rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tfrac{3}{2},$$

její řešení $y = \frac{3}{2}x + const$ můžeme přepsat ve tvaru

$$3x - 2y = const;$$

to je zápis charakteristiky. Zavedeme transformaci

$$\xi = 3x - 2y, \quad \eta = y.$$

Pak $u_x = 3u_\xi$, $u_y = -2u_\xi + u_\eta$, $x = \frac{1}{3}(\xi + 2\eta)$. Levá strana dané rovnice se tedy transformuje na tvar

$$2u_x + 3u_y - xu = 6u_\xi - 6u_\xi + 3u_\eta - \tfrac{1}{3}(\xi + 2\eta)u = 3\left(u_\eta - \tfrac{1}{9}(\xi + 2\eta)u\right).$$

Kanonický tvar dané rovnice je

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \tfrac{1}{9}(\xi + 2\eta)u.$$

Tato rovnice má řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{9}\int (\xi + 2\eta)\mathrm{d}\eta, \qquad \text{tj. } \ln u = \tfrac{1}{9}(\xi\eta + \eta^2) + const, \quad \text{neboli } u = const \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{9}(\xi\eta + \eta^2)}.$$

Řešení rovnice v kanonickém tvaru je tedy $u = \Psi(\xi)\mathrm{e}^{\frac{1}{9}\eta(\xi+\eta)}$ a návratem k původním proměnným dostaneme řešení dané rovnice

$$u(x,y) = \Psi(3x - 2y)\mathrm{e}^{\frac{1}{9}y(3x-2y+y)} = \Psi(3x-2y)\sqrt[9]{\mathrm{e}^{3xy-y^2}} = \\ = \Psi(3x-2y)\mathrm{e}^{-\frac{1}{9}\left((y-\frac{3}{2}x)^2 - \frac{9}{4}x^2\right)} = \Psi(3x-2y)\mathrm{e}^{-\frac{1}{36}(2y-3x)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x^2}.$$

Podle Důsledku 1 Věty 1 je řešení dané rovnice dáno formulí

$$u(x,y) = \Phi(2y - 3x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^x \sigma \mathrm{d}\sigma} = \Phi(2y-3x)\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x^2}.$$

Vidíme, že se obě vyjádření shodují, $\Phi(\xi) = \Psi(-\xi)\mathrm{e}^{-\frac{1}{36}\xi^2}$. ■

1.1.3 Okrajové úlohy

Řešení rovnice (1.11), které lze najít pomocí transformace nezávisle proměnných, je vyjádřeno pomocí nějaké diferencovatelné funkce Φ jedné proměnné. Jedná se tedy o množinu řešení dané rovnice. Nějaký prvek z této množiny, *partikulární řešení,* dostaneme konkrétní volbou funkce Φ. V této části budedeme hledat řešení, které splňuje nějakou předem danou podmínku.

Okrajová úloha pro rovnici $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u)$

Uvažujme parciální diferenciální rovnici (1.11) lineární v prvních derivacích a jednu konkrétní charakteristiku rovnice (1.4) s nulovou pravou stranou; tato charakteristika má parametrické vyjádření (1.5) a je partikulárním řešením autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic (1.6), které splňuje podmínky

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0.$$

Nechť funkce u je řešením rovnice (1.11). Pak na uvažované charakteristice platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u\big(x(s),y(s)\big) = u_x\big(x(s),y(s)\big)\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} + u_y\big(x(s),y(s)\big)\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s} =$$
$$= a\big(x(s),y(s)\big)u_x\big(x(s),y(s)\big) + b\big(x(s),y(s)\big)u_y\big(x(s),y(s)\big) = f\Big(x(s),y(s),u\big(x(s),y(s)\big)\Big).$$

Odtud vidíme, že prostorová křivka, jejíž parametrické vyjádření je řešením autonomního systému

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= a(x,y),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= b(x,y),\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= f(x,y,u)\end{aligned} \tag{1.17}$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \qquad u(0) = u_0 = u(x_0,y_0), \tag{1.18}$$

je incidentní s grafem řešení rovnice (1.11), tj. leží na grafu funkce u.

Zadáme-li tedy hodnotu u_0 řešení u rovnice (1.11) v nějakém bodě (x_0,y_0) charakteristiky, máme hodnoty řešení u rovnice (1.11) ve všech bodech této charakteristiky jako řešení autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic (1.17) s počátečními podmínkami (1.18). Systém (1.17) charakterizuje řešení rovnice (1.2), proto se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici* (1.2), jeho trajektorie můžeme nazvat *charakteristické křivky rovnice* (1.11).

Jedno konkrétní řešení (partikulární řešení) rovnice (1.11) získáme tak, že na každé charakteristice zadáme právě jednu funkční hodnotu. Jinak řečeno, zadáme hodnoty řešení na nějaké rovinné křivce, která protíná každou charakteristiku právě jednou. Takové křivce říkáme *okraj pro rovnici* (1.11).

Okraj může být zadán parametricky rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= X(\sigma),\\ y &= Y(\sigma),\end{aligned}$$

kde parametr σ probíhá nějaký interval J. Pro každou hodnotu parametru $\sigma \in J$ zadáme hodnotu řešení $u = g(\sigma)$. Rovnosti

$$x = X(\sigma), \quad y = Y(\sigma), \quad u = g(\sigma), \qquad \sigma \in J \tag{1.19}$$

lze interpretovat jako parametrické vyjádření prostorové křivky, která má ležet na grafu řešení u rovnice (1.11). Tyto rovnosti nazýváme *okrajová podmínka pro rovnici* (1.11).

Okrajová úloha pro rovnici (1.11) je úloha najít řešení $u = u(x,y)$ rovnice (1.11), které splňuje okrajovou podmínku (1.19), tj. řešení, pro které platí

$$u\big(X(\sigma),Y(\sigma)\big) = g(\sigma)$$

pro každou hodnotu parametru $\sigma \in J$.

Okrajovou úlohu můžeme řešit tak, že metodami popsanými v 1.1.2 najdeme řešení rovnice závisející na obecné funkci Φ a dosadíme do něho okrajovou podmínku. Dostaneme tak funkcionální rovnici pro neznámou funkci Φ; tuto funkci lze v některých případech z příslušné rovnice uhodnout.

Příklad

Hledejme řešení rovnice

$$2u_x + 3u_y = xu,$$

které splňuje podmínku

$$u(x,0) = x^2$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Zadáváme tedy hodnoty řešení na ose x. Okrajovou podmínku můžeme parametricky zapsat jako

$$x = \sigma, \quad y = 0, \quad u = \sigma^2, \qquad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Řešení dané rovnice jsme našli v příkladu na str. 13 ve tvaru

$$u(x,y) = \Psi(3x - 2y)\sqrt[9]{\mathrm{e}^{3xy-y^2}}.$$

Aby toto řešení splnilo okrajovou podmínku, musí platit

$$x^2 = u(x,0) = \Psi(3x)\sqrt[9]{\mathrm{e}^0} = \Psi(3x).$$

Funkce Ψ je tedy řešením jednoduché funkcionální rovnice $\Psi(3x) = x^2$ a snadno uhodneme, že funkci Ψ můžeme zadat předpisem $\Psi(\xi) = \left(\frac{1}{3}\xi\right)^2 = \frac{1}{9}\xi^2$. Pro řešení dané okrajové úlohy tak dostáváme formulku

$$u(x,y) = \tfrac{1}{9}(3x - 2y)^2\, \sqrt[9]{\mathrm{e}^{3xy-y^2}}.$$

■

Řešení funkcionální rovnice však obecně není snadná úloha. Proto může být výhodné při řešení okrajové úlohy (1.11), (1.19) postupovat jinak.

Najdeme konkrétní charakteristiku, která protíná okraj v bodě daném konkrétní hodnotou parametru σ. To znamená, že rovnosti v (1.19) chápeme jako počáteční podmínky pro autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic (1.17), tj. najdeme řešení systému rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(x,y,u)$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = X(\sigma), \quad y(0) = Y(\sigma), \quad u(0) = g(\sigma).$$

Takové řešení počáteční úlohy pro autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic tedy závisí na nezávisle proměnné s a na parametru σ, je obecně tvaru

$$x = x(s,\sigma), \quad y = y(s,\sigma), \quad u = u(s,\sigma).$$

Pro řešení okrajové úlohy představuje parametr σ i nezávisle proměnná s pouze pomocné parametry, které je potřeba eliminovat. Proto budeme první dvě rovnosti chápat jako dvě rovnice pro dvě neznámé s a σ; tyto neznámé vyjádříme pomocí proměnných x, y, tj. najdeme $s = s(x,y)$, $\sigma = \sigma(x,y)$, a dosadíme je do třetí rovnosti. Dostaneme tak řešení okrajové úlohy ve tvaru

$$u(x,y) = u\big(s(x,y), \sigma(x,y)\big).$$

Příklad

Hledejme řešení rovnice

$$yu_x - xu_y = x^2 + y^2,$$

(což je lineární rovnice řešená v příkladu na str. 11) s okrajovou podmínkou

$$u(x,0) = x^2, \qquad x \geq 0.$$

Zadáváme tedy hodnoty řešení na kladné poloose x. Všechny funkce, které se objevují v dané rovnici, jsou definovány na celém prostoru $\mathbb{R}^2$. Budeme hledat řešení, které je definované na co největší podmnožině $\mathbb{R}^2$, nikoliv pouze v prvním kvadrantu jako v zmíněném příkladu.

Parametrické vyjádření okrajové podmínky je

$$x = \sigma, \quad y = 0, \quad u = \sigma^2, \qquad \sigma \geq 0.$$

Řešíme charakteristický systém

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = y,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -x,$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = x^2 + y^2$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = \sigma, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = \sigma^2.$$

První dvě rovnice představují lineární systém obyčejných diferenciálních rovnic pro neznýmé funkce x a y. Tento systém vyřešíme a řešení dosadíme do třetí rovnice, kterou pak vyřešíme prostou integrací. Dostaneme tak řešení charakteristického systému ve tvaru

$$x = \sigma \sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right), \quad y = \sigma \cos\left(s + \frac{\pi}{2}\right), \quad u = (s+1)\sigma^2. \tag{1.20}$$

První dvě rovnosti nejprve umocníme na druhou a sečteme, dostaneme

$$\sigma^2 = x^2 + y^2,$$

poté je vydělíme a dostaneme

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(s + \frac{\pi}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(s + \frac{\pi}{2}\right).$$

Tato jednoduchá goniometrická rovnice pro neznámou $s + \frac{\pi}{2}$ má řešení

$$s + \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + k\pi, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z},$$

tedy $s = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + (2k-1)\frac{\pi}{2}$. Dosazením do pravé strany třetí rovnosti v (1.20) dostaneme

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(1 + (2k-1)\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right).$$

V tomto vyjádření však zůstává neurčený parametr k a navíc tato formule je pro $y = 0$ nedefinovaná, dokonce ani nemá limitu pro $y \to 0$. Pro $x > 0$ totiž platí

$$\lim_{y \to 0+} \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \lim_{y \to 0-} \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = -\frac{\pi}{2}.$$

Aby byla splněna okrajová podmínka, mělo by pro $x > 0$ platit

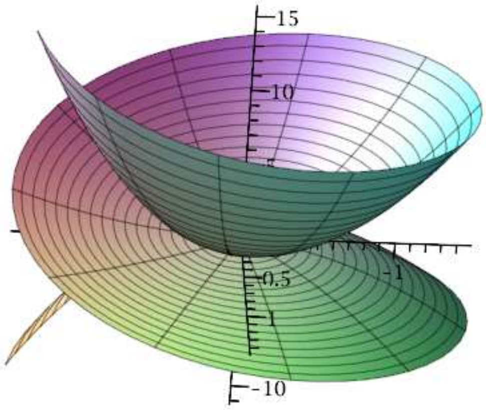
$$x^2 = \lim_{y \to 0+} \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + (2k-1)\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) = x^2\left(1 + (2k-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = x^2(1 + k\pi),$$

tedy $k = 0$, a současně

$$x^2 = \lim_{y \to 0-} \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + (2k-1)\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) = x^2\bigl(1 + (k-1)\pi\bigr),$$

tedy $k = 1$. Jinak řečeno, na množině $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\}$ je řešení dané okrajové úlohy tvaru

$$u(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(1 - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$$



Obrázek 1.1: Řešení rovnice $yu_x - xu_y = x^2 + y^2$ s okrajovou podmínkou $u(x,0) = x^2$, $x \geq 0$. Řešení je dáno parametricky rovnostmi (1.20), hodnoty parametrů na obrázku jsou $s \in [-6, 6]$, $\sigma \in [0, \frac{3}{2}]$.

a na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\}$ tvaru

$$u(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right).$$

Tato vyjádření lze jednotně zapsat formulí

$$u(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y\right).$$

Takto definovaná funkce je řešením dané okrajové úlohy na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x < 0\}$.

Podívejme se ještě jednou na parametrické vyjádření řešení dané úlohy. Rovnosti (1.20) jsou parametrickým vyjádřením plochy v prostoru, která může připomínat šroubovou plochu s osou šroubování u (při fixované hodnotě σ se jedná o šroubovici, tj. prostorovou křivku, která „obíhá“ osu u, celou ji oběhne při nárůstu parametru s o hodnotu 2π a po jedné „otočce“ vystoupá o hodnotu σ^2). Plocha je znázorněna na Obrázku 1.1

Řešení charakteristického systému s počátečními podmínkami tedy vyjadřuje diferencovatelnou varietu, která je lokálně grafem řešení rovnice, křivka vyjadřující okrajovou podmínku přitom na této varietě leží. ■

Okrajová úloha pro obecnou rovnici

Budeme hledat řešení rovnice (1.1) s okrajovou podmínkou (1.19). Abychom zjednodušili zápis, zavedeme označení

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.21}$$

a rovnici zapíšeme jako

$$F(x,y,u,p,q) = 0. \tag{1.22}$$

Pro řešení rovnic lineárních v prvních derivacích se ukázal jako užitečný pojem charakteristiky. Je to rovinná křivka s parametrickým vyjádřením

$$x = x(s), \quad y = y(s), \qquad s \in I,$$

která je řešením charakteristického systému, tj. autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x,y).$$

V případě rovnice (1.4) je na charakteristice řešení konstantní. V případě rovnice (1.11) s nenulovou pravou stranou jsme zavedli charakteristickou křivku v prostoru. Je to křivka, která leží na grafu řešení rovnice (1.11) a její průmět do roviny souřadnic x, y je charakteristikou. Jinak řečeno, charakteristická křivka určuje v každém bodě $\big(x(s), y(s)\big)$ charakteristiky funkční hodnotu $u\big(x(s), y(s)\big)$ řešení rovnice (1.11). Charakteristická křivka je trajektorií autonomního systému

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(x,y,u).$$

Rovnici (1.11) lineární v derivacích přepíšeme s použitím označení (1.21) ve tvaru

$$a(x,y)p + b(x,y)q - f(x,y,u) = 0.$$

V případě této rovnice je tedy $F(x,y,u,p,q) = a(x,y)p + b(x,y)q - f(x,y,u)$ a platí

$$a(x,y) = \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,u,p,q), \quad b(x,y) = \frac{\partial F}{\partial q}(x,y,u,p,q),$$

z čehož dále plyne

$$f(x,y,u) = p\frac{\partial F}{\partial p}(x,y,u,p,q) + q\frac{\partial F}{\partial q}(x,y,u,p,q),$$

neboť je splněna rovnice (1.11). Charakteristický systém příslušný k rovnici (1.11) tedy můžeme stručně zapsat

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = F_p, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = F_q, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = pF_p + qF_q. \tag{1.23}$$

Tyto výsledky zobecníme pro rovnici (1.1).

Řešení obecné rovnice vyjádříme tak, že každému bodu charakteristiky přiřadíme hodnotu řešení u a hodnoty obou parciálních derivací p a q. Dostaneme tak křivku v pětirozměrném prostoru, která má parametrické vyjádření

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad u = u(s), \quad p = p(s), \quad q = q(s), \qquad s \in I; \tag{1.24}$$

nazýváme ji *charakteristický pruh rovnice* (1.1). Ten samozřejmě splňuje rovnici (1.22), tj.

$$F\big(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)\big) = 0, \tag{1.25}$$

a budeme požadovat, aby funkce $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(s)$ také splňovaly systém obyčejných diferenciálních rovnic (1.23). Derivováním rovnosti (1.25) podle parametru s dostaneme

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F\big(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)\big) &= F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + F_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + F_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + F_q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = \\
&= F_xF_p + F_yF_q + F_u(pF_p + qF_q) + F_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + F_q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = \\
&= \left(F_x + pF_u + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\right)F_p + \left(F_y + qF_u + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right)F_q.
\end{aligned}$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = -\left(F_x + pF_u\right), \qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = -\left(F_y + qF_u\right). \tag{1.26}$$

Provedené úvahy naznačují, že za *charakteristický systém příslušný k rovnici* (1.22) můžeme považovat systém obyčejných diferenciálních rovnic (1.23), (1.26).

Ještě určíme počáteční podmínky tak, aby řešení charakteristického systému vyjadřovalo řešení počáteční úlohy (1.1), (1.19). Stejně, jako v případě rovnice lineární v derivacích položíme

$$x(0) = x_0 = X(\sigma), \quad y(0) = y_0 = Y(\sigma), \quad u(0) = u_0 = g(\sigma).$$

Počáteční hodnota charakteristického pruhu musí splňovat rovnici (1.22), tj.

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0. \tag{1.27}$$

Dále pro počáteční hodnoty souřadnic p a q charakteristického pruhu platí

$$p_0 = u_x(x_0, y_0) = u_x\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big), \quad q_0 = u_y(x_0, y_0) = u_y\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big).$$

Nyní přepíšeme třetí rovnost z okrajové podmínky (1.19) ve tvaru $g(\sigma) = u\big(X(\sigma), Y(\sigma)\big)$ a zderivujeme podle parametru σ. Dostaneme

$$g'(\sigma) = p_0 X'(\sigma) + q_0 Y'(\sigma). \tag{1.28}$$

Dosažené výsledky můžeme shrnout jako **algoritmus** pro hledání řešení okrajové úlohy (1.1), (1.19): Rovnici přepíšeme do tvaru (1.22) a přiřadíme jí charakteristický systém obyčejných autonomních rovnic (1.23), (1.26) s počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0 = X(\sigma), \quad y(0) = y_0 = Y(\sigma), \quad u(0) = u_0 = g(\sigma), \quad p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0,$$

kde hodnoty p_0 a q_0 jsou řešením soustavy rovnic (1.27), (1.28). První tři složky

$$x = x(s, \sigma), \quad y = y(s, \sigma), \quad u = u(s, \sigma) \tag{1.29}$$

řešení počáteční úlohy pro charakteristický systém vyjadřují parametrické vyjádření (grafu) řešení u dané okrajové úlohy. Pokud lze z prvních dvou rovností (1.29) vyjádřit parametry s, σ pomocí souřadnic x, y, tj. vyjádřit $s = s(x, y)$, $\sigma = \sigma(x, y)$, dosadíme tyto výrazy do třetí rovnosti (1.29) a dostaneme tak explicitní vyjádření řešení dané okrajové úlohy.

Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$u_x^2 - u_y^2 = 4u,$$

které splňuje okrajovou podmínku

$$u(\cos\sigma, \sin\sigma) = \cos 2\sigma$$

V tomto případě je

$$F(x, y, u, p, q) = p^2 - q^2 - 4u,$$

takže

$$F_x = F_y = 0, \quad F_u = -4, \quad F_p = 2p, \quad F_q = -2q,$$

$$pF_p + qF_q = 2p^2 - 2q^2, \quad F_x + pF_u = -4p, \quad F_y + qF_u = -4q.$$

To znamená, že charakteristický systém je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2p, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -2q, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 2(p^2 - q^2), \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = 4p, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = 4q.$$

Dvě poslední rovnice jsou obyčejné lineární homogenní rovnice s konstantním koeficientem. Jejich řešení s obecnými počátečními podmínkami tedy je

$$p = p(s) = p_0 \mathrm{e}^{4s}, \quad q = q(s) = q_0 \mathrm{e}^{4s}.$$

Tyto výrazy dosadíme do prvních tří rovnic charakteristického systému. Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 2p_0 \mathrm{e}^{4s}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -2q_0 \mathrm{e}^{4s}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 2(p_0^2 - q_0^2)\mathrm{e}^{8s}$$

a po integraci

$$x = x_0 + \tfrac{1}{2} p_0 \left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right), \quad y = y_0 - \tfrac{1}{2} q_0 \left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right), \quad u = u_0 + \tfrac{1}{4}(p_0^2 - q_0^2)\left(\mathrm{e}^{8s} - 1\right). \tag{1.30}$$

Parametrické vyjádření počátečních podmínek je $X(\sigma) = \cos\sigma$, $Y(\sigma) = \sin\sigma$, $g(\sigma) = \cos 2\sigma$, takže počáteční hodnoty x_0, y_0 a u_0 jsou dány rovnostmi

$$x_0 = \cos\sigma, \quad y_0 = \sin\sigma, \quad u_0 = \cos 2\sigma \tag{1.31}$$

a počáteční hodnoty p_0 a q_0 splňují rovnice (1.27), (1.28), konkrétně

$$4\cos 2\sigma = p_0^2 - q_0^2, \qquad 2\sin 2\sigma = p_0 \sin\sigma - q_0 \cos\sigma. \tag{1.32}$$

Bezprostředním dosazením ze třetí rovnosti (1.31) a první rovnosti (1.32) do třetí rovnosti (1.30) dostaneme

$$u = \mathrm{e}^{8s} \cos 2\sigma. \tag{1.33}$$

Soustava rovnic (1.32) je tvořena jednou lineární a jednou kvadratickou rovnicí pro dvě neznámé p_0 a q_0. Má tedy dvě řešení.

První řešení soustavy (1.32) je $p_0 = 2\cos\sigma$, $q_0 = -2\sin\sigma$. Dosazením do prvních dvou rovností (1.30) dostaneme

$$x = \mathrm{e}^{4s} \cos\sigma, \qquad y = \mathrm{e}^{4s} \sin\sigma.$$

Umocněním těchto rovností na druhou a jejich odečtením dostaneme

$$x^2 - y^2 = \mathrm{e}^{8s} \cos 2\sigma.$$

Porovnáním se vztahem (1.33) vidíme, že jedno řešení dané okrajové úlohy je dáno výrazem

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Druhé řešení soustavy algebraicko-goniometrických rovnic (1.32) je

$$p_0 = -\frac{2\cos\sigma(1 + 2\sin^2\sigma)}{\cos 2\sigma}, \qquad q_0 = -\frac{2\sin\sigma(1 + 2\cos^2\sigma)}{\cos 2\sigma}.$$

Po dosazení těchto výrazů a výrazů (1.31) do rovností (1.30) dostaneme

$$x = \cos\sigma \left(1 - \frac{1 + 2\sin^2\sigma}{\cos 2\sigma}\left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right)\right) = \frac{\cos\sigma}{\cos 2\sigma}\left(2 - (1 + 2\sin^2\sigma)\mathrm{e}^{4s}\right),$$

$$y = \sin\sigma \left(1 + \frac{1 + 2\cos^2\sigma}{\cos 2\sigma}\left(\mathrm{e}^{4s} - 1\right)\right) = \frac{\sin\sigma}{\cos 2\sigma}\left(-2 + (1 + 2\cos^2\sigma)\mathrm{e}^{4s}\right).$$

Spolu s rovností (1.33) tak máme vyjádřeno druhé řešení dané úlohy v parametrickém tvaru. Vzhledem k tomu, že ve jmenovateli zlomků je výraz $\cos 2\sigma$, omezíme se na hodnoty parametru σ z intervalu $\left(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right)$.

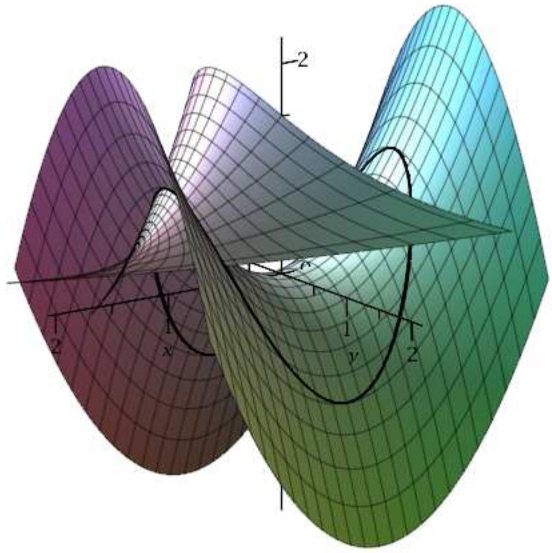
Obě řešení dané úlohy jsou znázorněny na Obrázku 1.2. Tento příklad také ukazuje, že okrajová úloha nemusí být jednoznačně řešitelná. ■

Příklad (geometrická aplikace obecné rovnice)

Najdeme plochu, která prochází přímkou zadanou obecnými rovnicemi

$$x + y = 1, \quad z = 1,$$

a která má vlastnost: průsečík roviny souřadnic xy a normály k této ploše v nějakém bodě M a průmět bodu M do roviny xy má konstantní vzdálenost a.



Obrázek 1.2: Řešení rovnice $u_x^2 - u_y^2 = 4u$ s okrajovou podmínkou $u(\cos\sigma, \sin\sigma) = \cos 2\sigma$. Okrajová podmínka je vyznačena černou křivkou na „sedle“, tj. na grafu řešení daného rovností $u = x^2 - y^2$.

Hledanou plochou bude graf funkce $z = z(x, y)$, pro kterou platí

$$z(x, 1 - x) = 1. \tag{1.34}$$

Z geometrie víme, že směrový vektor normály v bodě $M = \big(x, y, z(x, y)\big)$ má souřadnice

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right),$$

takže parametrická rovnice normály v bodě M je dána parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{\partial z}{\partial x} t, \\ Y &= y + \frac{\partial z}{\partial y} t, \\ Z &= z - t, \end{aligned}$$

kde t je parametr. Průsečík normály s rovinou xy je bod této přímky, kde $Z = 0$, tj. $t = z$. Průmět bodu M do roviny xy má souřadnice $(x, y, 0)$. Pro euklidovskou vzdálenost těchto bodů ma platit

$$\left(z\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(z\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = a^2. \tag{1.35}$$

To už je parciální diferenciální rovnice pro hledanou funkci $z = z(x, y)$. Příslušná okrajová podmínka je (1.34). Řešení této úlohy je však poněkud obtížné, proto zavedeme novou neznámou funkci $u = u(x, y) = z(x, y)^2$. Pak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2z\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2z\frac{\partial z}{\partial y}$$

a úlaha (1.35), (1.34) se transformuje na tvar

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4a^2, \quad u(x, 1 - x) = 1.$$

Máme tedy

$$F(x,y,u,p,q) = p^2 + q^2 - 4a^2, \quad F_x = F_y = F_u = 0,\ F_p = 2p,\ F_q = 2q,$$

charakteristický systém s počátečními podmínkami je

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= 2p, && x(0) = \sigma \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= 2q, && y(0) = 1 - \sigma \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= 2p^2 + 2q^2, && u(0) = 1 \\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} &= 0, && p(0) = p_0 \\
\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} &= 0, && q(0) = q_0;
\end{aligned}$$

přitom $p_0^2 + q_0^2 = 4a^2$, $p_0 - q_0 = 0$, tedy $p_0 = q_0 = \pm\sqrt{2}a$. Odtud a z posledních dvou rovnic dostaneme $p(s) = q(s) = \pm\sqrt{2}a$ a dále

$$\begin{aligned}
x &= \sigma \pm 2\sqrt{2}\,as, \\
y &= 1 - \sigma \pm 2\sqrt{2}\,as, \\
u &= 1 + 8a^2 s.
\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovností vyjádříme

$$x + y = 1 \pm 4\sqrt{2}\,as, \text{ tj. } s = \pm\frac{x+y-1}{4a\sqrt{2}}$$

a dosazením do poslední rovnosti dostaneme

$$u = 1 \pm a\sqrt{2}(x+y-1).$$

Vrátíme se k původní proměnné z, připomeneme si, že $z(x, 1-x) = 1 > 0$ a dostaneme, že hledaná plocha je dána jednou ze dvou rovností

$$z = \sqrt{1 \pm a\sqrt{2}(x+y-1)}.$$

■

Quasilineární rovnice a její geometrická interpretace

Významným speciálním případem obecné rovnice (1.1) je rovnice tvaru

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,u), \tag{1.36}$$

kde a, b jsou spojité funkce tří proměnných. Koeficienty a, b u prvních parciálních derivací hledané funkce na této funkci závisí. Proto výraz na pravé straně rovnice (1.36) nevyjadřuje lineární operátor na množině diferencovatelných funkcí dvou proměnných, ale je pouze „lineárnímu podobný“ nebo „jakoby lineární“. Proto se rovnice (1.36) nazývá *quasilineární.*

V případě quasilineární rovnice (1.36) je

$$F(x,y,u,p,q) = a(x,y,u)p + b(x,y,u)q - f(x,y,u),$$

takže $F_p = a(x,y,u)$, $F_q = b(x,y,u)$, $pF_p + qF_q = f(x,y,u)$. První tři rovnice charakteristického systému (1.23) příslušného k rovnici (1.36) jsou proto tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,y,u), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b(x,y,u), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(x,y,u). \tag{1.37}$$

Tyto rovnice nezávisí na (pomocných) souřadnicích p,q charakteristického pruhu. Pro řešení quasilineární rovnice (1.36) tedy nepotřebujeme rovnice (1.26). Řešení rovnice (1.36) s okrajovou podmínkou (1.19) v parametrickém tvaru tedy dostaneme jako řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (1.37) s počátečními podmínkami

$$x(0) = X(\sigma), \qquad y(0) = Y(\sigma), \qquad u(0) = g(\sigma).$$

Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$(y+u)\frac{\partial u}{\partial x} + (u+x)\frac{\partial u}{\partial y} = x + y,$$

které splňuje okrajovou podmínku

$$u(x,-x) = 2x.$$

Charakteristický systém řešené rovnice je tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= \phantom{x+{}} y + u,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= x \phantom{{}+y} + u,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= x + y.\end{aligned}$$

Jedná se tedy o systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantní maticí

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Její vlastní čísla a příslušné vlastní vektory jsou

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = 2, \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

To znamená, že obecné řešení charakteristického systému je

$$\begin{aligned}x(s) &= A\mathrm{e}^{2s} + B\mathrm{e}^{-s},\\ y(s) &= A\mathrm{e}^{2s} + C\mathrm{e}^{-s},\\ u(s) &= A\mathrm{e}^{2s} - (B+C)\mathrm{e}^{-s}.\end{aligned}$$

Okrajovou podmínku přepíšeme do tvaru $x = \sigma$, $y = -\sigma$, $u = 2\sigma$, ze kterého dostaneme počáteční podmínky pro charakteristický systém

$$x(0) = \sigma, \qquad y(0) = -\sigma, \qquad u(0) = 2\sigma.$$

Řešení charakteristického systému s těmito počátečními podmínkami je

$$\begin{aligned}x(s) &= \tfrac{2}{3}\sigma\mathrm{e}^{2s} + \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s}\left(2\mathrm{e}^{3s} + 1\right),\\ y(s) &= \tfrac{2}{3}\sigma\mathrm{e}^{2s} - \tfrac{5}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s}\left(2\mathrm{e}^{3s} - 5\right),\\ u(s) &= \tfrac{2}{3}\sigma\mathrm{e}^{2s} + \tfrac{4}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s} = \tfrac{1}{3}\sigma\mathrm{e}^{-s}\left(2\mathrm{e}^{3s} + 4\right).\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovností postupně vyjádříme

$$2\mathrm{e}^{3s} = \frac{5x + y}{x - y}, \qquad \tfrac{1}{3}\sigma \mathrm{e}^{-s} = \frac{x - y}{6}$$

a dosadíme do rovnosti třetí. Po úpravě pak dostaneme řešení dané úlohy

$$u(x, y) = \frac{3x - y}{2}.$$

■

Nechť G je diferencovatelná funkce tří proměnných taková, že v každém bodě definičního oboru je aspoň jedna z jejích parciálních derivací nenulová. Z věty o implicitní funkci pak plyne, že rovnost

$$G(x, y, z) = c \tag{1.38}$$

vyjadřuje soustavu ploch v prostoru. Normálový vektor k některé z těchto ploch v jejím libovolném bodě (x_0, y_0, z_0) má souřadnice

$$\boldsymbol{\nu}_1^{\mathsf{T}} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right).$$

Uvažujme nyní další plochu danou rovností

$$z = g(x, y), \tag{1.39}$$

tj. graf funkce g dvou proměnných, která také prochází bodem (x_0, y_0, z_0). Normálový vektor k této ploše má souřadnice

$$\boldsymbol{\nu}_2^{\mathsf{T}} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

Pokud $\boldsymbol{\nu}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\nu}_2 = 0$, pak plocha (1.39) protíná plochu ze soustavy (1.38) kolmo. Pokud tedy v každém přípustném bodě (x, y) platí

$$\frac{\partial G}{\partial x}\big(x, y, g(x, y)\big)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial G}{\partial y}\big(x, y, g(x, y)\big)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial G}{\partial z}\big(x, y, g(x, y)\big),$$

pak plocha (1.39) protíná každou plochu ze soustavy (1.38) kolmo.

Jinak řečeno: Integrální plocha quasilineární rovnice

$$G_x(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + G_y(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = G_u(x, y, u)$$

protíná kolmo soustavu ploch (1.38).

Příklad

Najdeme plochu, která kolmo protíná plochy soustavy

$$xyz = c$$

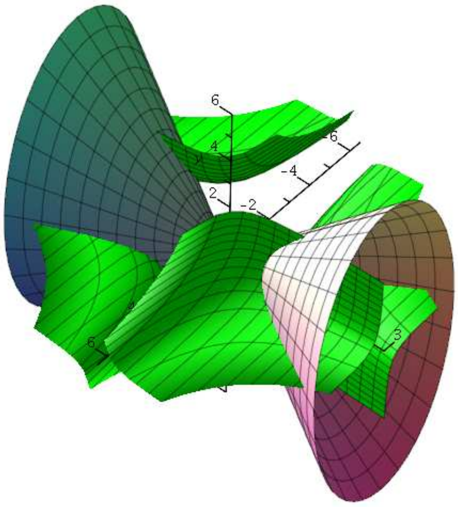
a prochází přímkou $y = 2x$, $z = 0$.

Podle předchozího je hledaná plocha integrální plochou quasilineární rovnice

$$yu\frac{\partial u}{\partial x} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

s okrajovou podmínkou $u(x, 2x) = 0$. Příslušný charakteristický systém s počátečními podmínkami je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = yu, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = xu, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = xy,$$



Obrázek 1.3: Plocha ortogonální k soustavě ploch $xyz = c$ procházející přímkou o parametrických rovnicích $x = \sigma,\ y = 2\sigma,\ z = 0$. Zeleně je zobrazena plocha odpovídající $c = 1$.

$$x(0) = \sigma, \quad y(0) = 2\sigma, \quad u(0) = 0.$$

Vydělením prvních dvou rovnic se zahrnutím počátečních podmínek dostaneme počáteční úlohu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}, \quad y(\sigma) = 2\sigma.$$

Její řešení je implicitně dáno rovností

$$y^2 - x^2 = 3\sigma^2. \tag{1.40}$$

Podobně ze druhé a třetí rovnice s počátečními podmínkami dostaneme úlohu

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{y}{u}, \quad u(2\sigma) = 0$$

s řešením

$$u^2 - y^2 = -4\sigma^2. \tag{1.41}$$

Vydělením rovností (1.40) a (1.41) dostaneme implicitní vyjádření hledané plochy ve tvaru

$$\frac{u^2 - y^2}{y^2 - x^2} = -\tfrac{4}{3}, \text{ neboli } u^2 = \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}y^2$$

a z něho dvě explicitní vyjádření

$$u(x, y) = \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}y^2}.$$

Řešení dané úlohy je znázorněno na Obrázku 1.3. ■

1.2 Rovnice v n nezávisle proměnných

Budeme se zabývat rovnicí

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1.42}$$

kde F je spojitá funkce $2n+1$ proměnných definovaná na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$, která má neprázdný vnitřek. Při označení vektoru nezávisle proměnných[2] $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ a gradientu

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^\mathsf{T}$$

můžeme rovnici (1.42) zapsat úsporněji

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\right) = 0. \tag{1.43}$$

Klasické (silné) řešení rovnice (1.42) je spojitě diferencovatelná funkce u definovaná na množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ takové, že $\bar{\Omega} = \overline{\Omega^\circ}$, přitom funkce u je na vnitřku Ω° množiny Ω diferencovatelná, na uzávěru $\bar{\Omega}$ množiny Ω spojitá a pro všechny body $\boldsymbol{x} \in \Omega$ platí

$$\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x})\big) \in G \quad \text{a} \quad F\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x})\big) = 0.$$

Rovnice lineární v derivacích s nulovou pravou stranou

Rovnice

$$a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

stručněji

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{1.44}$$

nebo ve vektorovém zápisu

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})^\mathsf{T}\nabla u = 0$$

je nejjednodušším speciálním případem obecné rovnice (1.42). Jedná se o bezprostřední zobecnění rovnice (1.4) do vícerozměrného prostoru. Proto budeme její řešení hledat způsobem, který je analogií metody charakteristik popsané v 1.1.1. Rovnici (1.44) přiřadíme autonomní systém n obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.45}$$

Tento systém se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici* (1.44) a jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice* (1.44). Charakteristika je hladká křivka v n-rozměrném prostoru, lze ji zapsat parametrickými rovnicemi

$$x_i = x_i(s), \quad s \in I, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.46}$$

kde I je nějaký reálný interval. Nechť funkce $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je řešením rovnice (1.45). Pro derivaci funkce u na charakteristice (1.46) podle parametru s platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u\big(x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\big(x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)\big)}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\big(\boldsymbol{x}(s)\big)}{\partial x_i} a_i\big(\boldsymbol{x}(s)\big) = 0.$$

To znamená, že na charakteristikách je řešení rovnice (1.44) konstantní. Odtud plyne, že řešení rovnice (1.44) můžeme získat tak, že na každé charakteristice zadáme hodnotu funkce u.

[2] Pokud budeme n-tici reálných čísel považovat za vektor, vždy půjde o vektor sloupcový.

Charakteristika rovnice (1.44) je hladkou křivkou v n-rozměrném prostoru. Takovou křivku můžeme zapsat buď parametricky rovnostmi (1.46) nebo obecně jako průnik $n-1$ nadploch (tj. $(n-1)$-rozměrných diferencovatelných variet) v n-rozměrném prostoru, tedy rovnostmi

$$v_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{1.47}$$

kde v_i jsou diferencovatelné funkce n proměnných. Rovnosti (1.47) někdy můžeme získat z parametrického vyjádření (1.46) charakteristik eliminací parametru s.

Jiná možnost, jak získat obecné vyjádření (1.47) charakteristik rovnice (1.44) spočívá ve vydělení rovnic charakteristického systému (1.45); dostaneme tak $n-1$ obyčejných diferenciálních rovnic, např.

$$\frac{\mathrm{d}x_{i+1}}{\mathrm{d}x_i} = \frac{a_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad n = 1, 2, \dots, n-1,$$

nebo

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_1} = \frac{a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad n = 2, 3, \dots, n.$$

Obecné řešení těchto systémů rovnic, které závisí na $n-1$ konstantách, zapíšeme v implicitním tvaru (1.47). Předchozí obyčejné diferenciální rovnice můžeme také jednotně zapsat ve tvaru rovností diferenciálů

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{\mathrm{d}x_n}{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \tag{1.48}$$

Hodnotu funkce u, která je řešením lineární rovnice (1.44), vyjádříme na charakteristikách pomocí diferencovatelné funkce Φ, která je funkcí $n-1$ proměnných. Řešení rovnice (1.44) tedy píšeme ve tvaru

$$u(\boldsymbol{x}) = \Phi\big(v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}), \dots, v_{n-1}(\boldsymbol{x})\big). \tag{1.49}$$

Provedené úvahy ukazují, že pro rovnici (1.44) lze zformulovat výsledek, který je bezprostředním zobecněním Tvrzení 1 platného pro rovnice ve dvou nezávisle proměnných.

Tvrzení 2. Nechť funkce $v_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, jsou diferencovatelné funkce takové, že rovnosti (1.47) jsou implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (1.45) příslušného k rovnici (1.44) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení sytému obyčejných diferenciálních rovnic (1.48)). Je-li Φ libovolná diferencovatelná funkce $n-1$ proměnných taková, že její definiční obor obsahuje kartézský součin oborů hodnot funkcí v_i, pak funkce u definovaná rovností (1.49) je řešením rovnice (1.44).

Důkaz: Na řešení (1.46) charakteristického systému (1.45) jsou splněny rovnosti (1.47). Tedy pro každý index j platí

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v_j\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_j\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big)}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i(s)}{\mathrm{d}s} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_j\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big)}{\partial x_i} a_i\big(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)\big), \end{aligned}$$

stručně

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} a_i(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi\big(v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}), \dots, v_{n-1}(\boldsymbol{x})\big) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi\big(v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}), \dots, v_{n-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\partial v_j} \frac{\partial v_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i},$$

takže

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi\big(v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}), \dots, v_{n-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\partial v_j} \frac{\partial v_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi\big(v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}), \dots, v_{n-1}(\boldsymbol{x})\big)}{\partial v_j} \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial v_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = 0.$$

□

Povšimněme si, že na levé straně rovnice (1.44) je skalární součin vektoru $\boldsymbol{a}$ s gradientem hledané funkce u. Gradient je lineární zobrazení, skalární součin také. Složení lineárních zobrazení je lineární. Odtud plyne, že rovnice (1.44) také splňuje *princip superpozice:* Jsou-li $u_1, u_2, \dots, u_k$ řešení rovnice (1.44), pak také jejich libovolná lineární kombinace je řešením této rovnice. Jinak řečeno, množina všech řešení rovnice (1.44) tvoří reálný vektorový prostor.

Příklad

$$(y - 2x - 2z)\frac{\partial u}{\partial x} + (x - 2y + 2z)\frac{\partial u}{\partial y} + (x - y + y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Příslušný charakteristický systém

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= -2x + y - 2z,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= x - 2y + 2z,\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} &= x - y + z
\end{aligned}$$

je lineární homogenní systém obyčejných diferenciálních rovnic s konstantní maticí. Můžeme tedy explicitně napsat jeho řešení

$$\begin{aligned}
x &= (2As + 2B)\mathrm{e}^{-s},\\
y &= (-2As + 2C)\mathrm{e}^{-s},\\
z &= (-2As + C - B - A)\mathrm{e}^{-s};
\end{aligned}$$

přitom A, B, C jsou integrační konstanty. Druhou rovnost vydělíme rovností první a dostaneme

$$\frac{y}{x} = \frac{-As + C}{As + B}, \quad \text{tj.} \quad \frac{x + y}{x} = \frac{B + C}{As + B},$$

třetí rovnost vydělíme první a dostaneme

$$\frac{z}{x} = \frac{-2As + C - B - A}{As + B}, \quad \text{tj.} \quad \frac{x + z}{x} = \frac{C + B - A}{2(As + B)},$$

tyto rovnosti navzájem vydělíme a dostaneme

$$\frac{x + y}{x + z} = const.$$

Analogicky (první a třetí rovnost tentokrát dělíme druhou) dostaneme

$$\frac{x + y}{z - y} = const.$$

Řešení je tedy tvaru $u(x, y) = \Phi\left(\frac{x+y}{x+z}, \frac{x+y}{z-y}\right)$, kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. ■

Na charakteristikách je řešení rovnice (1.44) konstantní. Proto konkrétní řešení (partikulární řešení) této rovnice můžeme získat tak, že na „začátku“ každé charakteristiky určíme funkční hodnotu řešení. „Začátky“ charakteristik lze určit tak, že v prostoru zavedeme nějakou nadplochu ($(n-1)$-rozměrnou varietu), která protíná každou charakteristiku právě jednou; průsečík této nadplochy s charakteristikou budeme považovat za „začátek charakteristiky“. Nadplocha s uvedenou vlastností se nazývá *okraj pro rovnici* (1.44).

Okraj může být zadán parametrickými rovnicemi; poněvadž se jedná o $(n-1)$-rozměrnou nadplochu, závisí na $n-1$ parametrech. Parametrické rovnice okraje tedy jsou

$$x_i = X_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kde parametry $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ jsou z nějaké podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$, která má neprázdný vnitřek. Průsečík konkrétní charakteristiky s okrajem je určen konkrétní sadou parametrů. Hodnoty řešení u rovnice (1.44) tedy zadáváme pro tuto sadu parametrů. Jinak řečeno, zadáváme *okrajovou podmínku* ve tvaru

$$u\big(X_1(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), X_2(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, X_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})\big) = \\ = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}). \quad (1.50)$$

Okrajovou úlohu, tj. rovnici (1.44) s podmínkou (1.50), řešíme tak, že k charakteristickému systému (1.45) přidáme počáteční podmínky

$$x_i(0) = X_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.51)$$

Jednotlivé složky řešení Cauchyovy úlohy (1.45) závisí na nezávisle proměnné s a na parametrech $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, tj.

$$x_i = x_i(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}). \quad (1.52)$$

Rovnosti (1.52) a rovnost (1.50) přepsaná do tvaru $u = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ představují parametrické vyjádření (grafu) řešení okrajové úlohy (1.44), (1.50).

Na rovnosti (1.52) se také můžeme dívat jako na systém n rovnic pro n neznámých, kterými jsou parametry $s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. Pokud se z něho podaří explicitně vyjádřit parametry okraje $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ v závislosti na souřadnicích $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj.

$$\sigma_j = \sigma_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

pak je lze dosadit do okrajové podmínky (1.50). Takovým způsobem dostaneme řešení okrajové úlohy (1.44), (1.50) ve tvaru

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = g\big(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_{n-1}(x_1, \dots, x_n)\big).$$

Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$(z + y - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (z + x - y)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

s okrajovou podmínkou

$$u(x, y, a) = 4a^4 xy,$$

kde a je nějaká reálná konstanta.

Charakteristický systém (1.45) je v tomto případě tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= -x+y+z, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= x-y+z, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} &= \phantom{-x-y+{}}z. \end{aligned}$$

Jedná se o lineární homogenní systém obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, jeho obecné řešení je tvaru

$$\begin{aligned} x &= A\mathrm{e}^s + B\mathrm{e}^{-2s} + C, \\ y &= A\mathrm{e}^s - B\mathrm{e}^{-2s} + C, \\ z &= A\mathrm{e}^s. \end{aligned}$$

Počáteční podmínky (1.51) odpovídající dané okrajové podmínce jsou

$$x(0) = \sigma_1, \quad y(0) = \sigma_2, \quad z(0) = a.$$

Pro integrační konstanty A, B, C tak dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} A+B+C &= \sigma_1, \\ A-B+C &= \sigma_2, \\ A \qquad &= a, \end{aligned}$$

která má řešení $A = a$, $B = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, $C = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a$. Řešení (1.52) Cauchyovy úlohy pro charakteristický systém je

$$\begin{aligned} x &= a\mathrm{e}^s + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{e}^{-2s} + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a, \\ y &= a\mathrm{e}^s - \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{e}^{-2s} + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a, \\ z &= a\mathrm{e}^s. \end{aligned}$$

Bezprostředně vidíme $a\mathrm{e}^s = z$ a tedy $\mathrm{e}^{-2s} = a^2/z^2$. Po dosazení do prvních dvou rovností dostaneme systém rovnic pro parametry σ_1, σ_2 ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= z + \frac{a^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{2z^2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - a, \\ y &= z - \frac{a^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{2z^2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - a, \end{aligned}$$

nebo po úpravě

$$\begin{aligned} (z^2 + a^2)\sigma_1 + (z^2 - a^2)\sigma_2 &= 2z^2(x - z + a), \\ (z^2 - a^2)\sigma_1 + (z^2 + a^2)\sigma_2 &= 2z^2(y - z + a). \end{aligned}$$

Determinant této soustavy lineárních rovnic je roven $4a^2z^2$, takže pro $a \neq 0$ dostaneme

$$\sigma_1 = \frac{1}{2a^2}\big((x + y - 2z + 2a)a^2 + (x - y)z^2\big), \qquad \sigma_2 = \frac{1}{2a^2}\big((x + y - 2z + 2a)a^2 - (x - y)z^2\big).$$

Parametrické vyjádření okrajové podmínky (1.50) je

$$u(\sigma_1, \sigma_2, a) = 4a^4\sigma_1\sigma_2.$$

Do této rovnosti dosadíme vypočítané hodnoty parametrů σ_1, σ_2 a dostaneme řešení dané úlohy ve tvaru

$$u(x, y, z) = a^4(x + y - 2z + 2a)^2 - (x - y)^2z^4.$$

Tato funkce je řešením úlohy pro nenulovou hodnotu parametru a. V případě $a = 0$ je řešením nulová funkce, $u \equiv 0$. ■

Příklad

Najdeme obecné řešení rovnice

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{1.53}$$

Charakteristický systém je v tomto případě

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = x_i, \quad , i = 1, 2, \ldots, n.$$

To vlastně není systém, ale n nezávislých rovnic. Jeho řešení je $x_i(s) = C_i \mathrm{e}^s$. Z toho vidíme, že pro každé $i = 2, 3, \ldots, n$ platí

$$\frac{x_{i-1}(s)}{x_i(s)} = \frac{C_{i-1}}{C_i} = const,$$

takže obecné řešení dané rovnice je tvaru

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

kde Φ je nějaká diferencovatelná funkce $n-1$ proměnných.

To ovšem není jediné možné vyjádření řešení dané parciální rovnice. Stejně snadno můžeme z řešení charakteristického systému odvodit, že pro libovolnou hodnotu $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a každý index $i = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, j+2, \ldots, n$ platí

$$\frac{x_i(s)}{x_j(s)} = \frac{C_i}{C_j} = const,$$

takže řešení dané parciální diferenciální rovnice je tvaru

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Psi\left(\frac{x_1}{x_j}, \frac{x_2}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right),$$

kde Ψ je opět nějaká diferencovatelná funkce $n-1$ proměnných.

Nyní můžeme k rovnici (1.53) přidat okrajovou podmínku

$$u(1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_2 x_3 \cdots x_n. \tag{1.54}$$

Dosadíme-li tuto rovnost do druhého vyjádření řešení rovnice (1.53), v němž zvolíme $j = 1$, dostaneme

$$x_2 x_3 \cdots x_n = \Psi(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Z toho snadno vidíme, že za funkci Ψ můžeme vzít funkci danou předpisem

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{n-1}$$

a řešení úlohy (1.53), (1.54) dostaneme ve tvaru

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_2 x_3 \cdots x_n}{x_1^{n-1}}.$$

Z prvního uvedeného řešení rovnice rovnice (1.53) není řešení okrajové úlohy vidět. ∎

Quasilineární rovnice

Řešení rovnice

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x_1, \ldots, x_n, u),$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(\boldsymbol{x}, u) \tag{1.55}$$

případně ve vektorovém zápisu

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, u)^{\mathsf{T}} \nabla u = f(\boldsymbol{x}, u),$$

budeme hledat v implicitním tvaru

$$V(\boldsymbol{x}, u) = 0, \tag{1.56}$$

kde V je nějaká diferencovatelná funkce $n+1$ proměnných.

Budeme si představovat, že řešení známe. Nechť tedy $u = u(\boldsymbol{x})$ je řešení rovnice (1.55), které je implicitně popsáno rovností (1.56). Pak platí

$$V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big) = 0.$$

Tuto rovnost parciálně zderivujeme podle každé z proměnných x_i. Dostaneme

$$\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial x_i} + \frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial u}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dále vynásobíme i-tou rovnost výrazem $a_i\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)$ a výsledné rovnosti sečteme. Výsledkem je rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial u} = 0$$

a poněvadž funkce u je řešením rovnice (1.55), můžeme tuto rovnost upravit na tvar

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial x_i} + f\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial V\big(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})\big)}{\partial u} = 0.$$

Vidíme, že funkce V je řešením rovnice v $n+1$ nezávisle proměnných, která je lineární v derivacích a má nulovou pravou stranu. Stručně: funkce V, která rovností (1.56) implicitně popisuje řešení quasilineární rovnice (1.55), je řešením parciální diferenciální rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial V}{\partial x_i} + f(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

To je rovnice, kterou jsme se zabývali v předchozí části. Máme tedy následující **algoritmus** pro hledání řešení quasilineární rovnice (1.55).

K rovnici (1.55) přiřadíme *charakteristický systém* obyčejných autonomních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} &= a_i(x_1, \ldots, x_n, u), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= f(x_1, \ldots, x_n, u). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Jeho trajektorie vyjádříme v obecném tvaru jako průnik n nadploch

$$v_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Řešení rovnice (1.55) je pak implicitně dáno rovností

$$\Phi\big(v_1(x_1, \ldots, x_n, u), v_2(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, v_n(x_1, \ldots, x_n, u)\big) = 0,$$

kde Φ je libovolná diferencovatelná funkce n proměnných.

Rovnici (1.55) s okrajovou podmínkou (1.50) řešíme tak, že najdeme řešení charakteristického systému (1.57) s počátečními podmínkami (1.51) doplněnými o podmínku

$$u(0) = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}).$$

Toto řešení závisí na nezávisle proměnné s a parametrech $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, tj.

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(s, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ u &= u(s, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n). \end{aligned}$$

Těmito rovnostmi je parametricky zadáno řešení okrajové úlohy (1.55), (1.50). V některých jednoduchých případech lze parametry $s, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ eliminovat a řešení úlohy vyjádřit explicitně.

Povšimněme si, že algoritmus řešení okrajové úlohy (1.55), (1.50) je bezprostředním zobecněním postupu při řešení úlohy (1.36), (1.19) pro funkci ve dvou nezávisle proměnných.

Okrajová úloha pro obecnou rovnici

Dosud provedené úvahy napovídají, že řešení obecné rovnice (1.42) pro funkci u v n nezávisle proměnných s okrajovou podmínkou (1.50) by bylo možné hledat stejným postupem, jako řešení úlohy (1.22), (1.19).

Pro zjednodušení zápisu zavedeme označení

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ i = i, 2, \dots, n, \quad \boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^\mathsf{T} = \nabla u,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})^\mathsf{T}, \quad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\sigma}) = \big(X_1(\boldsymbol{\sigma}), X_2(\boldsymbol{\sigma}), \dots, X_n(\boldsymbol{\sigma})\big)^\mathsf{T}.$$

Rovnice (1.42), nebo ekvivalentní rovnice (1.43), s okrajovou podmínkou (1.50) je pak tvaru

$$F(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{p}) = 0, \quad u\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\sigma})\big) = g(\boldsymbol{\sigma}). \tag{1.58}$$

K rovnici přiřadíme *charkteristický systém* obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} &= F_{p_i}(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{p}), && i = 1, 2, \dots, n,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{p}), &&\\
\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} &= -F_{x_i}(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{p}) - p_i F_u(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{p}), && i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Věta 2. *Nechť $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{\sigma})$, $u = u(s, \boldsymbol{\sigma})$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s, \boldsymbol{\sigma})$ je řešení charakteristického systému (1.59) splňující počáteční podmínky*

$$\begin{aligned}
x_i(0) &= X_i(\boldsymbol{\sigma}), && i = 1, 2, \dots, n,\\
u(0) &= g\big(X_i(\boldsymbol{\sigma})\big), &&\\
p_i(0) &= p_{0i}, && i = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{1.60}$$

kde hodnoty $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}$ jsou řešením soustavy rovnic

$$F\big(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\sigma}), g(\boldsymbol{\sigma}), p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}\big) = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial \sigma_j}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i=1}^{n} p_{0i} \frac{\partial X_i}{\partial \sigma_j}(\boldsymbol{\sigma}),\ j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{1.61}$$

Dále nechť funkce F je spojitě diferencovatelná a funkce g je spojitá. Pak prvních $n+1$ složek řešení počáteční úlohy (1.59), (1.60) je parametrickým vyjádřením řešení okrajové úlohy (1.58) v okolí okraje.

Důkaz: Nechť řešení uvedené počáteční úlohy (1.59), (1.60) s parametry $\boldsymbol{\sigma}$ je definováno na intervalu $[0, \delta)$. Položme

$$\Omega = \{\boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^n : 0 \le s < \delta\}.$$

Tato množina má zřejmě vlastnost $\bar{\Omega} = \overline{\Omega^\circ}$ požadovanou pro definičním obor řešení rovnice (1.42).

Ze spojitosti pravých stran systému (1.59) plyne, že všechny složky řešení tohoto systému (jakožto funkce proměnné s) jsou spojitě diferencovatelné a z toho dále plyne, že funkce u je na množině $\bar{\Omega}$ spojitá a uvnitř této množiny diferencovatelná.

Z počáteční podmínky (1.60) a z první rovnosti (1.61) plyne, že

$$F\big(\boldsymbol{x}(0, \boldsymbol{\sigma}), u(0, \boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{p}(0, \boldsymbol{\sigma})\big) = 0$$

a dále z (1.59) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} + F_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} F_{p_i} + F_u \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} - \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} (F_{x_i} + p_i F_u) = 0.$$

To znamená, že $F\big(\boldsymbol{x}(s,\boldsymbol{\sigma}), u(s,\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{p}(s,\boldsymbol{\sigma})\big) = 0$ pro všechny přípustné hodnoty proměnné s. $\square$

Prvních $n+1$ složek řešení počáteční úlohy (1.59), (1.60) jsou funkce jedné proměnné s a $n-1$ parametrů $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. Jako parametrické vyjádření řešení okrajové úlohy (1.58) však tyto funkce považujeme za funkce n proměnných,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}),\\ x_2 &= x_2(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}),\\ &\vdots\\ x_n &= x_n(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}),\\ u &= u(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}). \end{aligned}$$

Cvičení

V úlohách 1–6 najděte obecné řešení rovnice.

1. $x^2 u_x + y^2 u_y = 0$
2. $(1+x^2)u_x + xyu_y = 0$
3. $\dfrac{z}{x-y}u_x + \dfrac{z}{y-x}u_y + z^2 u_z = 0$
4. $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2^2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3^3\dfrac{\partial u}{\partial x_3} + \dots + x_n^n\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0$
5. $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$
6. $xuu_x + yuu_y + xy = 0$

V úlohách 7–12 najděte řešení okrajové úlohy.

7. $2u_x + 3u_y = 0,\ \ u(0,y) = 4y$
8. $(z-y)u_x + (x-z)u_y + (y-x)u_z = 0,\ \ u(0,y,z) = yz$
9. $u(x+u)u_x - y(y+u)u_y = 0,\ \ u(1,y) = \sqrt{y}$
10. $(x+u)u_x + yu_y = u + y^2,\ \ u(x,1) = x$
11. $u_x^2 - u_y^2 = u,\ \ u(1,y) = 1$
12. $u_t = -(u_x)^2,\ \ u(0,x) = ax$

Výsledky:

1. $u(x,y) = \Phi\left(\dfrac{x-y}{xy}\right)$
2. $u(x,y) = \Phi\left(\dfrac{y^2}{1+x^2}\right)$
3. $u(x,y,z) = \Phi\big(x+y, (x-y)^2 - \ln z^4\big)$
4. $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi\left(\dfrac{1}{x_2} + \ln x_1, \dfrac{1}{2x_3^2} - \dfrac{1}{x_2}, \dfrac{1}{3x_4^3} - \dfrac{1}{2x_3^2}, \dots, \dfrac{1}{(n-1)x_n^{n-1}} - \dfrac{1}{(n-2)x_{n-1}^{n-2}}\right)$
5. $u(x,y) = xy + \Phi(x^2+y^2)$
6. $\Phi\left(\dfrac{x}{y}, xy + u^2\right) = 0$ (implicitní popis)
7. $u(x,y) = 4y - 6x$

8. $u(x,y,z) = xy + yz + zx$
9. $u(x,y) = \sqrt{xy}$
10. $u(x,y) = \dfrac{x + y^2 \ln y}{1 + \ln y}$
11. $\big(4u - (x-3)^2\big)\big(4u - (x-1)^2\big) = 0$ (implicitní popis)
12. $u(t,x) = ax - a^2 t$

Kapitola 2

Rovnice druhého řádu lineární ve druhých derivacích

2.1 Rovnice ve dvou nezávisle proměnných

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2.1}$$

kde A, B, C jsou spojité reálné funkce definované na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$ s neprázdným vnitřkem a funkce F je definována na množině $G \times \mathbb{R}^3$. Přitom budeme předpokládat, že pro každý bod $(x,y) \in G$ platí

$$|A(x,y)| + |B(x,y)| + |C(x,y)| > 0,$$

tj. funkce A, B, C nejsou současně nulové. Pro každý bod $(x,y) \in G$ můžeme zavést matici

$$\mathsf{M}(x,y) = \begin{pmatrix} A(x,y) & B(x,y) \\ B(x,y) & C(x,y) \end{pmatrix}.$$

Tato matice je evidentně symetrická.

Nechť $(x_0, y_0) \in G$. Rovnice (2.1) se nazývá

hyperbolická v bodě (x_0, y_0), je-li matice $\mathsf{M}(x_0, y_0)$ indefinitní,

parabolická v bodě (x_0, y_0), je-li matice $\mathsf{M}(x_0, y_0)$ pozitivně nebo negativně semidefinitní,

eliptická v bodě (x_0, y_0), je-li matice $\mathsf{M}(x_0, y_0)$ pozitivně nebo negativně definitní.

Ze známých vět z lineární algebry plyne, že rovnice (2.1) je

$$\left.\begin{array}{l} \text{hyperbolická} \\ \text{parabolická} \\ \text{eliptická} \end{array}\right\} \text{ v bodě } (x_0, y_0) \in G \text{ právě tehdy, když } \left\{\begin{array}{l} B(x_0,y_0)^2 > A(x_0,y_0)C(x_0,y_0), \\ B(x_0,y_0)^2 = A(x_0,y_0)C(x_0,y_0), \\ B(x_0,y_0)^2 < A(x_0,y_0)C(x_0,y_0). \end{array}\right.$$

Rovnice (2.1) se nazývá *hyperbolická,* resp. *parabolická,* resp. *eliptická, na otevřené množině* $H \subseteq G$, je-li hyperbolická, resp. parabolická, resp. eliptická, v každém bodě množiny H.

2.1.1 Charakteristiky a kanonický tvar rovnice

Budeme hledat transformaci nezávisle proměnných, která rovnici (2.1) převede na nějaký jednodušší tvar; v ideálním případě na takový, aby bylo možné najít nějaké její řešení.

Nechť $H \subseteq G$ je otevřená množina. Buďte dále $\varphi, \psi : H \to \mathbb{R}$ takové funkce, že

$$\varphi_x(x,y)\psi_y(x,y) - \varphi_y(x,y)\psi_x(x,y) \neq 0$$

pro všechna $(x,y) \in H$. Pak transformace

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y) \tag{2.2}$$

bijektivně zobrazí množinu H na otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^2$ a rovnici (2.1) transformuje na tvar (využíváme formule pro druhé parciální derivace složené funkce)

$$a(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2b(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + c(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \tag{2.3}$$

kde

$$\begin{aligned}
a &= A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = \varphi_y^2\left(A\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2B\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + C\right),\\
b &= A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y, \qquad (2.4)\\
c &= A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = \psi_y^2\left(A\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2 - 2B\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + C\right);
\end{aligned}$$

naznačenou úpravu výrazu pro funkce a nebo c lze samozřejmě provést pouze v případě, že $\varphi_y \neq 0$ nebo $\psi_y \neq 0$.

Při hledání inversní transformace k transformaci (2.2) řešíme soustavu rovnic (2.2) pro neznámé x, y. Přitom první, resp. druhou, z rovnic je implicitně dána funkce $y_1 = y_1(x)$, resp. $y_2 = y_2(x)$, pro jejíž derivaci platí

$$y_1' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}, \quad \text{resp.} \quad y_2' = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$$

(podle vzorce pro derivaci implicitně zadané funkce, viz např. Z Došlá, O Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU 1999, str. 96).

Obyčejná diferenciální rovnice v implicitním tvaru (nerozřešená vzhledem k derivaci)

$$A(x,y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2B(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + C(x,y) = 0 \tag{2.5}$$

se nazývá *charakteristická rovnice parciální diferenciální rovnice* (2.1). Její řešení se nazývají *charakteristiky* této rovnice.

Rovnice (2.5) je vlastně kvadratickou rovnicí pro neznámou y'. Tato kvadratická rovnice má dva reálné různé kořeny, pokud $B^2 > AC$, tj. pokud je rovnice (2.1) hyperbolická; má dvojnásobný reálný kořen, pokud je (2.1) parabolická; nemá reálný kořen, pokud je rovnice (2.1) eliptická.

Hyperbolická rovnice

V tomto případě se implicitní diferenciální rovnice (2.5) rozpadá na dvě rovnice explicitní

$$y' = \frac{B(x,y) + \sqrt{(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y)}}{A(x,y)} \quad \text{a} \quad y' = \frac{B(x,y) - \sqrt{(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y)}}{A(x,y)}. \tag{2.6}$$

Jsou-li $\varphi(x,y) = const$ a $\psi(x,y) = const$ implicitní popisy řešení těchto obyčejných diferenciálních rovnic, tedy jsou zápisem charakteristik hyperbolické rovnice (2.1), pak

$$-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \quad \text{a} \quad -\frac{\psi_x}{\psi_y}$$

jsou kořeny charakteristické rovnice (2.5), takže v (2.4) dostaneme $a = c = 0$. *Kanonický tvar hyperbolické rovnice* (2.1) je

$$u_{\xi\eta} = \tilde{F}_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Příklad

Uvažujme rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2.7}$$

V této rovnici je $A(x, y) = x^2$, $B(x, y) = 0$, $C(x, y) = -y^2$. To znamená, že pro každou dvojici $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takovou, že $xy \neq 0$, platí

$$B(x, y)^2 = 0 > -x^2y^2 = A(x, y)C(x, y)$$

a rovnice je tedy hyperbolická na vnitřku každého z kvadrantů.

Charakteristická rovnice příslušná k rovnici (2.7) je tvaru

$$x^2 \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - y^2 = 0.$$

Z ní vyjádříme derivaci a dostaneme dvě explicitní rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm \frac{y}{x},$$

které mají separované proměnné a jejich řešení jsou implicitně dána rovnostmi

$$\ln |y| \mp \ln |x| = const.$$

Charakteristiky tedy splňují rovnosti

$$\varphi(x, y) = xy = const, \qquad \psi(x, y) = \frac{y}{x} = const.$$

Zavedeme proto nové nezávisle proměnné ξ, η vztahy

$$\xi = xy, \qquad \eta = \frac{y}{x}. \tag{2.8}$$

Uvnitř prvního kvadrantu je $x > 0$, $y > 0$ a pro tyto hodnoty je také $\xi > 0$, $\eta > 0$. Transformace (2.8) tedy převádí vnitřek prvního kvadrantu na sebe. Inversní transformace je dána rovnostmi

$$x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \qquad y = \sqrt{\xi\eta}.$$

Dále platí

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = y = \sqrt{\xi\eta}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = -\eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{\eta}{\xi}},$$

takže podle řetězového pravidla je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \sqrt{\xi\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\xi\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{\xi\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \\
&= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\xi\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\right)\sqrt{\xi\eta} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\xi\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(-\eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\right) = \\
&= \xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta^3}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\eta^2}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial \eta}.
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi\eta}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2\xi}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}\right)\sqrt{\frac{\xi}{\eta}} + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2\eta}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi\eta}}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} = \\
&= \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}
$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (2.7)

$$
\frac{\xi}{\eta}\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta^3}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\eta^2}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - \xi\eta\left(\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0
$$

a upravíme

$$
\begin{aligned}
-4\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2\eta\frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}.
\end{aligned}
$$

Tato rovnice je kanonickým tvarem dané rovnice (2.7). Zavedeme v ní substituci $v = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ a dostaneme

$$
\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2\xi}v.
$$

Tuto parciální diferenciální rovnici můžeme považovat za obyčejnou, neboť se v ní objevuje jediná derivace podle proměnné ξ. Řešení této obyčejné lineární homogenní rovnice je $v = \sqrt{\xi}\,\phi(\eta)$; přitom ϕ je „integrační konstanta“, která nezávisí na proměnné ξ, ale může záviset na proměnné η. Dostáváme tak rovnost

$$
\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sqrt{\xi}\,\phi(\eta),
$$

kterou zintegrujeme podle proměnné η a dostaneme

$$
u = \sqrt{\xi}\,\Phi(\eta) + \Psi(\xi).
$$

Funkce Φ je primitivní k funkci ϕ a funkce Ψ je „integrační konstanta“, která může záviset na nezávisle proměnné ξ.

Návratem k původním proměnným dostaneme obecné řešení rovnice (2.7) ve tvaru

$$u(x,y) = \sqrt{xy}\,\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy);$$

přitom Φ, Ψ jsou libovolné dvakrát diferencovatelné funkce jedné proměnné. ■

Parabolická rovnice

V tomto případě se implicitní obyčejná diferenciální rovnice (2.5) redukuje na jednu explicitní rovnici

$$y' = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}. \tag{2.9}$$

Pokud je v tomto případě řešení rovnice (2.9) implicitně zapsáno rovností $\psi(x,y) = const$, pak v rovnostech (2.4) dostaneme $c = 0$ a dále platí

$$-\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{B}{A}, \quad \text{tj. } \psi_x = -\frac{B}{A}\psi_y$$

Je-li tedy $\varphi(x,y)$ libovolná funkce nezávislá na funkci ψ, pak v rovnostech (2.4) dostaneme

$$b = -B\varphi_x\psi_y + B\left(\varphi_x\psi_y - \frac{B}{A}\varphi_y\psi_y\right) + C\varphi_y\psi_y = \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\varphi_y\psi_y = \frac{AC - B^2}{A}\varphi_y\psi_y = 0,$$

neboť $B^2 = AC$. Většinou stačí volit $\varphi(x,y) = x$ nebo $\varphi(x,y) = y$. *Kanonický tvar parabolické rovnice* (2.1) je

$$u_{\xi\xi} = \tilde{F}_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Příklad

Uvažujme rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

V této rovnici je $A(x,y) = x^2$, $B(x,y) = -xy$, $C(x,y) = y^2$, takže

$$B(x,y)^2 = x^2y^2 = A(x,y)C(x,y)$$

a rovnice je parabolická. Příslušná charakteristická rovnice je tvaru

$$x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = 0$$

(pozor na znaménko koeficientu u první derivace). Z charakteristické rovnice vyjádříme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}.$$

Tato obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými má řešení dané implicitně rovností $xy = const$. Zavedeme tedy nové nezávisle proměnné ξ, η vztahy

$$\xi = y, \qquad \eta = xy.$$

Pak je

$$x = \frac{\eta}{\xi}, \qquad y = \xi, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \xi, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\eta}{\xi}$$

a dále

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \xi\frac{\partial u}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \xi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \xi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta^2}{\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Po dosazení do rovnice a úpravě dostaneme kanonický tvar dané rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Tuto rovnici můžeme považovat za obyčejnou diferenciální rovnici, neboť se v ní vyskytují derivace podle jediné proměnné ξ. Položíme

$$v = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

a dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{1}{\xi}v.$$

Tato rovnice má řešení

$$v = \frac{1}{\xi}\Phi(\eta),$$

takže

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi}\Phi(\eta).$$

Integrací podle proměnné ξ dostaneme $u = \Phi(\eta)\ln\xi + \Psi(\eta)$. Návrat k původním proměnným dá řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x,y) = \Phi(xy)\ln y + \Psi(xy),$$

kde Φ a Ψ jsou dvakrát diferencovatelné funkce jedné proměnné. ■

Eliptická rovnice

Pokud je rovnice (2.1) eliptická, nemá reálné charakteristiky. Pro zjednodušení zápisu nejprve označíme reálnou a imaginární část kořenů příslušné charakteristické rovnice symboly

$$\mu(x,y) = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}, \quad \nu(x,y) = \frac{\sqrt{A(x,y)C(x,y) - \big(B(x,y)\big)^2}}{A(x,y)}.$$

Dále nechť $\Phi(x,y) = C_1$, resp. $\Psi(x,y) = C_2$, je implicitní popis řešení rovnice

$$y' = \mu(x,y) + \mathrm{i}\nu(x,y), \text{ resp. } y' = \mu(x,y) - \mathrm{i}\nu(x,y),$$

tj.

$$-\frac{\Phi_x}{\Phi_y} = \mu + \mathrm{i}\nu, \quad -\frac{\Psi_x}{\Psi_y} = \mu - \mathrm{i}\nu;$$

Funkce Φ a Ψ jsou komplexními funkcemi reálných nezávisle proměnných x a y. Nyní zavedeme nové nezávisle proměnné

$$\xi = \varphi = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi), \quad \eta = \psi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi - \Psi).$$

Pak platí

$$\varphi_x = \frac{1}{2}(\Phi_x + \Psi_x) = \frac{1}{2}(-\mu\Phi_y - \mathrm{i}\nu\Phi_y - \mu\Psi_y + \mathrm{i}\nu\Psi_y) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\nu(\Phi_y - \Psi_y) - \frac{1}{2}\mu(\Phi_y + \Psi_y) = \nu\psi_y - \mu\varphi_y,$$

$$\psi_x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi_x - \Psi_x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(-\mu\Phi_y - \mathrm{i}\nu\Phi_y + \mu\Psi_y - \mathrm{i}\nu\Psi_y) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\mu(\Phi_y - \Psi_y) - \frac{1}{2}\nu(\Phi_y + \Psi_y) = -\mu\psi_y - \nu\varphi_y.$$

Dosazením těchto vyjádření do rovností (2.4) dostaneme

$$\begin{aligned}a &= A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = A\left(\nu^2\psi_y^2 - 2\nu\mu\varphi_y\psi_y + \mu^2\varphi_y^2\right) + 2B\left(\nu\varphi_y\psi_y - \mu\varphi_y^2\right) + C\varphi_y^2 = \\ &= (A\mu^2 - 2B\mu + C)\varphi_y^2 + A\nu^2\psi_y^2 + 2\nu(B - A\mu)\varphi_y\psi_y = \\ &= \left(\frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C\right)\varphi_y^2 + \frac{AC - B^2}{A}\psi_y^2 + 2\nu(B - B)\varphi_y\psi_y = \frac{AC - B^2}{A}\left(\varphi_y^2 + \psi_y^2\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y = \\ &= -A\left(\nu\mu\psi_y^2 - \mu^2\varphi_y\psi_y + \nu^2\psi_y\varphi_y - \mu\nu\varphi_y^2\right) + B\left(\nu\psi_y^2 - \mu\varphi_y\psi_y - \mu\varphi_y\psi_y - \nu\varphi_y^2\right) + C\varphi_y\psi_y = \\ &= (A\mu - B)\nu\varphi_y^2 + (B - A\mu)\nu\psi_y^2 + \left(A\mu^2 - A\nu^2 - 2B\mu + C\right)\varphi_y\psi_y = \\ &= (B - B)\left(\nu\varphi_y^2 - \nu\psi_y^2\right) + \left(\frac{B^2}{A} - \frac{AC - B^2}{A} - \frac{2B^2}{A} + \frac{AC}{A}\right)\varphi_y\psi_y = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c &= A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = A\left(\mu^2\psi_y^2 + 2\mu\nu\psi_y\varphi_y + \nu^2\varphi_y^2\right) - 2B\left(\mu\psi_y^2 + \nu\varphi_y\psi_y\right) + C\psi_y^2 = \\ &= A\nu^2\varphi_y^2 + \left(A\mu^2 - 2B\mu + C\right)\psi_y^2 + 2\nu(A\mu - B)\varphi_y\psi_y = \\ &= \frac{AC - B^2}{A}\varphi_y^2 + \left(\frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C\right)\psi_y^2 + 2\nu(B - B)\varphi_y\psi_y = \frac{AC - B^2}{A}\left(\varphi_y^2 + \psi_y^2\right),\end{aligned}$$

tedy $a = c$, $b = 0$. *Kanonický tvar eliptické rovnice* (2.1) tedy je

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} \;=\; F_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)\,.$$

Příklad

Najdeme transformaci převádějící rovnici

$$(1 + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

na kanonický tvar.

V tomto případě je charakteristická rovnice tvaru

$$(1 + x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2 + (1 + y^2) = 0$$

a má komplexně sdružené kořeny

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{1 + y^2}{1 + x^2}}.$$

To znamená, že daná rovnice je eliptická. Poslední rovnice je obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, která má řešení

$$\ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) \mp \mathrm{i}\ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) = const.$$

Podle obecného zdůvodnění před příkladem tedy máme transformaci původních souřadnic x, y do nových ξ, η ve tvaru

$$\xi = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right), \qquad \eta = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right).$$

Platí tedy[1]

$$u_x = u_\eta\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad u_y = u_\xi\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

[1] Použitý zápis je „ošklivý“; na jedné straně rovností „míchá“ staré a nové proměnné. Ovšem je to zápis úsporný a (věřím, že) srozumitelný.

$$u_{xx} = u_{\eta\eta}\frac{1}{1+y^2} + u_\eta\left(-\frac{1}{2}\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{1+x^2}\left(u_{\eta\eta} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}u_\eta\right),$$
$$u_{yy} = \frac{1}{1+y^2}\left(u_{\xi\xi} - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}u_\xi\right).$$

Po dosazení těchto výrazů do dané rovnice dostaneme

$$u_{\eta\eta} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}u_\eta + u_{\xi\xi} - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}u_\xi + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}u_\eta + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}u_\xi = 0$$

a po triviální úpravě máme kanonický tvar dané rovnice

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

Nyní nás nenapadá žádný trik, jak tuto rovnici vyřešit. ■

2.1.2 Kanonický tvar lineární rovnice s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnici

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g(x,y), \tag{2.10}$$

kde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Transformace popsaná v 2.1.1 převede tuto rovnici na některý z tvarů

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} &= d_1 u_\xi + e_1 u_\eta + f_1 u + g_1(\xi,\eta), && \text{pokud } b^2 > ac, \text{ tj. rovnice je hyperbolická,} \\ u_{\xi\xi} &= d_2 u_\xi + e_2 u_\eta + f_2 u + g_2(\xi,\eta), && \text{pokud } b^2 = ac, \text{ tj. rovnice je parabolická,} \\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} &= d_3 u_\xi + e_3 u_\eta + f_3 u + g_3(\xi,\eta), && \text{pokud } b^2 < ac, \text{ tj. rovnice je eliptická.} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Zavedeme novou neznámou funkci v vztahem

$$u = v\,\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

kde λ a μ jsou zatím neurčené konstanty. Pak je

$$\begin{aligned} u_\xi &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda v + v_\xi), & u_{\xi\xi} &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda^2 v + 2\lambda v_\xi + v_{\xi\xi}), \\ u_\eta &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu v + v_\eta), & u_{\xi\eta} &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda\mu v + \mu v_\xi + \lambda v_\eta + v_{\xi\eta}), \\ & & u_{\eta\eta} &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu^2 v + 2\mu v_\eta + v_{\eta\eta}). \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnic (2.11) a vykrátíme výrazem $\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta} \neq 0$. Dostaneme

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta} &= (d_1 - \mu)v_\xi + (e_1 - \lambda)v_\eta + (d_1\lambda + e_1\mu - \lambda\mu + f_1)v + \tilde{g}_1(\xi,\eta), \\ v_{\xi\xi} &= (d_2 - 2\lambda)v_\xi + e_2 v_\eta + (d_2\lambda + e_2\mu - \lambda^2 + f_2)v + \tilde{g}_2(\xi,\eta), \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} &= (d_3 - 2\lambda)v_\xi + (e_3 - 2\mu)v_\eta + (d_3\lambda + e_3\mu - \lambda^2 - \mu^2 + f_3)v + \tilde{g}_3(\xi,\eta), \end{aligned}$$

pro hyperbolickou, parabolickou a eliptickou rovnici (v tomto pořadí). Konstanty λ a μ pak zvolíme tak, aby pravé strany těchto rovnic byly co nejjednodušší. Konkrétně:

- Pro hyperbolickou rovnici $\mu = d_1,\ \lambda = e_1$. Dostaneme

$$v_{\xi\eta} = (e_1 d_1 + f_1)v + \tilde{g}_1(\xi,\eta).$$

- Pro parabolickou rovnici $\lambda = \dfrac{d_2}{2},\ \mu = -\dfrac{4f_2 + d_2^2}{4e_2}$. Dostaneme

$$v_{\xi\xi} = e_2 v_\eta + \tilde{g}_2(\xi,\eta).$$

- Pro eliptickou rovnici $\lambda = \dfrac{d_3}{2}$, $\mu = \dfrac{e_3}{2}$. Dostaneme
$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{d_3^2 + e_3^2 + 4f_3}{4} v + \tilde{g}_3(\xi, \eta).$$

Při řešení konkrétní úlohy není potřeba používat odvozené formule, stačí transformovat nezávisle proměnné a pak napsat obecně novou závisle proměnnou. Konkrétní hodnoty λ a μ již vyjdou dosazením do původní rovnice.

Příklad

Najdeme kanonický tvar rovnice
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0.$$
Příslušná charakteristická rovnice je
$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$
a jakožto kvadratická rovnice má dvě reálná různá řešení
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 1, \\ 0; \end{cases}$$
daná rovnice je tedy hyperbolická. Řešení předchozích obyčejných diferenciálních rovnic je dáno implicitně rovnostmi
$$y - x = const, \quad y = const.$$
Zavedeme tedy nové nezávisle proměnné vztahy
$$\xi = y - x, \quad \eta = y.$$
Pak je
$$u_x = -u_\xi, \quad u_{xy} = -u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}, \quad u_{xx} = u_{\xi\xi}$$
a po dosazení do dané rovnice
$$u_{\xi\eta} = u - u_\xi.$$
Nyní položíme $u = v\mathrm{e}^{\lambda\xi + \mu\eta}$. Dostaneme
$$u_\xi = v_\xi \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda v \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta} = (v_\xi + \lambda v)\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta},$$
$$u_{\xi\eta} = (v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \mu\lambda v)\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}.$$
Tyto výsledky dosadíme do transformované rovnice a upravíme. Z výsledné rovnice
$$v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + (1+\mu)v_\xi - (1 - \lambda - \lambda\mu)v = 0$$
vidíme, že stačí volit $\lambda = 0$ a $\mu = -1$, aby koeficienty u prvních derivací byly nulové, tedy aby výsledná rovnice byla tvaru
$$v_{\xi\eta} = v.$$
Výsledek můžeme nyní shrnout tak, že transformace
$$\xi = y - x, \quad v = u\mathrm{e}^{\xi}$$
převádí danou rovnici na rovnici
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial y} = v.$$

■

2.2 Rovnice v n nezávisle proměnných

Jedná se o rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} B_{ij}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} = \\ = F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \qquad (2.12)$$

kde A_i, B_{ij}, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = i+1, i+2,\ldots,n$, jsou spojité reálné funkce n proměnných definované na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$ s neprázdným vnitřkem a funkce F je spojitá a definovaná na množině $G \times \mathbb{R}^{1+n}$. Budeme předpokládat, že pro každý bod $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in G$ platí

$$\sum_{i=1}^{n}\left(|A_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)| + \sum_{j=i+1}^{n}|B_{ij}(x_1,x_2,\ldots,x_n)|\right) > 0,$$

tj. v každém bodě množiny G je alespoň jedna z funkcí na pravé straně rovnice (2.12) nenulová.[2]

Při označení $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ lze rovnici (2.12) stručněji zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} B_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(\boldsymbol{x},u,\nabla u).$$

Pokud z koeficientů rovnice (2.12) sestavíme matici

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}(\boldsymbol{x}) = \big(m_{ij}(\boldsymbol{x})\big)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} A_1(\boldsymbol{x}) & B_{12}(\boldsymbol{x}) & B_{13}(\boldsymbol{x}) & \ldots & B_{1n}(\boldsymbol{x}) \\ B_{12}(\boldsymbol{x}) & A_2(\boldsymbol{x}) & B_{23}(\boldsymbol{x}) & \ldots & B_{2n}(\boldsymbol{x}) \\ B_{13}(\boldsymbol{x}) & B_{23}(\boldsymbol{x}) & A_3(\boldsymbol{x}) & \ldots & B_{3n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1n}(\boldsymbol{x}) & B_{2n}(\boldsymbol{x}) & B_{3n}(\boldsymbol{x}) & \ldots & A_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

můžeme rovnici zapsat v ještě stručnějším tvaru

$$\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(\boldsymbol{x},u,\nabla u). \qquad (2.13)$$

Matice M je evidentně symetrická. To znamená, že touto maticí je definována nějaká kvadratická forma $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ta je dána formulí

$$\kappa(p_1,p_2,\ldots,p_n) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(\boldsymbol{x}) & B_{12}(\boldsymbol{x}) & B_{13}(\boldsymbol{x}) & \ldots & B_{1n}(\boldsymbol{x}) \\ B_{12}(\boldsymbol{x}) & A_2(\boldsymbol{x}) & B_{23}(\boldsymbol{x}) & \ldots & B_{2n}(\boldsymbol{x}) \\ B_{13}(\boldsymbol{x}) & B_{23}(\boldsymbol{x}) & A_3(\boldsymbol{x}) & \ldots & B_{3n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1n}(\boldsymbol{x}) & B_{2n}(\boldsymbol{x}) & B_{3n}(\boldsymbol{x}) & \ldots & A_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

nebo stručně $\kappa(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^{\mathsf{T}}\mathsf{M}\boldsymbol{p}$.

Z lineární algebry je známo, že platí Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem, který můžeme v naší situaci formulovat: K symetrické matici M existují regulární matice V typu $n \times n$ a jednoznačně určená přirozená čísla k, m splňující nerovnosti $0 \le k \le m \le n$, tak, že při transformaci

$$\boldsymbol{p} = \mathsf{V}\boldsymbol{q}, \quad \text{tj. } \boldsymbol{q} = \mathsf{V}^{-1}\boldsymbol{p}$$

[2] Ještě připomeneme konvenci, že klademe $\sum_{i=k}^{k-1} \alpha_i = 0$.

platí

$$\kappa(\boldsymbol{p}) = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} p_i p_j = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} \sum_{s=1}^{n} v_{is} q_s \sum_{t=1}^{n} v_{jt} q_t = \sum_{i,j,s,t=1}^{t} m_{ij} v_{is} v_{jt} q_s q_t = \sum_{i=1}^{k} q_i^2 - \sum_{i=k+1}^{m} q_i^2. \tag{2.14}$$

Tato skutečnost umožňuje klasifikovat rovnice tvaru (2.12) nebo (2.13):

Nechť $\boldsymbol{x}_0 \in G$. Rovnice (2.12) se nazývá

eliptická		$m = n$ a $k \in \{0, n\}$,
hyperbolická		$m = n$ a $k \in \{1, n-1\}$,
ultrahyperbolická	*v bodě* $\boldsymbol{x}_0 \in G$, jestliže	$m = n$ a $2 \leq k \leq n-2$,
parabolická		$m < n$,
parabolická v užším smyslu		$m = n - 1$ a $k = 0$, nebo $k = m = n - 1$.

Někdy se používá i poněkud jiná terminologie: Rovnice (2.12) se nazývá *eliptická v bodě* $\boldsymbol{x}_0 \in G$, pokud je matice $\mathsf{M}(\boldsymbol{x}_0)$ definitní, nazývá se *hyperbolického typu v bodě* $\boldsymbol{x}_0 \in G$, pokud je matice M regulární a indefinitní, nazývá se *parabolického typu v bodě* $\boldsymbol{x}_0 \in G$, pokud je matice $\mathsf{M}(\boldsymbol{x}_0)$ singulární.

Z lineární algebry je také známo, že symetrická matice má pouze reálné vlastní hodnoty. Číslo k také vyjadřuje počet kladných vlastních hodnot, číslo $m - k$ počet záporných vlastních hodnot a číslo $n - m$ počet nulových vlastních hodnot. Z této vlastnosti symetrických matic plyne:

Tvrzení 3. Rovnice (2.12), ekvivalentně (2.13) je v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in G$

- eliptická právě tehdy, když jsou všechny vlastní hodnoty matice $\mathsf{M}(\boldsymbol{x}_0)$ nenulové a mají stejné znaménko;
- ultrahyperblická právě tehdy, když jsou všechny vlastní hodnoty matice $\mathsf{M}(\boldsymbol{x}_0)$ nenulové a alespoň dvě z nich mají různá znaménka;
- hyperbolická právě tehdy, když právě jedna z vlastních hodnot matice $\mathsf{M}(\boldsymbol{x}_0)$ má opačné znaménko, než všechny ostatní;
- parabolická právě tehdy, když matice $\mathsf{M}(\boldsymbol{x}_0)$ má aspoň jednu nulovou vlastní hodnotu;
- parabolická v užšším smyslu právě tehdy, když matice $\mathsf{M}(\boldsymbol{x}_0)$ má právě jednu nulovou vlastní hodnotu a ostatní vlastní hodnoty mají stejná znaménka.

Uvedená klasifikace je pouze lokální, určuje typ rovnice v jednom konkrétním bodě $\boldsymbol{x}_0 \in G$. Lze ji však snadno rozšířit i na otevřené množiny: Rovnice (2.12) se nazývá *eliptická, hyperbolická, ... v otevřené množině* $H \subseteq G$, je-li eliptická, hyperbolická, ... v každém bodě $\boldsymbol{x} \in H$.

Ještě zdůrazněme skutečnost, že matice V použitá k transformaci kvadratické formy κ závisí na bodu, ve kterém je definována příslušná symetrická matice $\mathsf{M} = \mathsf{M}(\boldsymbol{x})$. Proto ji nelze použít k nějaké globální transformaci rovnice (2.12) ani v otevřené množině, v níž je jednoho typu.

Příklad

Určíme typ rovnice

$$yz\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x^2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Aby se jednalo o rovnici druhého řádu, musí platit $x \neq 0$ nebo $yz \neq 0$. Za tohoto předpokladu budeme provádět všechny výpočty. Matici M a příslušnou kvadratickou formu κ zapsat ve tvaru

$$\mathsf{M}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \\ 0 & x^2 & xy \end{pmatrix}, \quad \kappa(p,q,r) = yzp^2 + 2x^2qr + xyr^2.$$

Kvadratickou formu κ upravíme „doplněním na čtverec“. Je-li $xy > 0$, pak

$$\kappa(p,q,r) = yzp^2 + \left(xyr^2 + 2x^2qr + \frac{x^3}{y}q^2\right) - \frac{x^3}{y}q^2 = yzp^2 + \left(\sqrt{xy}\,r + \sqrt{\frac{x^3}{y}}\,q\right)^2 - \frac{x^3}{y}q^2 =$$

$$= \begin{cases} \left(\sqrt{yz}\,p\right)^2 + \left(\sqrt{xy}\,r + \sqrt{\frac{x^3}{y}}\,q\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{x^3}{y}}q\right)^2, & yz > 0, \\ \left(\sqrt{xy}\,r + \sqrt{\frac{x^3}{y}}\,q\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{x^3}{y}}q\right)^2, & yz = 0, \\ \left(\sqrt{xy}\,r + \sqrt{\frac{x^3}{y}}\,q\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{x^3}{y}}\,q\right)^2 - \left(\sqrt{|yz|}\,p\right)^2, & yz < 0, \end{cases}$$

je-li $xy = 0$, pak

$$\kappa(p,q,r) = yzp^2 + \tfrac{1}{2}x^2\left((q+r)^2 - (q-r)^2\right) =$$

$$= \begin{cases} \left(\sqrt{yz}\,p\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x(q+r)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x(q-r)\right)^2, & x \neq 0,\ yz > 0, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x(q+r)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x(q-r)\right)^2, & x \neq 0,\ yz = 0, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x(q+r)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x(q-r)\right)^2 - \left(\sqrt{|yz|}\,p\right)^2, & x \neq 0,\ yz < 0, \\ \left(\sqrt{yz}\,p\right)^2, & x = 0,\ yz > 0, \\ -\left(\sqrt{|yz|}\,p\right)^2, & x = 0,\ yz < 0, \end{cases}$$

a je-li $xy < 0$, pak

$$\kappa(p,q,r) = yzp^2 - \left(-xyr^2 - 2x^2qr - \frac{x^3}{y}q^2\right) - \frac{x^3}{y}q^2 = yzp^2 - \left(\sqrt{|xy|}\,r - \sqrt{\left|\frac{x^3}{y}\right|}\,q\right)^2 - \frac{x^3}{y}q^2 =$$

$$= \begin{cases} \left(\sqrt{yz}\,p\right)^2 + \left(\sqrt{|xy|}\,r + \sqrt{\left|\frac{x^3}{y}\right|}\,q\right)^2 - \left(\sqrt{\left|\frac{x^3}{y}\right|}q\right)^2, & yz > 0, \\ \left(\sqrt{|xy|}\,r + \sqrt{\left|\frac{x^3}{y}\right|}\,q\right)^2 - \left(\sqrt{\left|\frac{x^3}{y}\right|}q\right)^2, & yz = 0, \\ \left(\sqrt{|xy|}\,r + \sqrt{\left|\frac{x^3}{y}\right|}\,q\right)^2 - \left(\sqrt{\left|\frac{x^3}{y}\right|}\,q\right)^2 - \left(\sqrt{|yz|}\,p\right)^2, & yz < 0. \end{cases}$$

Z těchto výsledků vidíme, že v případě $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ je daná rovice hyperbolická a v ostatních případech parabolická (v širším smyslu).

Typ dané rovnice můžeme podle Tvrzení 3 určit také podle vlastních hodnot matice $\mathsf{M}(x,y,z)$. Její charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} yz-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & x^2 \\ 0 & x^2 & xy-\lambda \end{vmatrix} = (yz-\lambda)\left(\lambda^2 - xy\lambda - x^4\right)$$

a má tedy kořeny

$$\lambda_1 = yz, \quad \lambda_{2,3} = \tfrac{1}{2}\left(xy \pm \sqrt{x^2y^2 + 4x^4}\right).$$

Pokud je $yz \neq 0$ a $xy \neq 0$, jsou všechny vlastní hodnoty nenulové a λ_2 a λ_3 mají opačná znaménka. Daná rovnice je tedy hyperbolická. V opačném případě je alespoň jedna z vlastních hodnot nulová a rovnice je parabolického typu.

Odpověď na danou otázku jsme našli dvěma způsoby, v obou je tato odpověď stejná. U příkladu ale ještě chvíli zůstaneme a pro ilustraci teorie se podíváme na transformační matici $\mathsf{V} = \mathsf{V}(x, y, z)$.

V prvním oktantu, tedy pro $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ bezprostředně z tvaru „úplného čtverce" vidíme matici $\mathsf{V}(x, y, z)^{-1}$ a z ní snadno spočítáme matici $\mathsf{V}(x, y, z)$,

$$\mathsf{V}(x,y,z)^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{xy} & \sqrt{\dfrac{x^3}{y}} \\ 0 & -\sqrt{\dfrac{x^3}{y}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\dfrac{y}{x^3}} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{y}{x^3}} & \dfrac{y}{x^2}\sqrt{\dfrac{y}{x^3}} \end{pmatrix}.$$

Podobně můžeme postupovat ve všech ostatních případech. ■

Kapitola 3

Hyperbolické rovnice

Kmitání struny

Uvažujme tenkou strunu napjatou podél osy x silou T. Chceme popsat malé kmity této struny, tj. odchylku každého bodu struny od rovnovážné polohy v každém čase. Aby tento problém byl relativně snadno zvládnutelný, přijmeme několik zjednodušujících předpokladů:

- Výchylky struny jsou tak malé, že její délku můžeme považovat za konstantní.

- Struna neklade odpor vůči ohýbání, je dokonale pružná.

- Každý bod vykonává pohyb pouze ve směru kolmém na osu x, tj. kmity jsou příčné.

Označme $u(t, x)$ výchylku bodu o souřadnici x v časovém okamžiku t. Uvažujme síly, které působí na úsek struny mezi body α a β.

Na strunu může působit nějaká vnější síla. Vzhledem ke třetímu předpokladu stačí uvažovat její složku F_e kolmou na osu x. Tato síla může být v každém bodě struny jiná a také se může měnit s časem. Proto ji vyjádříme pomocí její hustoty $g = g(t, x)$; hustota síly je definována tak, že vnější síla $F_e(t)$ působící na uvažovaný úsek struny v čase t je rovna

$$F_e(t) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t, \xi) \mathrm{d}\xi.$$

Tahová síla T působí v bodě α ve směru tečny ke struně v tomto bodě. Její složka F_α kolmá na osu x má velikost $-T \sin \varphi_\alpha$, kde φ_α je úhel, který svírá osa x s tečnou ke struně v bodě α. Poněvadž ale kmity považujeme za malé, je úhel φ_α také malý, takže $\sin \varphi_\alpha \approx \operatorname{tg} \varphi_\alpha$. Hodnota $\operatorname{tg} \varphi_\alpha$ je současně směrnicí tečny k funkci $u(t, \cdot)$ v bodě α. Sílu F_α v čase t tedy můžeme vyjádřit jako

$$F_\alpha(t) = -T \frac{\partial}{\partial x} u(t, \alpha).$$

Podobně složku tahové síly působící na strunu v bodě β vyjádříme jako

$$F_\beta(t) = T \frac{\partial}{\partial x} u(t, \beta).$$

Celková síla působící na úsek struny mezi body α a β je tedy dána součtem $F_e + F_\beta + F_\alpha$, který upravíme s využitím Newtonovy-Leibnizovy formule:

$$
\begin{aligned}
F(t) = F_e(t) + F_\beta(t) + F_\alpha(t) &= \int_\alpha^\beta g(t,\xi)\mathrm{d}\xi + T\left(\frac{\partial}{\partial x}u(t,\beta) - \frac{\partial}{\partial x}u(t,\alpha)\right) = \\
&= \int_\alpha^\beta g(t,\xi)\mathrm{d}\xi + T\int_\alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,\xi)\mathrm{d}\xi = \int_\alpha^\beta \left(T\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,\xi) + g(t,\xi)\right)\mathrm{d}\xi. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Sílu působící na uvažovaný úsek struny však můžeme také vyjádřit pomocí zákona síly. K tomu označíme $\varrho = \varrho(x)$ lineární hustotu struny v bodě x. Lineární hustota je definována tak, že hmotnost úseku struny mezi body α a β je dána integrálem

$$
\int_\alpha^\beta \varrho(\xi)\mathrm{d}\xi.
$$

Hmotnost krátkého úseku struny mezi body x a $x + \Delta x$ je tedy podle věty o střední hodnotě integrálního počtu rovna

$$
\Delta m = \int_x^{x+\Delta x} \varrho(\xi)\mathrm{d}\xi = \varrho(x + \vartheta\Delta x)\Delta x,
$$

kde $\vartheta \in [0,1]$ je nějaké číslo. Zrychlení bodu struny o souřadnici $x + \vartheta\Delta x$ je rovno

$$
\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t, x + \vartheta\Delta x).
$$

Sílu působící na uvažovaný krátký úsek struny tedy můžeme vyjádřit jako součin tohoto zrychlení a hmotnosti Δm,

$$
\varrho(x + \vartheta\Delta x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t, x + \vartheta\Delta x)\Delta x
$$

a celkovou sílu působící na úsek struny mezi body α a β jako součet

$$
\sum \varrho(x + \vartheta\Delta x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t, x + \vartheta\Delta x)\Delta x,
$$

kde sčítáme přes všechny úseky struny mezi body α, β. Tento součet je integrálním součtem funkce $\varrho(\cdot)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\cdot)$, takže pro $\Delta x \to 0$ dostaneme sílu $F(t)$, působící v čase t na úsek struny mezi body α a β, vyjádřenu Riemannovým integrálem

$$
F(t) = \int_\alpha^\beta \varrho(\xi)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\xi)\mathrm{d}\xi. \qquad (3.2)
$$

Výrazy (3.1) a (3.2) vyjadřují dvěma způsoby celkovou sílu působící na úsek struny mezi body α a β. Musí se tedy sobě rovnat a z této rovnosti jednoduchou úpravou dostaneme

$$
\int_\alpha^\beta \left(\varrho(\xi)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\xi) - T\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}u(t,\xi) - g(t,\xi)\right)\mathrm{d}\xi = 0.
$$

Tato rovnost může být pro libovolné hodnoty α a β splněna jen tak, že integrovaná funkce je nulová, tedy

$$
\varrho(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = T\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + g(t,x).
$$

Nyní položíme

$$a = a(x) = \sqrt{\frac{T}{\varrho(x)}}, \qquad f = f(t,x) = \frac{g(t,x)}{\varrho(x)}$$

a dostaneme *rovnici kmitání struny*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x). \tag{3.3}$$

Uvažujme nejjednodušší případ — struna je homogenní, tj. $\varrho(x) \equiv const$ a nepůsobí na ni žádná vnější síla, tj. $g(t,x) \equiv 0$. Je tedy také $a(x) = a = const$ a $f(t,x) \equiv 0$. Rovnice kmitání struny nyní nabývá tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.4}$$

Označme délku struny l a uvažujme, že struna je v krajních bodech 0 a l upevněna, nevykonává v těchto bodech žádný pohyb. K rovnici (3.4) tak dostáváme *okrajové podmínky*

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \tag{3.5}$$

pro každý čas $t \geq 0$. Strunu rozkmitáme tak, že ji v počátečním okamžiku $t = 0$ vychýlíme z její rovnovážné polohy a vypustíme. Struna má tedy v čase $t = 0$ nějaký tvar a nulovou rychlost, tj. funkce u splňuje *počáteční podmínky*

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) = 0 \tag{3.6}$$

pro každý bod $x \in [0,l]$. Počáteční funkce φ samozřejmě musí splňovat podmínku $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Řešení rovnice (3.4) s podmínkami (3.5), (3.6) „slyšíme“: zní základní tón a tóny alikvotní. Struna tedy vykonává harmonický pohyb o nějaké základní frekvenci ω a také harmonické pohyby s frekvencemi, které jsou násobky základní. Můžeme proto hádat, že řešení by mělo být tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \sin(n\omega t + c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \big(\sin c_n \cos n\omega t + \cos c_n \sin n\omega t \big) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n(x) \cos n\omega t + b_n(x) \sin n\omega t \big);$$

Označili jsme $a_n(x) = \alpha_n(x) \sin c_n$, $b_n(x) = \alpha_n(x) \cos c_n$; sčítáme pro n až do nekonečna, abychom nějak uměle neomezovali počet alikvotních tónů. Pokud budeme předpokládat, že

$$a_n(0) = a_n(l) = b_n(0) = b_n(l) = 0, \tag{3.7}$$

budou splněny okrajové podmínky (3.5). Funkce u musí splňovat rovnici (3.4), tedy

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n(x) n^2 \omega^2 \cos n\omega t + b_n(x) n^2 \omega^2 \sin n\omega t \big) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n''(x) \cos n\omega t + b_n''(x) \sin n\omega t \big)$$

neboli

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\big(a^2 a_n''(x) + n^2 \omega^2 a_n(x) \big) \cos n\omega t + \big(a^2 b_n''(x) + n^2 \omega^2 b_n(x) \big) \sin n\omega t \Big].$$

Poněvadž funkce $\cos n\omega t$ a $\sin n\omega t$ jsou lineárně nezávislé, musí platit

$$a^2 a_n'' + n^2 \omega^2 a_n = 0, \qquad a^2 b_n'' + n^2 \omega^2 b_n = 0$$

pro všechna $n = 1, 2, 3, \ldots$. První z těchto obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu upravíme na tvar

$$a_n'' + \left(\frac{n\omega}{a} \right)^2 a_n = 0.$$

Tato lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty má řešení

$$a_n(x) = C_1 \cos \frac{n\omega}{a} x + C_2 \sin \frac{n\omega}{a} x.$$

Chceme, aby byla splněna první z podmínek (3.7), tedy

$$0 = a_n(0) = C_1.$$

Odtud dále dostaneme

$$0 = a_n(l) = C_2 \sin \frac{n\omega}{a} l.$$

Tato rovnost je splněna pro $\omega = \frac{\pi a}{l}$ a libovolnou konstantu C_2. Označíme $C_2 = A_n$ a funkci a_n zapíšeme ve tvaru

$$a_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi a}{al} x = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Podobně dostaneme

$$b_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Tyto funkce dosadíme do vyjádření funkce u a dostaneme

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Tato funkce formálně splňuje rovnici (3.4) a okrajové podmínky (3.5). Ještě určíme konstanty A_n a B_n tak, aby byly splněny počáteční podmínky (3.6). Má platit

$$\varphi(x) = u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Tuto rovnost můžeme chápat jako vyjádření funkce φ ve tvaru sinové řady. Je tedy

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi$$

pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dále platí

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Odtud a ze známé věty o jednoznačnosti Fourierových řad dostaneme, že $B_n = 0$ pro všechna $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Řešení rovnice (3.4) s podmínkami (3.5) a (3.6) tímto způsobem dostáváme ve tvaru

$$\begin{aligned} u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi \right) \cos \frac{n\pi a}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x = \\ = \int_0^l \varphi(\xi) \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} \xi \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi a}{l} t \right) \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ještě poznamenejme, že základní frekvence kmitající struny nám vyšla jako

$$\omega = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\varrho}},$$

což je formulka známá ze střední školy.

3.1 Rovnice v jedné prostorové proměnné

Budeme se věnovat lineární parciální hyperbolické evoluční rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty, tj. rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial t} + cu + f(t,x), \tag{3.9}$$

kde a, b, c jsou reálné konstanty, $a \neq 0$, f je funkce dvou proměnných a u je hledaná funkce. Rovnice se nazývá *evoluční* proto, že první nezávisle proměnná t je interpretována jako čas. Rovnice tedy popisuje časový vývoj nebo časové změny funkce jedné reálné proměnné x, kterou interpretujeme jako souřadnici v jednorozměrném prostoru.

Podobně jako v 2.1.2 ověříme, že substituce

$$u(t,x) = v(t,x)\mathrm{e}^{\frac{b_2}{2}t - \frac{b_1}{2a^2}x}$$

převede rovnici (3.9) na tvar

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(c - \frac{b_1^2}{4a^2} + \frac{b_2^2}{2}\right) v + f(t,x)\mathrm{e}^{\frac{b_1}{2a^2}x - \frac{b_2}{2}t}.$$

Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že v rovnici (3.9) je $b_1 = b_2 = 0$. Stačí se tedy zabývat jednodušší rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu + f(t,x). \tag{3.10}$$

V případě, že je funkce f identicky nulová, nazývá se tato rovnice *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*. Pokud je $c = 0$, rovnice se nazývá *vlnová*.

Nejprve najdeme **generické řešení** homogenní vlnové rovnice

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{3.11}$$

Transformace rovnice do nových nezávisle proměnných (sr. str. 38)

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

převede rovnici (3.11) na kanonický tvar

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Integrací této rovnosti podle proměnné η dostaneme

$$u_\xi(\xi,\eta) = f(\xi).$$

Funkce f vyjadřuje „integrační konstantu“, která je konstantní v tom smyslu, že nezávisí na integrační proměnné η, může ale záviset na proměnné ξ. Integrací poslední rovnosti podle proměnné ξ dostaneme

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

kde F je funkce primitivní k f a G je „integrační konstanta“ nezávislá na proměnné ξ. Návratem k původním proměnným dostaneme obecné řešení rovnice (3.16) ve tvaru

$$u(t,x) = F(x + at) + G(x - at). \tag{3.12}$$

Nyní se podíváme na **formulaci úloh** pro hyperbolickou rovnici. Výraz na levé straně rovnice (3.10), jakožto druhá derivace podle času, reprezentuje zrychlení. Proto lze pravou stranu rovnice interpretovat jako jakousi sílu působící na jednotkovou „substanci“ (hmotnost, náboj a podobně). Poněvadž se jedná o rovnici druhého řádu v časové proměnné, je intuitivně zřejmé, že k popisu vývoje nějakého konkrétního systému je potřebné k rovnici přidat také jeho počáteční stav (hodnotu funkce u v počátečním čase) a počáteční rychlost (hodnotu časové derivace u_t v počátečním čase. Stručně řečeno, k rovnici (3.10) přidáváme dvě *počáteční podmínky*.

Druhou nezávisle proměnnou x interpretujeme jako prostorovou proměnnou. Pak záleží na tom, zda je obor prostorové proměnné x ohraničený, nebo ne, zda uvažujeme nějaký „okraj" prostoru. Pokud je prostor omezený, tedy je úsečkou, musíme zadat dvě *okrajové podmínky*, v každém hraničním bodě jednu. Pokud je uvažovaným prostorem polopřímka, je nutné zadat jednu okrajovou podmínku.

Ukážeme dvě klasické metody řešení úloh pro rovnici (3.10). První z nich – *metoda charakteristik* – bezprostředně využívá generického řešení. Proto je použitelná pouze pro vlnovou rovnici ($c = 0$). Obor prostorové proměnné přitom může být neomezený (přímka nebo polopřímka) nebo omezený (úsečka), ale pouze se speciálními okrajovými podmínkami. Druhou metodu – *metodu separace proměnných* – lze použít pouze pro ohraničenou prostorovou proměnnou, ale pro obecnou rovnici (3.10).

3.1.1 Počáteční úloha pro rovnici na přímce a d'Alembertův vzorec

Budeme hledat řešení vlnové rovnice (3.11) na oboru časové proměnné $t > 0$ a prostorové proměnné $x \in \mathbb{R}$. Popisujeme tedy kmity „nekonečně dlouhé" struny, na kterou působí síla o hustotě f, od počátečního okamžiku $t = 0$. Budeme předpokládat, že známe počáteční výchylku $u(0, x)$ v každém bodě struny a také počáteční rychlost $u_t(0, x)$ každého bodu struny. Tuto úlohu zapíšeme:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad && t > 0,\ x \in \mathbb{R}, && (3.13)\\ u(0,x) &= \varphi(x), && x \in \mathbb{R}, && (3.14)\\ u_t(0,x) &= \psi(x), && x \in \mathbb{R}. && (3.15) \end{aligned}$$

Funkce $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *klasické* (nebo *silné*) *řešení* úlohy, pokud je spojitá na $[0, \infty) \times \mathbb{R}$, dvakrát spojitě diferencovatelná na $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, splňuje rovnici (3.13) a platí pro ni

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad \lim_{t \to 0+} u_t(t,x) = \psi(x) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Podmínky kladené na řešení můžeme také zeslabit. Například řešení může mít derivaci pouze ve smyslu distribucí (viz Dodatek A) a podobně.

Řešení úlohy (3.13)–(3.15) rozdělíme do tří kroků.

Homogenní rovnice s obecnými počátečními podmínkami

Jedná se o úlohu

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad && t > 0,\ x \in \mathbb{R}, && (3.16)\\ u(0,x) &= \varphi(x), && x \in \mathbb{R}, && (3.17)\\ u_t(0,x) &= \psi(x), && x \in \mathbb{R}. && (3.18) \end{aligned}$$

Potřebujeme určit obecné funkce F a G v generickém řešení (3.12) tak, aby byly splněny počáteční podmínky (3.17) a (3.18). Dosazením do podmínky (3.17) dostaneme

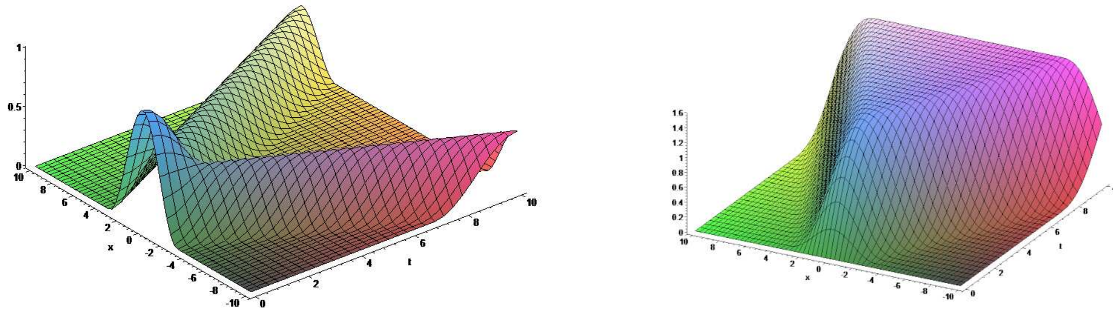
$$F(x) + G(x) = \varphi(x). \tag{3.19}$$

Derivování obecného řešení(3.12) podle času t dává

$$u_t(t,x) = aF'(x + at) - aG'(x - at),$$

takže po dosazení do druhé počáteční podmínky (3.18) dostaneme

$$aF'(x) - aG'(x) = \psi(x).$$



Obrázek 3.1: Řešení úlohy (3.16)–(3.18). Vlevo: počáteční výchylka $\varphi(x) = \frac{1}{2}(1+\cos x)$ pro $x < \pi$, počáteční rychlost $\psi = 0$; vpravo: počáteční výchylka $\varphi(x) = 0$, počáteční rychlost $\psi = \frac{1}{2}(1+\cos x)$ pro $x < \pi$.

Tuto rovnost zintegrujeme podle proměnné v mezích od 0 po x a po snadné úpravě máme

$$F(x) - G(x) = F(0) - G(0) + \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{3.20}$$

Na relace (3.19) a (3.20) se můžeme podívat jako na soustavu dvou rovnic pro neznámé $F(x)$ a $G(x)$. Jejím vyřešením dostaneme

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + F(0) - G(0) + \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right),$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) - F(0) + G(0) - \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right).$$

Toto vyjádření funkcí F a G dosadíme do obecného řešení (3.12) rovnice (3.16),

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Rozdíl integrálů v tomto vyjádření můžeme díky aditivitě integrálu vzhledem k integračnímu oboru zapsat jako integrál jeden. Dostaneme tak řešení úlohy (3.16)–(3.18) ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{3.21}$$

Tato formule se nazývá *d'Alembertův vzorec*. Grafy řešení pro dvě různé počáteční podmínky jsou na Obrázku 3.1.

Ještě si všimněme, že řešení počáteční úlohy pro homogenní rovnici je invariantní vzhledem k posunutí (translaci) v čase. Přesněji řečeno, je-li funkce $u = u(t,x)$ řešením úlohy (3.16)–(3.18), pak je funkce $v = v(t,x)$ daná vztahem $v(t,x) = u(t-\sigma,x)$ řešením úlohy

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \qquad t > \sigma,\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.22}$$

$$v(\sigma,x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.23}$$

$$v_t(\sigma,x) = \psi(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Ještě jinak můžeme tuto skutečnost vyjádřit tak, že transformace $\tau = t - \sigma$ převádí úlohu (3.16)–(3.18) na úlohu (3.22)–(3.24). Platnost tohoto tvrzení snadno ukážeme přímým výpočtem. Podle d'Alembertova vzorce (3.21) má úloha (3.22)–(3.24) řešení dané formulí

$$v(t,x) = \frac{\varphi(x + a(t-\sigma)) + \varphi(x - a(t-\sigma))}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{3.25}$$

Obecněji platí, že počáteční úloha pro hyperbolickou rovnici je invariantní vzhledem k posunutím v časové i prostorové proměnné, tj. vzhledem k transformacím nezávisle proměnných ve tvaru $\tau = t - \sigma$, $\xi = x - \eta$, kde σ a ξ jsou nějaké reálné konstanty. Popisuje tedy procesy z klasické (nerelativistické) mechaniky.

Nehomogenní rovnice s nulovými počátečními podmínkami

Nyní budeme řešit úlohu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.26}$$
$$u(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.27}$$
$$u_t(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.28}$$

Tato úloha vyjadřuje situaci, kdy je „nekonečná struna“ na počátku v klidu a v průběhu času na ni působí nějaká síla. Můžeme předpokládat, že toto silové působení „v jednotlivých časových okamžicích“ se postupně nasčítá, ve spojitě plynoucím čase „naintegruje“. Přesněji řečeno, výchylka struny v čase t a v bodě x bude dána integrálem

$$u(t,x) = \int\limits_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma, \tag{3.29}$$

kde $w = w(t,x,\sigma)$ je zatím neznámá integrovatelná funkce tří proměnných. Tato myšlenka se nazývá *Duhamelův princip*.

Funkce daná integrálem (3.29) splňuje první počáteční podmínku (3.27). Dosadíme ji do druhé z nich, tj. do rovnosti (3.28). Derivováním integrálu „podle parametru“ t dostaneme

$$0 = u_t(0,x) = w(t,x,t) + \int\limits_0^t w_t(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma \Bigg|_{t=0} = w(0,x,0).$$

Budeme požadovat silnější vlastnost funkce w, a to, aby v případě, že se hodnoty první a třetí nezávisle proměnné rovnají, byla hodnota funkce nulová, tj.

$$w(\sigma,x,\sigma) = 0 \tag{3.30}$$

pro všechna $x, \sigma \in \mathbb{R}$. V takovém případě pak platí

$$u_t(t,x) = \int\limits_0^t w_t(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

a dále

$$u_{tt}(t,x) = w_t(t,x,t) + \int\limits_0^t w_{tt}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Dvojím derivováním rovnosti (3.29) podle proměnné x vidíme, že současně platí

$$u_{xx}(t,x) = \int_0^t w_{xx}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (3.26)

$$w_t(t,x,t) + \int_0^t w_{tt}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma = a^2 \int_0^t w_{xx}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma + f(t,x)$$

a integrály převedeme na levou stranu

$$\int_0^t \left(w_{tt}(t,x,\sigma) - a^2 w_{xx}(t,x,\sigma)\right)\mathrm{d}\sigma = f(t,x) - w_t(t,x,t). \tag{3.31}$$

Tato rovnost bude zejména splněna například tehdy, pokud na obou jejích stranách budou nuly. A k tomu stačí, aby platilo

$$w_{tt}(t,x,\sigma) = a^2 w_{xx}(t,x,\sigma), \quad t > \sigma,\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.32}$$

$$w_t(\sigma,x,\sigma) = f(\sigma,x) \tag{3.33}$$

pro libovolné reálné σ.

Funkci $w = w(t,x,\sigma)$ budeme nyní považovat za funkci dvou proměnných t a x s parametrem σ. Tato funkce má splňovat hyperbolickou homogenní rovnici (3.32) s počátečními podmínkami (3.30) a (3.33). To je ovšem stejná úloha jako (3.22)–(3.24) s nulovou počáteční výchylkou $\varphi \equiv 0$. Její řešení je dáno formulí (3.25), tedy

$$w(t,x,\sigma) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Toto vyjádření dosadíme do obecné formule (3.29) a tím dostaneme jedno z možných řešení úlohy (3.26)–(3.28) ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma. \tag{3.34}$$

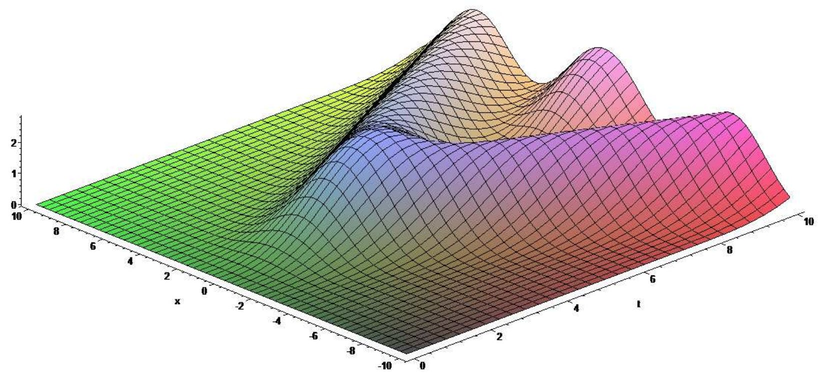
Toto řešení je znázorněno na obrázku 3.2.

Obecná počáteční úloha a jednoznačnost řešení

Je zřejmé (nebo přímým výpočtem snadno ověřitelné), že řešení obecné úlohy (3.13)–(3.15) je součtem řešení počáteční úlohy pro homogenní rovnici s obecnými počátečními podmínkami a řešení počáteční úlohy pro nehomogenní rovnici s nulovými počátečními podmínkami. Dostáváme tak vyjádření řešení úlohy (3.13)–(3.15) ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma. \tag{3.35}$$

Postup při hledání řešení počáteční úlohy (3.16)–(3.18) pro homogenní rovnici ukazuje, že tato úloha má nutně řešení dané d'Alembertovým vzorcem (3.21). Ovšem při řešení úlohy pro nehomogenní rovnici jsme udělali několik „svévolných“ rozhodnutí – řešení jsme hledali ve speciálním



Obrázek 3.2: Řešení úlohy (3.26)–(3.28). Nehomogenita je tvaru

$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\cos x)\sin t, & |x| < \pi, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

tvaru (3.29), předpokládali jsme splnění nějaké dostatečné (nikoliv nutné) podmínky pro platnost rovnosti (3.31). Vzniká tedy otázka, zda úloha (3.26)–(3.28), a tím také obecná úloha (3.13)–(3.15), nemá více řešení.

Připusťme, že existují dvě řešení u_1 a u_2 úlohy (3.13)–(3.15). Položme $u = u_1 - u_2$. Pak platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f(t,x) - \left(a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(t,x) \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) = a^2 u_{xx}$$

$$u(0,x) = u_1(0,x) - u_2(0,x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0,$$

$$u_t(0,x) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(0,x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(0,x) = \psi(x) - \psi(x) = 0.$$

To znamená, že funkce u je řešením počáteční úlohy

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tato úloha má však jediné řešení dané d'Alembertovým vzorcem (3.21) a toto řešení je $u(t,x) = 0$. To znamená, že $u_1 \equiv u_2$. Dostáváme tak závěr:

Tvrzení 4. Nechť funkce f je spojitá, funkce ψ spojitě diferencovatelná a funkce φ dvakrát spojitě diferencovatelná. Pak má počáteční úloha pro hyperbolickou rovnici (3.13)–(3.15) jediné klasické řešení, které je dáno rovností (3.35).

Řešení zapsané rovností (3.35) však nemusí být klasické, funkce f, φ, ψ dokonce ani nemusí být spojité, stačí, aby integrované funkce byly integrabilní. Pokud funkce f, φ, ψ nesplňují předpoklady předchozího tvrzení, nemáme pro řešení úlohy (3.13)–(3.15) zaručenu ani existenci, ani jednoznačnost řešení.

Výsledek můžeme vyjádřit i v jiném tvaru. Zavedeme funkci G tří proměnných rovností

$$G(t,x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & x - at < \xi < x + at, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Bezprostředně vidíme, že rovnost (3.35) můžeme přepsat ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)G(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^t \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi)G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma.$$

Funkce G má derivaci podle času (podle první proměnné) ve smyslu distribucí, sr. Dodatek A.3, str. 158. Řešení úlohy proto můžeme vyjádřit ve tvaru

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial t}G(t,x,\xi) + \psi(\xi)G(t,x,\xi) + \int\limits_0^t f(\sigma,\xi)G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}\xi. \tag{3.36}$$

3.1.2 Počáteční úloha pro rovnici na polopřímce

Nyní budeme hledat řešení rovnice (3.10) na oboru časové proměnné $t > 0$ a prostorové proměnné $x > 0$. Popisujeme tedy kmity struny, která je na jednom konci nějak připevněná a její druhý konec „je v nedohlednu“. Na strunu opět působí síla o hustotě f, od počátečního okamžiku $t = 0$. Zase budeme předpokládat, že známe počáteční výchylku $u(0,x)$ v každém bodě struny a také počáteční rychlost $u_t(0,x)$ každého bodu struny. Oproti předchozímu případu však musíme popsat i to, co se děje na konci, na kraji struny. K úloze (3.13)–(3.15) tak musíme přidat i jednu podmínku *okrajovou.* Budeme uvažovat dvě možnosti.

Pevný konec

První možnost je, že „levý konec“ struny je upevněn, že struna nemá v krajním bodě žádnou výchylku. Budeme tedy řešit úlohu

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(t,x), \quad t>0,\ x>0, \tag{3.37}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x > 0, \tag{3.38}$$

$$u_t(0,x) = \psi(x), \quad x > 0, \tag{3.39}$$

$$u(t,0) = 0, \quad t > 0. \tag{3.40}$$

Klasickým řešením budeme opět rozumět spojitou funkci $u : [0,\infty) \times [0,\infty)$, která je na množině $(0,\infty) \times (0,\infty)$ dvakrát spojitě diferencovatelá, splňuje rovnici (3.37), rovnosti (3.40) a

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \lim_{t\to 0+} u_t(t,x) = \psi(x) \quad \text{pro všechna } x \geq 0.$$

Aby úloha mohla mít klasické řešení, musí být funkce f spojitá, funkce ψ diferencovatelná, funkce φ dvakrát diferencovatelná a navíc počáteční podmínky (3.38), (3.39) musí být v souladu s podmínkou okrajovou (3.40), tj. musí platit

$$\lim_{x\to 0+} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0+} \psi(x) = 0.$$

Pro řešení úlohy (3.37)–(3.40) využijeme výsledky dosažené v 3.1.1.

Spojitá funkce $u = u(t,x)$ definovaná na $[0,\infty) \times \mathbb{R}$, která je lichá v proměnné x, tj. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $u(t,x) = -u(t,-x)$, splňuje okrajovou podmínku (3.40). Pokud by v úloze (3.13)–(3.15) byly všechny funkce $f(t,\cdot)$, φ, ψ liché, pak by pro řešení této úlohy platilo

$$u(t,-x) = \frac{\varphi(-x+at)+\varphi(-x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{-x-at}^{-x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{-x-a(t-\sigma)}^{-x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{-\varphi(x-at)-\varphi(x+at)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma = -u(t,x),$$

neboť pro libovolnou lichou funkci g platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\xi)\mathrm{d}\xi = -\int_{\alpha}^{\beta} g(-\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\alpha}^{-\beta} g(\eta)\mathrm{d}\eta = -\int_{-\beta}^{-\alpha} g(\eta)\mathrm{d}\eta.$$

To znamená, že řešení by bylo lichou funkcí v proměnné x a splnilo podmínku $u(t,0)=0$.

Toto pozorování vede k myšlence, že místo úlohy (3.37)–(3.40) budeme řešit úlohu (3.13)–(3.15), v níž budou funkce $f(t,\cdot)$, φ, ψ liché, a to takové, že pro kladné hodnoty nezávisle proměnné se budou shodovat se stejnojmennými funkcemi v úloze (3.37)–(3.40). Přesněji: Zavedeme funkce

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} = (\operatorname{sgn} x)\varphi(|x|),$$

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(x) = (\operatorname{sgn} x)\psi(|x|), \quad \tilde{f} = \tilde{f}(t,x) = (\operatorname{sgn} x)f(t,|x|)$$

a řešíme počáteční úlohu

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + \tilde{f}(t,x), && t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= \tilde{\varphi}(x), && x\in\mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= \tilde{\psi}(x), && x\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

Pro $x \geq at$ platí

$$\int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

a pro $x < at$

$$\int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi = -\int_{x-at}^{0} \psi(-\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{at-x}^{0} \psi(\eta)\mathrm{d}\eta + \int_{0}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{|x-at|}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

tedy

$$\int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{|x-at|}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

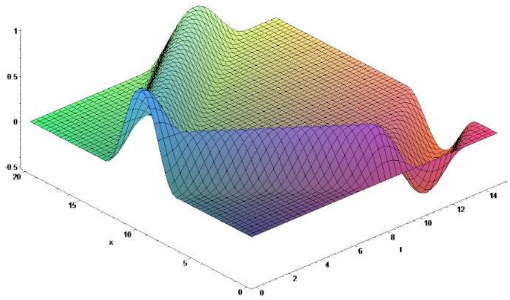
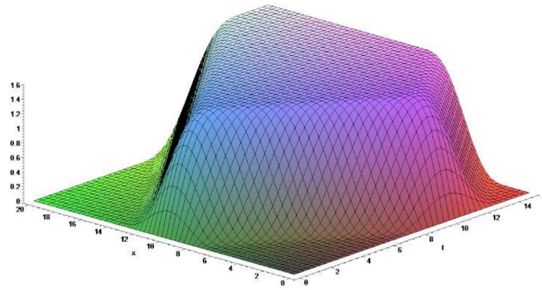
Podobně odvodíme

$$\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \tilde{f}(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{|x-a(t-\sigma)|}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Proto řešení pomocné počáteční úlohy které je současně řešením úlohy (3.37)–(3.40), je podle (3.35) dáno rovností

$$u(t,x) = \\ = \frac{\big(\operatorname{sgn}(x-at)\big)\varphi(|x-at|) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{|x-at|}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_{0}^{t}\left(\int_{|x-a(t-\sigma)|}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma. \tag{3.41}$$

Grafy řešení úlohy (3.37)–(3.40) pro homogenní rovnici s nenulovou počáteční výchylkou nebo s nenulovou počáteční rychlostí jsou na Obrázku 3.3.

Obrázek 3.3: Řešení úlohy (3.37)–(3.40) s nulovou nehomogennitou $f(t,x)=0$. Vlevo: počáteční výchylka $\varphi(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(x-10))$ pro $x<10+\pi$, počáteční rychlost $\psi=0$; vpravo: počáteční výchylka $\varphi(x)=0$, počáteční rychlost $\psi=\frac{1}{2}(1+\cos(x-10))$ pro $x<10+\pi$.

Tentokrát zavedeme funkci $G=G(t,x,\xi)$ předpisem

$$G(t,x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |x-at|<\xi<x+at,\\ 0, & \text{jinak},\end{cases}$$

a řešení úlohy (3.37)–(3.40) můžeme opět vyjádřit ve tvaru

$$u(t,x)=\int\limits_0^\infty\left(\varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial t}G(t,x,\xi)+\psi(\xi)G(t,x,\xi)+\int\limits_0^t f(\sigma,\xi)G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\xi. \tag{3.42}$$

Podívejme se na ještě jednu interpretaci této úlohy. Pokud je počáteční výchylka φ i počáteční rychlost ψ v okolí počátku nulová, pak řešení úlohy modeluje vlnu (nebo půlvlnu) postupující směrem doleva, k bodu upevnění struny. Na tomto pevném konci se vlna odrazí a postupuje doprava. Okrajová podmínka (3.40) tedy také popisuje odraz vlny na pevném konci.

Levý konec struny nemusí být upevněn v nějakém nehybném prostředí, ale může být připojen k nějakému zařízení, které vykonává vlastní pohyb. Tento pohyb se přenáší na strunu, budí na ní kmity. Takovou situaci modeluje úloha

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x),\quad t>0,\ x>0, \tag{3.43}$$
$$u(0,x)=\varphi(x),\quad x>0, \tag{3.44}$$
$$u_t(0,x)=\psi(x),\quad x>0, \tag{3.45}$$
$$u(t,0)=\mu(t),\quad t>0. \tag{3.46}$$

K nutným podmínkám pro existenci klasického řešení nyní přibude ještě požadavek, aby funkce μ byla dvakrát diferencovatelná. Podmínky souladu okrajové podmínky s počátečními podmínkami jsou v tomto případě tvaru

$$\lim_{x\to 0+}\varphi(x)=\lim_{t\to 0+}\mu(t),\qquad \lim_{x\to 0+}\psi(x)=\lim_{t\to 0+}\mu'(t).$$

Řešení úlohy je tvaru

$$u(t,x)=\mu(t)+v(t,x),$$

kde funkce v je řešením úlohy

$$\begin{aligned}v_{tt}&=a^2v_{xx}+f(t,x)-\mu''(t), && t>0,\ x>0,\\ v(0,x)&=\varphi(x)-\mu(0), && x>0,\\ v_t(0,x)&=\psi(x)-\mu'(0), && x>0,\\ v(t,0)&=0, && t>0,\end{aligned}$$

což je úloha již vyřešená; její řešení je dáno formulí (3.41). Snadno ověříme, že se skutečně jedná o řešení úlohy (3.43)–(3.46):

$$u_{tt}(t,x) = \mu''(t) + v_{tt}(t,x) = \mu''(t) + a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x) - \mu''(t) = a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x),$$

neboť $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\mu(t) = 0$, a dále

$$\begin{aligned}
u(0,x) &= \mu(0) + v(0,x) = \mu(0) + \varphi(x) - \mu(0) = \varphi(x),\\
u_t(0,x) &= \mu'(0) + v_t(0,x) = \mu'(0) + \psi(x) - \mu'(0) = \psi(x),\\
u(t,0) &= \mu(t) + v(t,0) = \mu(t).
\end{aligned}$$

Volný konec

Jeden konec struny může být upevněn také tak, aby se nemohl pohybovat ve směru osy x, v kolmém směru ano, ale přitom požadujeme, aby struna byla stále kolmá na směr pohybu.[1] V takovém případě budeme řešit úlohu

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(t,x), && t > 0,\ x > 0, && (3.47)\\
u(0,x) &= \varphi(x), && x > 0, && (3.48)\\
u_t(0,x) &= \psi(x), && x > 0, && (3.49)\\
u_x(t,0) &= 0, && t > 0. && (3.50)
\end{aligned}$$

Nutné podmínky pro existenci klasického řešení jsou stejné, jako u úlohy s pevným koncem, s výjimkou požadavku na soulad podmínek počátečních a okrajové. Ten má nyní tvar

$$\lim_{x\to 0+} \varphi'(x) = 0.$$

Také úvaha, jak řešit úlohu (3.47)–(3.50) je podobná, jako u úlohy (3.37)–(3.40). Jediným rozdílem je to, že volíme rozšíření úlohy do záporných hodnot prostorové proměnné tak, aby rozšíření funkcí $\tilde{f}(t,\cdot)$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ bylo sudé. Tedy definujeme

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(|x|), \quad \tilde{\psi}(x) = \psi(|x|), \quad \tilde{f}(t,x) = f(t,|x|)$$

a řešíme úlohu

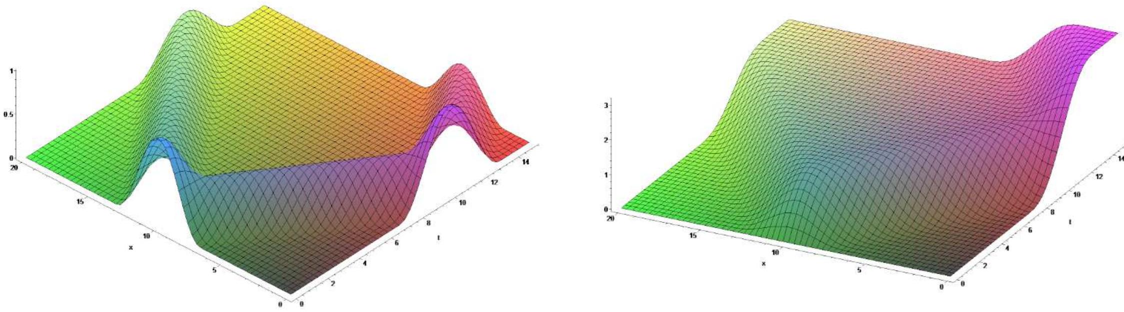
$$\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx} + \tilde{f}(t,x), && t > 0,\ x \in \mathbb{R},\\
u(0,x) &= \tilde{\varphi}(x), && x \in \mathbb{R},\\
u_t(0,x) &= \tilde{\psi}(x), && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Její řešení je podle vztahu (3.35) dáno rovností

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(|x-at|)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(|\xi|)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,|\xi|)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma. \quad (3.51)$$

Grafy řešení úlohy (3.47)–(3.50) pro homogenní rovnici s dvěma různými počátečními podmínkami jsou na Obrázku 3.4.

[1] Tento popis je příliš krkolomný, je uveden jen proto, aby hyperbolická rovnice v jedné prostorové proměnné byla jednotně interpretována jako příčné kmity struny. Tato rovnice však stejně dobře popisuje kmity podélné; funkce u může vyjadřovat hustotu kmitajícího média. Nulová derivace podle prostorové proměnné pak říká, že médium nepřechází za krajní bod.



Obrázek 3.4: Řešení úlohy (3.47)–(3.50) s nulovou nehomogennitou $f(t,x) = 0$. Vlevo: počáteční výchylka $\varphi(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(x-10))$ pro $x < 10+\pi$, počáteční rychlost $\psi = 0$; vpravo: počáteční výchylka $\varphi(x) = 0$, počáteční rychlost $\psi = \frac{1}{2}(1+\cos(x-10))$ pro $x < 10+\pi$.

Definujeme-li nyní funkci $G = G(t,x,\xi)$ vztahem

$$G(t,x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & |x-at| < \xi < x+at, \\ \dfrac{1}{a}, & 0 < \xi < at-x, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

lze řešení úlohy (3.47)–(3.50) opět zapsat rovností (3.42).

Okrajová podmínka nemusí být nulová. Pokud podmínku (3.50) nahradíme obecnější okrajovou podmínkou

$$u_x(t,0) = \nu(t), \quad t > 0, \tag{3.52}$$

pak řešení úlohy (3.47)–(3.49), (3.52) je tvaru

$$u(t,x) = x\nu(t) + v(t,x),$$

kde funkce v je řešením úlohy

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx} + f(t,x) - x\nu''(t), && t > 0,\ x > 0, \\ v(0,x) &= \varphi(x) - x\nu(0), && x > 0, \\ v_t(0,x) &= \psi(x) - x\nu'(0), && x > 0, \\ v_x(t,0) &= 0, && t > 0, \end{aligned}$$

která již má nulovou okrajovou podmínkou.

3.1.3 Počáteční úloha pro rovnici na úsečce

Nakonec se podíváme na řešení hyperbolické rovnice (3.10) na konečném oboru prostorové proměnné x. Popisujeme tedy kmity struny konečné délky l, která je na obou koncích nějak upevněna. Musíme tedy popsat, jak toto upevnění vypadá, tedy zadat *okrajové podmínky* na obou koncích struny.

Dva pevné konce – užití d'Alembertova vzorce

Nejjednodušší je možnost, kdy jsou oba konce struny pevné, nepohybují se. Máme tedy úlohu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0,\ 0 < x < l, \tag{3.53}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 < x < l \tag{3.54}$$

$$u_t(0,x) = \psi(x), \quad 0 < x < l \tag{3.55}$$

$$u(t,0) = 0 = u(t,l), \quad t > 0. \tag{3.56}$$

Nutné podmínky pro existenci klasického řešení této úlohy jsou opět spojitost nehomogenity f, diferencovatelnost počáteční rychlosti ψ a dvakrát diferencovatelnost počáteční výchylky φ a dále podmínky souladu počátečních a okrajových podmínek

$$\lim_{x\to 0+} \varphi(x) = 0 = \lim_{x\to l-} \varphi(x), \qquad \lim_{x\to 0+} \psi(x) = 0 = \lim_{x\to l-} \psi(x).$$

Opět využijeme výsledky dosažené v 3.1.1. Okrajové podmínky (3.56) budou splněny zejména tehdy, když graf funkce $u(t,\cdot)$ bude pro každé t symetrický kolem bodu $x=0$ (funkce $u(t,\cdot)$ bude lichá) a současně také symetrický kolem bodu $x=l$. Toho lze dosáhnout tak, že grafy všechny funkcí $f(t,\cdot)$, φ, ψ budou mít stejnou vlastnost. A budou ji mít, pokud budou liché a $2l$-periodické.

Spojité, liché a $2l$-periodické funkce lze vyjádřit jako součty sinových řad. Zavedeme tedy funkce

$$\tilde\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad \tilde\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\tilde f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(t,\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x;$$

výrazy v závorkách jsou Fourierovy koeficienty vzhledem k soustavě funkcí $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$, která je na intervalu $(-l,l)$ orthogonální. Pak řešíme počáteční úlohu

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2u_{xx} + \tilde f(t,x), && t>0,\ x\in\mathbb{R},\\ u(0,x) &= \tilde\varphi(x), && x\in\mathbb{R},\\ u_t(0,x) &= \tilde\psi(x), && x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Její řešení je dáno formulí (3.35). Jednotlivé členy na její pravé straně upravíme; využíváme přitom vzorce $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ a $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ a skutečnosti, že Fourierova řada spojité funkce konverguje absolutně a stejnoměrně, můžene tedy zaměnit pořadí sumace a integrace:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\tilde\varphi(x-at)+\tilde\varphi(x+at)\right) &= \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\left(\sin\frac{n\pi}{l}(x-at)+\sin\frac{n\pi}{l}(x+at)\right) = \\ &= \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi a}{l}t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde\psi(\xi)\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\left(\int_{x-at}^{x+at}\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right) = \\ &= \frac{1}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\left[\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}\xi\right]_{\xi=x+at}^{x-at} = \\ &= \frac{1}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\left(\cos\frac{n\pi}{l}(x-at)-\cos\frac{n\pi}{l}(x+at)\right) = \\ &= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi a}{l}t, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x-a(t+\sigma)} \tilde{f}(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma \quad =$$

$$= \frac{1}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \left(\int_0^l f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma \;=$$

$$= \frac{1}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \left(\int_0^l f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left[\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}\xi\right]_{\xi=x+a(t-\sigma)}^{x-a(t-\sigma)}\mathrm{d}\sigma \;=$$

$$= \frac{1}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^t \left(\int_0^l f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\cos\frac{n\pi}{l}(x-a(t-\sigma))-\cos\frac{n\pi}{l}(x+a(t-\sigma))\right)\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^t \left(\int_0^l f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma \;=$$

$$= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x\int_0^t \sin\frac{n\pi a}{l}(t-\sigma)\left(\int_0^l f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma.$$

Tyto výsledky dosadíme do vztahu (3.35) a znovu využijeme možnosti zaměnit pořadí integrace a sumace. Dostaneme tak řešení úlohy (3.53)–(3.56) ve tvaru

$$u(t,x) = \int_0^l \Bigg(\varphi(\xi)\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi a}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x\,\sin\frac{n\pi}{l}\xi\, +$$
$$+\,\psi(\xi)\frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x\,\sin\frac{n\pi}{l}\xi\, +$$
$$+\int_0^t f(\sigma,\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\sigma)\,\sin\frac{n\pi}{l}x\,\sin\frac{n\pi}{l}\xi\Bigg)\,\mathrm{d}\xi.$$

Na tomto výsledku je sympatické to, že pro $\psi \equiv 0$, $f \equiv 0$ je stejný, jako výsledek (3.8) získaný „intuitivním“ postupem. Ovšem vzorec vypadá poněkud monstrózně. Proto ho zjednodušíme tak, že zavedeme označení

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l} \quad \text{a} \quad G(t,x,\xi) = \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{l}x\,\sin\frac{n\pi}{l}\xi$$

a výsledek zapíšeme ve tvaru

$$u(t,x) = \int_0^l \left(\varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial t}G(t,x,\xi) + \psi(\xi)G(t,x,\xi) + \int_0^t f(\sigma,\xi)G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\xi. \tag{3.57}$$

3.1.4 Obecná okrajová úloha – metoda separace proměnných

Tato metoda navazuje na teorii okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice, viz Dodatek B.

Homogenní Robinovy okrajové podmínky

Začneme řešením homogenní rovnice s počátečními podmínkami a homogenními Robinovými okrajovými podmínkami

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx} + cu, && t > 0,\ 0 < x < l, && (3.58)\\
u(0,x) &= \varphi(x), && 0 < x < l, && (3.59)\\
u_t(0,x) &= \psi(x), && 0 < x < l, && (3.60)\\
\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = 0 &= \alpha_1 u(t,l) + \beta_1 u_x(t,l), && t > 0. && (3.61)
\end{aligned}
$$

Pro parametry okrajových podmínek platí $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0 \neq \alpha_1^2 + \beta_1^2$.

Řešení budeme hledat ve tvaru součinu funkcí, z nichž jedna závisí pouze na čase a druhá pouze na prostorové proměnné, tj.

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

Po dosazení do rovnice (3.58) dostaneme

$$T''X = a^2 TX'' + cTX,$$

kde $'$ značí obyčejnou derivaci podle příslušné jediné nezávisle proměnné. Nyní separujeme časovou a prostorovou proměnnou, tj. od předchozí rovnosti odečteme výraz cTX a výsledek vydělíme výrazem a^2TX,

$$\frac{T''}{a^2T} - \frac{c}{a^2} = \frac{X''}{X}.$$

Výraz na levé straně rovnosti závisí pouze na čase t, výraz na pravé straně pouze na prostorové proměnné α. To znamená, že oba výrazy jsou rovny nějaké konstantě; označíme ji $-\lambda$. Dostáváme tak

$$\frac{T''}{a^2T} - \frac{c}{a^2} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

což jsou vlastně dvě obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu,

$$-X'' = \lambda X \quad \text{a} \quad T'' = (c - a^2\lambda)T. \tag{3.62}$$

Nejprve budeme řešit rovnici pro „prostorovou část“ X, tedy pro tu nezávisle proměnnou, pro niž jsou zadány homogenní okrajové podmínky. Dostatečnou podmínkou pro to, aby funkce u splňovala okrajovou podmínku je, aby stejnou okrajovou podmínku splnil její dělitel X. S tímto požadavkem dostaneme okrajovou úlohu

$$
\begin{aligned}
-X'' &= \lambda X, && 0 < x < l, && (3.63)\\
\alpha_0 X(0) + \beta_0 X'(0) = 0 &= \alpha_1 X(l) + \beta_1 X'(l). && && (3.64)
\end{aligned}
$$

To je Sturmova-Liouvilleova úloha s $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ (viz Dodatek B.2). Podle Věty 3 proto existují vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ a příslušné vlastní funkce $v_1, v_2, \ldots$, které jsou řešením této úlohy. Pro vlastní hodnoty přitom platí $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$.

Nyní se podíváme na „časovou složku“ T v rovnosti (3.62). Vzhledem k tomu, že konstanta λ může nabývat spočetně mnoha hodnot, rozlišíme i příslušné funkce T dolními indexy. Dostáváme tak spočetně mnoho obyčejných lineárních homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu ve tvaru

$$T_n'' = (c - a^2\lambda_n)T_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.65}$$

Budeme nejprve předpokládat, že $c < a^2\lambda_1$, tedy že koeficienty na pravých stranách všech rovnic jsou záporné. Pak předchozí rovnice mají řešení

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{a^2\lambda_n - c}\,t + B_n \sin\sqrt{a^2\lambda_n - c}\,t, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Poněvadž řešení rovnice (3.76) hledáme ve tvaru součinu funkcí T a X, odvodili jsme, že rovnice (3.58) s okrajovou podmínkou (3.61) má spočetně mnoho řešení

$$u_n(t,x) = \Big(A_n \cos \sqrt{a^2\lambda_n - c}\,t + B_n \sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\,t\Big)\, v_n(x), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Poněvadž rovnice i okrajová podmínka jsou homogenní, platí princip superpozice a tedy i součet těchto funkcí je řešením rovnice (3.58) s okrajovou podmínkou (3.58). Řešení úlohy (3.58)–(3.61) proto zapíšeme jako nekonečnou řadu se zatím neurčenými koeficienty A_n, B_n

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos \sqrt{a^2\lambda_n - c}\,t + B_n \sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\,t\Big)\, v_n(x); \tag{3.66}$$

tato řada konverguje absolutně a skorostejnoměrně, neboť vlastní funkce $v_1, v_2, \dots$ tvoří úplnou orthogonální posloupnost na intervalu $(0, l)$.

Ještě je potřeba určit hodnoty koeficientů A_n a B_n, $n = 1, 2, \dots$. Určíme je z počátečních podmínek úlohy. Z první podmínky (3.59) dostaneme

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x) \tag{3.67}$$

a to znamená, že koeficienty A_n jsou vlastně Fourierovými koeficienty funkce φ vzhledem k orthogonální posloupnosti funkcí $v_1, v_2, \dots,$

$$A_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^l \varphi(\xi)\, v_n(\xi) \mathrm{d}\xi, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{3.68}$$

Z podmínky (3.60) pro počáteční rychlost dostaneme derivováním řady (3.66) rovnost

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, \Big(-A_n \sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\,t + B_n \cos \sqrt{a^2\lambda_n - c}\,t\Big)\, v_n(x)\Big|_{t=0} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{a^2\lambda_n - c}\; v_n(x)$$

a odtud plyne, že výrazy $B_n\sqrt{a^2\lambda_n - c}$ jsou Fourierovými koeficienty funkce ψ vzhledem k bázi $v_1, v_2, \dots,$ tedy

$$B_n = \frac{1}{\|v_n\|^2 \sqrt{a^2\lambda_n - c}} \int_0^l \psi(\xi)\, v_n(\xi) \mathrm{d}\xi, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{3.69}$$

Vypočítané koeficienty A_n a B_n dosadíme do vyjádření (3.66) a zaměníme pořadí integrace a sumace. Dostaneme tak vyjádření řešení úlohy (3.58)-(3.61) ve tvaru

$$u(t,x) = \int_0^l \left(\varphi(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \cos \sqrt{a^2\lambda_n - c}\,t + \psi(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \frac{\sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\,t}{\sqrt{a^2\lambda_n - c}}\right) \mathrm{d}\xi. \tag{3.70}$$

Nyní se podíváme na možnost $c = a^2\lambda_1$. První z rovnic (3.65) je tvaru

$$T_1'' = 0$$

a má obecné řešení

$$T_1(x) = A_1 + B_1 t.$$

Řešení úlohy (3.58)–(3.61) můžeme zapsat jako

$$u(t,x) = (A_1 + B_1 t)\, v_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(A_n \cos \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, t + B_n \sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, t \Big)\, v_n(x). \tag{3.71}$$

Po dosazení do počáteční podmínky (3.59) dostaneme

$$\varphi(x) = A_1 v_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x),$$

což je stejná rovnost, jako (3.67). Koeficienty A_n jsou opět dány rovnostmi (3.68). Druhá počáteční podmínka (3.60) dává

$$\psi(x) = B_1 v(x) + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sqrt{a^2\lambda_n - c}\; v_n(x)$$

a z této rovnosti vypočítáme koeficient

$$B_1 = \frac{1}{\|v_1\|^2} \int_0^l \psi(\xi) v_1(\xi) \mathrm{d}\xi;$$

koeficienty $B_2, B_3, \dots$ jsou opět dány rovnostmi (3.69). Ještě si uvědomíme, že

$$\cos \sqrt{a^2\lambda_1 - c}\, t = 1 \quad \text{pro } c = a^2\lambda_1$$

a

$$\lim_{c \to a^2\lambda_1} \frac{\sin \sqrt{a^2\lambda_1 - c}\, t}{\sqrt{a^2\lambda_1 - c}} = \lim_{c \to a^2\lambda_1} \frac{t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c} \sqrt{a^2\lambda_1 - c} \right) \cos \sqrt{a^2\lambda - c}\, t}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c} \sqrt{a^2\lambda - c}} = t$$

a vidíme, že i v případě $c = a^2\lambda_1$ můžeme řešení úlohy zapsat ve tvaru (3.70) s tím, že neurčitý výraz ve druhé sumě nahradíme jeho limitní hodnotou.

Nakonec se budeme věnovat případu $c > a^2\lambda_1$. Poněvadž vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ tvoří rostoucí posloupnost divergující do nekonečna, je počet vlastních čísel menších než c/a^2 konečný. Existuje tedy index N takový, že $a^2\lambda_n < c$ pro každý index $n < N$. Prvních $N-1$ rovnic mezi rovnicemi (3.65), tj. rovnice

$$T_n'' = (c - a^2\lambda_n) T_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

s kladnými koeficienty na pravé straně mají řešení

$$T_n(t) = A_n \cosh \sqrt{c - a^2\lambda_n} t + B_n \sinh \sqrt{c - a^2\lambda_n} t, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Celkem tak dostaneme řešení rovnice (3.58) s okrajovou podmínkou (3.78) ve tvaru

$$\begin{aligned} u(t,x) = \sum_{n=1}^{N-1} \Big(A_n \cosh \sqrt{c - a^2\lambda_n} t + B_n \sinh \sqrt{c - a^2\lambda_n} t \Big)\, v_n(x) + \\ + \sum_{n=N}^{\infty} \Big(A_n \cos \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, t + B_n \sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, t \Big)\, v_n(x). \end{aligned} \tag{3.72}$$

Po dosazení první počáteční podmínky (3.59) do této rovnosti opět dostaneme

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x).$$

Druhá počáteční podmínka (3.59) dává rovnost

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{N-1} B_n \sqrt{c - a^2\lambda_n} v_n(x) + \sum_{n=N}^{\infty} B_n \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{|a^2\lambda_n - c|} v_n(x),$$

takže

$$B_n = \frac{1}{\|v_n\|^2 \sqrt{|a^2\lambda_n - c|}} \int_0^l \psi(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Takto určené koeficienty dosadíme do obecného vyjádření řešení, zaměníme pořadí integrace a sumace, upravíme a dostaneme řešení úlohy (3.76)–(3.78) ve tvaru

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_0^l \Bigg[\varphi(\xi) \Bigg(\sum_{n=1}^{n_0} \frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \cosh \sqrt{c - a^2\lambda_n} t + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \cos \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, t \Bigg) + \\ + \psi(\xi) \Bigg(\sum_{n=1}^{n_0} \frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \frac{\sinh \sqrt{c - a^2\lambda_n} t}{\sqrt{c - a^2\lambda_n}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \frac{\sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, t}{\sqrt{a^2\lambda_n - c}} \Bigg) \Bigg] \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Celkem jsme dostali vyjádření řešení homogenní rovnice (3.58) s homogenními okrajovými podmínkami (3.61) a obecnými počátečními podmínkami (3.59), (3.60) ve tvaru (3.70) v případě $c \leq a^2\lambda_1$ a ve tvaru (3.70) v případě opačném. Ovšem pravá strana rovnosti (3.70) je speciálním případem pravé strany rovnosti (3.73) pro $N = 1$. Rovnost (3.73) tedy vyjadřuje řešení úlohy (3.58)–(3.61).

Označíme-li

$$G(t,x,\xi) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \frac{\sinh \sqrt{c - a^2\lambda_n} t}{\sqrt{c - a^2\lambda_n}} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \frac{\sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, t}{\sqrt{a^2\lambda_n - c}} \tag{3.74}$$

můžeme výsledek (3.73) přepsat v kratším tvaru

$$u(t,x) = \int_0^l \left(\varphi(\xi) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(t,x,\xi) + \psi(\xi) G(t,x,\xi) \right) \mathrm{d}\xi. \tag{3.75}$$

Podobně jako v případě rovnice na přímce, budeme ve druhém kroku řešit úlohu pro nehomogenní rovnici s nulovými počátečními podmínkami, tj. úlohu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + cu + f(t,x), \qquad t > 0,\ 0 < x < l, \tag{3.76}$$

$$u(0,x) = 0 = u_t(0,x), \qquad 0 < x < l, \tag{3.77}$$

$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = 0 = \alpha_1 u(t,l) + \beta_1 u_x(t,l), \quad t > 0. \tag{3.78}$$

Řešení této úlohy je možné najít pomocí Duhamelova principu. Ukážeme ale jinou možnost, adaptaci metody variace konstant.

Budeme hledat řešení úlohy ve tvaru podobném jako (3.66) nebo (3.72) s tím rozdílem, že místo speciálního tvaru koeficientů závislých na goniometrických nebo hyperbolických funkcích napíšeme nějaké obecné dvakrát diferencovatelné funkce C_n nezávisle proměnné t, tedy

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n(x). \tag{3.79}$$

Poněvadž všechny bázové funkce $v_1, v_2, \ldots$ splňují okrajovou podmínku (3.78), splní ji také funkce definovaná touto řadou. Nehomogenitu f také vyjádříme pomocí Fourierovy řady vzhledem k orthogonální posloupnosti $v_1, v_2, \ldots$ s koeficienty závislými na čase,

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(x), \quad \text{kde } F_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^l f(t,\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{3.80}$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (3.76), využijeme vlastnost

$$\frac{\partial^2 v_n(x)}{\partial x^2} = -\lambda_n v_n(x)$$

bázových funkcí a dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n''(t) v_n(x) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \lambda_n v_n(x) + c \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(x),$$

po úpravě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n''(t) + (a^2\lambda_n - c) C_n(t) - F_n(t) \right) v_n(x) = 0.$$

Posloupnost funkcí $v_1, v_2, \ldots$ je úplná orthogonální, proto musí být všechny koeficienty ve Fourierově řadě na levé straně této rovnosti nulové. Dostáváme tak spočetně mnoho obyčejných lineárních nehomogenních diferenciálních rovnic druhého řádu

$$C_n'' + (a^2\lambda_n - c) C_n = F_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.81}$$

Obecné řešení přidružené homogenní rovnice k této rovnici je

$$C_n(t) = \begin{cases} A_n \cosh \sqrt{c - a^2\lambda_n}\, t + B_n \sinh \sqrt{c - a^2\lambda_n}\, t, & c > a^2\lambda_n, \\ A_n + B_n t, & c = a^2\lambda_n, \\ A_n \cos \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, t + B_n \sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, t, & c < a^2\lambda_n, \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Nulové počáteční podmínky (3.77) budou splněny zejména tehdy, když pro všechny koeficienty v řadě (3.79) bude platit

$$C_n(0) = 0, \; C_n'(0) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.82}$$

Nehomogenní rovnice (3.81) s počátečními podmínkami (3.82) má řešení

$$C_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{c - a^2\lambda_n}} \displaystyle\int_0^t F_n(\sigma) \sinh \sqrt{c - a^2\lambda_n} (t-\sigma) \mathrm{d}\sigma, & c > a^2\lambda_n, \\ \displaystyle\int_0^t (t-\sigma) F(\sigma) \mathrm{d}\sigma, & c = a^2\lambda_n, \\ \dfrac{1}{\sqrt{a^2\lambda_n - c}} \displaystyle\int_0^t F_n(\sigma) \sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, (t-\sigma) \mathrm{d}\sigma, & c < a^2\lambda_n, \end{cases}$$

které lze získat např. metodou variace konstant.

Za funkce F_n v integrálu dosadíme jejich vyjádření (3.80) a funkce C_n dosadíme do obecného zápisu (3.79). Dostaneme řešení úlohy (3.76)–(3.78) ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^t \left(\int_0^l f(\sigma,\xi) \frac{v_n(x) v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \frac{\sinh \sqrt{c - a^2\lambda_n} (t-\sigma)}{\sqrt{c - a^2\lambda_n}} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \sum_{n=N}^{\infty} \int_0^t \left(\int_0^l f(\sigma,\xi) \frac{v_n(x) v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \frac{\sin \sqrt{a^2\lambda_n - c}\, (t-\sigma)}{\sqrt{a^2\lambda_n - c}} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma$$

Poznamenejme, že tento výsledek opět platí i pro $c = a^2\lambda_N$, pokud příslušný neurčitý výraz nahradíme limitou pro $c \to a^2\lambda_N$, tedy výrazem $(t-\sigma)$. Po záměně pořadí integrace a sumace a porovnáním s definicí (3.74) funkce G vidíme, že řešení úlohy (3.76)–(3.78) můžeme zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \int_0^l \int_0^t f(\sigma,\xi) G(t-\sigma,x,\xi) \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\xi. \tag{3.83}$$

Řešení nehomogenní rovnice s homogenními okrajovými podmínkami a obecnými počátečními podmínkami, tedy úlohy (3.76), (3.59), (3.60), (3.61) je součtem řešení (3.75) úlohy (3.58)-(3.61) a řešení (3.83) úlohy (3.76)-(3.78), jak se lze snadno přesvědčit přímým výpočtem.

Dostáváme tak závěr: Řešení úlohy (3.76), (3.59), (3.60), (3.61) je dáno integrálem

$$u(t,x) = \int_0^l \left(\varphi(\xi) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(t,x,\xi) + \psi(\xi) G(t,x,\xi) + \int_0^t f(\sigma,\xi) G(t-\sigma,x,\xi) \mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}\xi,$$

kde funkce G je definována nekonečnou řadou (3.74), $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ jsou vlastní čísla a $v_1, v_2, \ldots$ jsou příslušné vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.63), (3.64), $N = \min \left\{ n : c \le a^2 \lambda_n \right\}$.

Nehomogenní Robinovy podmínky

Nejobecnější úlohou pro hyperbolickou rovnici s konstantními koeficienty v jedné prostorové proměnné na úsečce je úloha pro nehomogenní rovnici s nenulovými počátečními a nehomogenními okrajovými podmínkami

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + cu + f(t,x), \qquad t > 0,\ 0 < x < l, \tag{3.84}$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \tag{3.85}$$

$$\begin{matrix} \alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = \mu_0(t), \\ \alpha_1 u(t,l) + \beta_1 u_x(t,l) = \mu_1(t), \end{matrix} \quad t > 0. \tag{3.86}$$

Řešení této úlohy můžeme psát ve tvaru

$$u(t,x) = U(t,x) + w(t,x),$$

kde fukce U splňuje okrajové podmínky (3.86), tj.

$$\alpha_0 U(t,0) + \beta_0 U_x(t,0) = \mu_0(t), \quad \alpha_1 U(t,0) + \beta_1 U_x(t,0) = \mu_1(t),$$

a funkce w je řešením úlohy s homogenní okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} w_{tt} &= a^2 w_{xx} + cw + f(t,x) + cU(t,x) + a^2 U_{xx}(t,x) - U_{tt}(t,x), && t > 0,\ 0 < x < l, \\ w(0,x) &= \varphi(x) - U(0,x),\ w_t(0,x) = \psi(x) - U_t(0,x), && 0 < x < l, \\ \alpha_0 w(t,0) &+ \beta_0 w_x(t,0) = 0 = \alpha_1 w(t,l) + \beta_1 w_x(t,l), && t > 0; \end{aligned}$$

to lze ověřit přímým výpočtem. Úloha pro nehomogenní rovnici s homogenními podmínkami již vyřešenu. Zbývá najít funkci U.

Je vhodné tuto funkci volit v co nejjednodušším tvaru, např. polynom nebo goniometrickou funkci.

Pro Dirichletovy podmínky, $\beta_0 = \beta_1 = 0$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, stačí volit

$$U(t,x) = \mu_0(t) - \frac{\mu_0(t) - \mu_1(t)}{l} x, \quad \text{nebo} \quad U(t,x) = \mu_0(t) + \big(\mu_1(t) - \mu_0(t)\big) \sin \frac{\pi}{2l} x.$$

Pro Nemannovy podmínky, $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 1$ stačí volit

$$U(t,x) = \mu_0(t) x - \frac{\mu_0(t) - \mu_1(t)}{2l} x^2, \quad \text{nebo} \quad \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t)}{2} x + \frac{\mu_0(t) - \mu_1(t)}{\pi} l \cos \frac{\pi}{2l} x.$$

Pro Dirichletovu podmínku v levém krajním bodě a Neumannovu podmínku v pravém krajním bodě, $\alpha_0 = \beta_1 = 1$, $\alpha_1 = \beta_0 = 0$, stačí volit

$$U(t,x) = \mu_0(t) + x\mu_1(t), \quad \text{nebo} \quad U(t,x) = \mu_0(t) - \frac{2l\mu_1(t)}{\pi} \sin \frac{\pi}{2l} x,$$

a tak dál a tak podobně.

Obecně lze za funkci U zvolit polynom nejvýše druhého stupně ve tvaru

$$U(t,x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_1\mu_0(t) - \alpha_0\mu_1(t)}{\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 - \alpha_0\alpha_1 l} x + \dfrac{\beta_0\mu_1(t) - (\beta_1 + \alpha_1 l)\mu_0(t)}{\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 - \alpha_0\alpha_1 l}, & \beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 \neq \alpha_0\alpha_1 l, \\[2ex] \dfrac{\mu_1(t) - (\alpha_1 l + \beta_1)\mu_0(t)}{l(\alpha_1 l + 2\beta_1)} x^2 + \dfrac{\mu_0(t)}{\beta_0} x, & \begin{array}{l} \beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 = \alpha_0\alpha_1 l, \\ \beta_0(\alpha_1 l + 2\beta_1) \neq 0, \end{array} \\[2ex] \dfrac{\mu_1(t)}{\alpha_1 l + \beta_1} x + \dfrac{\mu_0(t)}{\alpha_0} - \dfrac{\beta_0\mu_1(t)}{\alpha_0(\alpha_1 l + \beta_1)}, & \begin{array}{l} \beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 = \alpha_0\alpha_1 l, \\ \beta_0 \neq 0 = \alpha_1 l + 2\beta_1, \end{array} \\[2ex] \dfrac{\mu_1(t)}{l(\alpha_1 l + 2\beta_1)} x^2 + \dfrac{\mu_0(t)}{\alpha_0}, & \begin{array}{l} \beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 = \alpha_0\alpha_1 l, \\ \beta_0 = 0 \neq \alpha_1 l + 2\beta_1. \end{array} \end{cases}$$

Příklad

Budeme řešit rovnici pro popis tlumených kmitů struny délky l. Tlumení je síla odporu prostředí, která působí proti směru pohybu struny a je úměrná rychlosti tohoto pohybu, konstanta úměrnosti je $\beta > 0$. Struna je na jednom konci upevněna, její druhý konec vykonává harmonický pohyb s frekvencí ω a s amplitudou A. Na počátku je struna v klidu, pohyblivý konec má nulovou výchylku.

Přesněji řečeno, budeme řešit úlohu pro hyperbolickou rovnici na úsečce:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \beta u_t, \qquad t > 0,\ 0 < x < l, \tag{3.87}$$
$$u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = 0, \qquad 0 < x < l, \tag{3.88}$$
$$u(t,0) = 0,\ u(t,l) = A \sin \omega t, \qquad t > 0. \tag{3.89}$$

Úlohu nejprve pomocí transformace $u(t,x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta t} v(t,x)$ převedeme na úlohu pro rovnici v kanonickém tvaru

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tfrac{1}{4}\beta^2 v, \qquad t > 0,\ 0 < x < l, \tag{3.90}$$
$$v(0,x) = 0,\ v_t(0,x) = 0, \qquad 0 < x < l, \tag{3.91}$$
$$v(t,0) = 0,\ v(t,l) = A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta t} \sin \omega t, \qquad t > 0. \tag{3.92}$$

Řešení této úlohy hledáme ve tvaru $v(t,x) = U(t,x) + w(t,x)$, kde funkce $U(t,\cdot)$ splňuje okrajovou podmínku (3.92). Volíme

$$U(t,x) = \frac{Ax}{l} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta t} \sin \omega t.$$

Pak je

$$U_{xx}(t,x) = 0, \quad U_t(t,x) = \frac{Ax}{l} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta t} \left(\frac{\beta}{2} \sin \omega t + \omega \cos \omega t \right),$$
$$U_{tt}(t,x) = \frac{Ax}{l} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta t} \left(\left(\frac{\beta^2}{4} - \omega^2 \right) \sin \omega t + \beta\omega \cos \omega t \right)$$

a dále

$$\frac{\beta^2}{4} U(t,x) - U_{tt}(t,x) = \frac{A\omega x}{l} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta t} (\omega \sin \omega t - \beta \cos \omega t) =$$
$$= \frac{A\omega\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}{l} x\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta t} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin \omega t - \frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos \omega t \right) = Cx\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta t} \sin(\omega t - \alpha),$$

kde jsme označili

$$C = \frac{A\omega\sqrt{\omega^2+\beta^2}}{l}, \qquad \alpha = \arccos\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}} = \arcsin\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}}.$$

To znamená, že funkce w je řešením úlohy

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + \tfrac{1}{4}\beta^2 w + Cx\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta t}\sin(\omega t - \alpha), \quad t > 0,\ 0 < x < l, \tag{3.93}$$

$$w(0,x) = 0,\ w_t(0,x) = -\frac{A\omega}{l}x, \qquad 0 < x < l, \tag{3.94}$$

$$w(t,0) = 0 = w(t,l), \qquad t > 0. \tag{3.95}$$

Vlastní čísla a vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy

$$\begin{aligned} X'' &= \lambda X, \qquad 0 < x < l, \\ X(0) &= 0 = X(l), \end{aligned}$$

jsou

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad \text{a} \quad v_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Označme nyní

$$\gamma_n = \sqrt{\left|\frac{\beta^2}{4} - a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right|} = \frac{\sqrt{|(\beta l)^2 - (2an\pi)^2|}}{2l}, \qquad N = \min\{n : \beta l \le 2an\pi\}.$$

Podle (3.74) je

$$G(t,x,\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{N-1}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\frac{\sinh\gamma_n t}{\gamma_n} + \frac{2}{l}\sum_{n=N}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\frac{\sin\gamma_n t}{\gamma_n}.$$

Řešení úlohy (3.93), (3.94), (3.95) je dáno formulí

$$w(t,x) = \int_0^l \left(-\frac{A\omega}{l}\xi\, G(t,x,\xi) + \int_0^t C\xi\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta\sigma}\sin(\omega\sigma - \alpha)\, G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\xi.$$

■

Klasická aplikace: Kmity strun hudebních nástrojů

V úvodu k této kapitole jsme odvodili, že výchylku $u = u(t,x)$ v čase t v bodě x struny délky l o lineární hustotě ϱ napjaté silou T, na niž působí vnější síla o hustotě $f(t,x)$, vyjadřuje rovnice (3.3) s okrajovými podmínkami (3.5). Hudební nástroje mívají struny homogenní, tedy s konstatntní lineární hustotou. V takovém případě máme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x). \tag{3.96}$$

Řešení této rovnice s homogenními Dirichletovými podmínkami (3.5) a počátečními podmínkami tvaru (3.54) a (3.55) je dáno rovností (3.57), kde

$$G(t,x,\xi) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{T}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\omega_n t\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\varrho}},$$

tedy

$$G(t,x,\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi.$$

Kmitající struna vyvolává chvění vzduchu, které vnímáme jako hudební tón. Jako sílu tónu vnímáme amplitudy kmitů, jako jeho výšku periodu nebo frekvenci kmitů a jako barvu poměry energií základního tónu (frekvence ω_1) a jednotlivých tónů alikvotních (frekvence ω_2, ω_3, ...).

Strunu lze rozkmitat v zásadě třemi způsoby. U drnkacích nástrojů (např. cembalo, harfa, kytara) jsou kmity buzeny tím, že strunu na počátku vychýlíme z rovnovážné polohy a pustíme. Struna tedy má počáteční výchylku (počáteční profil) φ a nulovou počáteční rychlost. U úderných nástrojů (např. klavír, cimbál) naopak dodáme počáteční rychlost ψ při nulové počáteční výchylce. U drnkacích a úderných nástrojů po rozeznění struny na ni již žádná vnější síla nepůsobí. Naopak, struny smyčcových (např. housle, violy) nebo kolových (niněra) nástrojů jsou rozechvívány působící silou tření f.

Drnkací nástroje: Kmitání strun těchto nástrojů jsou modelovány homogenní hyperbolickou rovnicí s počátečními podmínkami a homogenními okrajovými pomínkami ve tvaru

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \tfrac{T}{\varrho}u_{xx}, && t>0,\ 0<x<l,\\ u(0,x) &= \varphi(x),\ u_t(0,x)=0, && 0<x<l,\\ u(t,0) &= 0 = u(t,l), && t>0. \end{aligned}$$

Řešení této úlohy je dáno rovností

$$u(t,x) = \int_0^l \varphi(\xi)\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\omega_n t\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\cos\omega_n t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

a při označení

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad u_n(t,x) = A_n\cos\omega_n t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

dostaneme

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\omega_n t\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{3.97}$$

Z této rovnosti vidíme, že každý bod struny se souřadnicí x_0 vykonává kmity, které jsou superpozicí (složením) jednoduchách harmonických pohybů s amplitudami

$$\left|A_n\sin\frac{n\pi}{l}x_0\right|,\quad n=1,2,3,\ldots.$$

Tyto jednoduché pohyby nazýváme *stojaté vlny.* První stojatá vlna má frekvenci základního tónu ω_1, ostatní mají frekvence tónů svrchních (alikvotních). V bodech o souřadnicích

$$x_m = \frac{m}{n}l,\ m=1,2,\ldots,n-1$$

platí

$$\sin\frac{n\pi}{l}x_m = \sin m\pi = 0$$

a proto amplituda n-té stojaté vlny je v nich nulová. Tyto body nazýváme *uzly* stojaté vlny. V bodech

$$x_p = \frac{2p+1}{2n}l,\ p=0,1,2,\ldots,n-1$$

platí

$$\left|\sin \frac{n\pi}{l} x_p\right| = \left|\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}\right| = 1$$

a proto amplituda n-té stojaté vlny je v nich maximální. Nazýváme je *kmitny* stojaté vlny.

Z vyjádření řešení (3.97) také vidíme, že v okamžiku $t_0 \geq 0$ má struna tvar superpozice sinusoid, složení jednotlivých stojatých vln. Profil n-té stojaté vlny je dán rovností

$$u_n(t_0, x) = C_n(t_0) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \text{kde } C_n(t_0) = A_n \cos \omega_n t_0.$$

Ještě vypočítáme energii n-té stojaté vlny. Ta je součtem energie kinetické závislé na rychlosti a hmotnosti kmitající struny a energie potenciální závislé na napětí a deformaci struny. Přesněji, celková energie n-té stojaté vlny je dána integrálem

$$E_n = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\varrho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x) \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}(t,x) \right)^2 \right) \mathrm{d}x.$$

Přitom platí

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x) = -A_n \omega_n \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial x}(t,x) = A_n \frac{n\pi}{l} \cos \omega_n t \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

a dále

$$\int_0^l \left(\sin \frac{n\pi}{l} x \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} l =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 + \cos \frac{2n\pi}{l} x \right) \mathrm{d}x = \int_0^l \left(\cos \frac{n\pi}{l} x \right)^2 \mathrm{d}x.$$

Proto

$$E_n = \frac{1}{2} A_n^2 \left(\varrho \left(\omega_n \sin \omega_n t \right)^2 + T \left(\frac{n\pi}{l} \cos \omega_n t \right)^2 \right) \frac{l}{2} =$$

$$= \frac{l}{4} A_n^2 \left(\varrho \omega_n^2 \left(\sin \omega_n t \right)^2 + \varrho \omega_n^2 \left(\cos \omega_n t \right)^2 \right) = \frac{A_n^2}{4} \omega_n^2 l \varrho.$$

Délka struny l násobená její konstantní lineární hustotou je hmotnost struny; označíme ji μ. Celková energie n-té stojaté vlny je tedy rovna

$$E_n = \frac{A_n^2}{4} \mu \omega_n^2,$$

kde A_n je konstanta závislá na počátečním profilu struny, μ je celková hmotnost struny a ω_n je frekvence n-tého alikvotního tónu.

Úderné nástroje: V tomto případě jsou kmity strun modelovány řešením úlohy

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \tfrac{T}{\varrho} u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) &= \psi(x), & 0 < x < l, \\ u(t,0) = 0 &= u(t,l), & t > 0, \end{aligned}$$

které je dáno rovností

$$u(t,x) = \int_0^l \psi(\xi) \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\omega_n l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, \mathrm{d}\xi \right) \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Při označení

$$B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi, \quad u_n(t,x) = B_n\sin\omega_n t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

tento výsledek zapíšeme ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\omega_n t\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Opět jsou tedy kmity tvořeny superpozicí stojatých vln. Tyto stojaté vlny jsou oproti stojatým vlnám drnknuté struny fázově posunuty o $\frac{1}{2}\pi$. Mají tedy kmitny v bodech o souřadnicích x_p, $p = 0,1,2,\dots,n-1$, a uzly v bodech x_m, $m = 1,2,\dots,n-1$. Profil n-té stojaté vlny v časovém okamžiku $t_0 \geq 0$ má tvar sinusoidy

$$u_n(t_0,x) = D_n(t_0)\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \text{kde } D_n(t_0) = B_n\sin\omega_n t_0.$$

Energie n-té stojaté vlny vypočítáme stejným postupem, jako u struny drnknuté, a dostaneme

$$E_n = \frac{B_n^2}{4}\mu\omega_n^2\,;$$

konstanta B_n nyní závisí na počáteční rychlosti struny.

Smyčcové nástroje: Pohybující se smyčec přitisknutý ke struně ji vychýlí ve směru svého pohybu. Po jisté době se deformační napětí ve struně zvětší natolik, že převýší třecí sílu a struna se vrací do rovnovážného stavu. Její napětí se zmenší a struna je opět zachycena smyčcem a vychýlena ve směru jeho pohybu. Tento děj se stále opakuje. Budeme předpokládat, že se smyčec pohybuje rovnoměrně. To znamená, že působící síla f se s časem nemění a kmity struny jsou proto modelovány nehomogenní hyperbolickou rovnicí s nehomogenitou závislou pouze na poloze, nikoliv na čase, počáteční podmínky jsou přitom nulové a okrajové jsou opět homogenní Dirichletovy. Jedná se tedy o úlohu ve tvaru

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \tfrac{T}{\varrho}u_{xx} + f(x), && t>0,\ 0<x<l, && (3.98)\\ u(0,x) &= 0,\ u_t(0,x) = 0, && 0<x<l, && (3.99)\\ u(t,0) &= 0 = u(t,l), && t>0, && (3.100)\end{aligned}$$

které má řešení

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t f(\xi)\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\sigma)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi\right)\mathrm{d}\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\omega_n l}\int\limits_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\int\limits_0^t\sin\omega_n(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\omega_n l}\int\limits_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\frac{1-\cos\omega_n t}{\omega_n}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.\end{aligned}$$

Při označení

$$F_n = \frac{1}{\omega_n^2}\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi, \quad u_n(t,x) = F_n\cos\omega_n t\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \text{a} \quad U(x) = \sum_{n=1}^{\infty}F_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

dostaneme

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(1-\cos\omega_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x = U(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x). \tag{3.101}$$

Z této rovnosti vidíme, že každý bod struny o souřadnici x_0 je od základní polohy (struny v klidu) vychýlen o vzdálenost $U(x_0)$ a kolem této polohy vykonává periodický pohyb, který je superpozicí jednoduchých harmonických kmitů s amplitudami

$$\left|F_n \sin\frac{n\pi}{l}x_0\right|, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Jednotlivé jednoduché harmonické kmity opět nazýváme stojaté vlny. Kmitny a uzly jednotlivých stojatých vln jsou rozmístěny stejně, jako u struny drnknuté.

Tvar struny v čase $t_0 \geq 0$ je opět superpozicí sinusoid. Profil n-té stojaté vlny v čase t_0 je dán rovností

$$u_n(t_0,x) = G_n(t_0)\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \text{kde } G_0(t_0) = F_n\cos\omega_n t_0.$$

Stejně jako v případě drnknuté struny odvodíme, že celková energie n-té stojaté vlny je rovna

$$E_n = \frac{F_n^2}{4}\mu\omega_n^2,$$

konstanty F_n závisí na působící síle, tj. na tvaru a šířce smyčce.

Z vyjádření (3.101) řešení úlohy (3.98)–(3.100) také vidíme, že kmity struny rozeznívané smyčcem lze rozložit na součet stacionární (na čase nezávislé) části $U(x)$ a superpozice stojatých vln. Stacionární část nazýváme *statické prohnutí* struny. Vyjádříme je ještě jiným způsobem.

Označíme $w = w(t,x)$ nestacionární část řešení a dosadíme rovnost $u(t,x) = U(x) + w(t,x)$ do rovnice (3.98). Dostaneme

$$w_{tt}(t,x) = \frac{T}{\varrho}\big(U''(x) + w_{xx}(t,x)\big) + f(x). \tag{3.102}$$

Poněvadž

$$w(t,x) = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = -\sum_{n=1}^{\infty} F_n\cos\omega_n t\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

platí

$$w_{tt}(t,x) = \omega_n^2 w(t,x) = \left(\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\varrho}}\right)^2 w(t,x), \quad \text{a} \quad w_{xx}(t,x) = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 w(t,x)$$

a tedy

$$w_{tt}(t,x) = \frac{T}{\varrho}w_{xx}(t,x).$$

Dosazením této relace do rovnosti (3.102) dostaneme obyčejnou lineární nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu

$$U'' = -\frac{\varrho}{T}f(x) \tag{3.103}$$

pro neznámou funkci U. Dále platí $w(t,0) = 0 = w(t,l)$, takže dosazením do okrajových podmínek (3.100) dostaneme okrajové podmínky pro rovnici (3.103)

$$U(0) = 0 = U(l). \tag{3.104}$$

Rovnici (3.103) dvakrát zintegrujeme a využijeme při tom podmínku v levém krajním bodě. Po úpravě (přehození pořadí integrace) dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} U(x) = U'(0)x - \frac{\varrho}{T}\int_0^x\left(\int_0^\eta f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta = U'(0)x - \frac{\varrho}{T}\int_0^x\left(\int_\xi^x f(\xi)\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi = \\ = U'(0)x - \frac{\varrho}{T}\int_0^x (x-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.105}$$

V této rovnosti nejprve dosadíme za proměnnou x hodnotu l a využijeme podmínku v pravém krajním bodě. Tímto způsobem dostaneme

$$U'(0) = \frac{\varrho}{Tl} \int\limits_0^l (l-\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Tento výraz dosadíme do rovnosti (3.105) a dostaneme řešení okrajové úlohy (3.103), (3.104) ve tvaru

$$U(x) = \frac{\varrho}{Tl} \left(x \int\limits_0^l (l-\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi - l \int\limits_0^x (x-\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi \right).$$

Kapitola 4

Parabolické rovnice

Jednorozměrná rovnice difúze / vedení tepla

Uvažujme tenký dlouhý válec, v němž proudí kapalina. Poloměr válce je vzhledem k jeho výšce (délce) tak malý, že válec s kapalinou můžeme považovat za jednorozměrný objekt a jeho jediný rozměr (délku) za nekonečný. Osu válce ztotožníme se souřadnou osou x. Představme si, že v proudící kapalině je nějaká látka, která je jednak unášena proudem, jednak v kapalině difunduje. Navíc může probíhat i nějaká chemická reakce – látka se může v kapalině rozkládat nebo tvořit.

Množství látky vyjádříme její hustotou (koncentrací); za hustotu budeme považovat hmotnost látky vztaženou k délce úseku válce, na kterém se nachází. Přesněji: označíme-li symbolem $u(t,x)$ hustotu látky v čase t a v bodě x a symbolem $m(t,\alpha,\beta)$ množství látky v úseku válce mezi souřadnicemi α a β, pak budou tyto veličiny vázány vztahy

$$m(t,\alpha,\beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} u(t,x)\mathrm{d}x, \quad u(t,x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(t,x,x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Probíhající chemické reakce budeme charakterizovat nějakou veličinou f, kterou můžeme nazvat intenzita reakce a charakterizovat jako množství látky, které se příslušnou reakcí vytvoří (nebo rozloží) za jednotku času v části válce o jednotkové délce. Pokud látka vzniká, je intenzita kladná, $f > 0$, pokud se rozkládá, je $f < 0$. Intenzita reakce ovšem může záviset na množství (tj. koncentraci) látky a být v každém bodě a v každém čase jiná, tedy $f = f(t,x,u)$. Pak množství látky, které vznikne (nebo se rozloží) za časový interval $[t, t+\Delta t]$ v úseku válce mezi souřadnicemi α a β je dáno výrazem

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(s,x,u(s,x)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}s; \tag{4.1}$$

znaménko tohoto výrazu určuje, zda se jedná o tvorbu nebo rozklad látky.

Difúzi vyjádříme veličinou $g = g(t,x)$, kterou nazveme *difúzní tok*. Můžeme si ho představit jako rychlost difundující částice. Přesněji ho definujeme tak, že množství látky (tj. hmotnost), které se dostane difúzí přes bod o souřadnici x za časový interval $[t, t+\Delta t]$, je rovno

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} g(s,x)\mathrm{d}s;$$

je-li tato veličina kladná, jedná se o pohyb zleva doprava, je-li záporná, pak o pohyb zprava doleva. Do úseku válce, jehož levý krajní bod má souřadnici α a pravý krajní bod souřadnici β, se tedy za časový interval $[t, t+\Delta t]$ difúzí dostane přes levý okraj množství látky o hmotnosti

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} g(s,\alpha)\mathrm{d}s$$

a přes pravý okraj se z něho dostane množství látky o hmotnosti

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} g(s,\beta)\mathrm{d}s.$$

Tato interpretace předpokládá, že $g(t,\alpha) > 0$, $g(t,\beta) > 0$; kdyby tyto nerovnosti nebyly splněny, odpovídajícím způsobem bychom vyměnili slova „do úseku“ za „z úseku“ a naopak. Celková změna hmotnosti látky v úseku válce od α do β způsobená difúzí za časový interval $[t, t+\Delta t]$ tedy je

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} g(s,\alpha)\mathrm{d}s - \int\limits_{t}^{t+\Delta t} g(s,\beta)\mathrm{d}s = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \big(g(s,\alpha) - g(s,\beta)\big)\mathrm{d}s. \tag{4.2}$$

Celkovou změnu hmotnosti drogy v úseku žíly od bodu α do bodu β způsobenou reakcí a difúzí během časového intervalu $[t, t+\Delta t]$ můžeme nyní vyjádřit jako součet výrazů (4.1) a (4.2). S využitím Newtonovy-Leibnizovy formule a první věty o střední hodnotě integrálního počtu ji upravíme na tvar

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(s,x,u(s,x)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \big(g(s,\alpha) - g(s,\beta)\big)\mathrm{d}s = \\
&\qquad = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(s,x,u(s,x)\big)\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}g(s,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \\
&\qquad = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(f\big(s,x,u(s,x)\big) - \frac{\partial}{\partial x}g(s,x)\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \\
&\qquad = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\left(f\big(t+\vartheta_1\Delta t, x, u(t+\vartheta_1\Delta t, x)\big) - \frac{\partial}{\partial x}g(t+\vartheta_1\Delta t, x)\right)\Delta t\right]\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

kde $\vartheta_1 \in (0,1)$ je číslo, jehož existence je zaručena první větou o střední hodnotě integrálního počtu.

Nyní se budeme zabývat změnou hmotnosti látky ve válci vlivem jejího proudění; tento proces nazýváme *advekce*. Předpokládejme na okamžik, že délková hustota u unášené látky a rychlost v proudění kapaliny jsou konstantní. V takovém případě je vzdálenost, kterou urazí částice látky od nějakého bodu za časový interval délky Δt, rovna $v\Delta t$ a celková hmotnost látky, která za tento čas proteče přes uvažovaný bod, je rovna $uv\Delta t$. V realističtějším případě, kdy hustota u i rychlost proudění v závisí na čase a na místě, je celkové množství látky, které proteče přes bod x, dáno stejným součinem, ovšem funkce u a v vyčíslíme v nějaké „mezihodnotě“ dvojrozměrného intervalu $[t, t+\Delta t] \times [x, x+\Delta x]$, kde $\Delta x = v\Delta t$. Toto množství (hmotnost) je tedy dáno výrazem

$$u(t+h_1\Delta t, x+h_2\Delta x)v(t+h_1\Delta t, x+h_2\Delta x)\Delta t,$$

kde $h_1, h_2 \in [0,1]$. Avšak podle věty o střední hodnotě platí

$$u(t+h_1\Delta t, x+h_2\Delta x)v(t+h_1\Delta t, x+h_2\Delta x) = u(t,x)v(t,x) + h_3\Delta t,$$

kde h_3 je nějaká konstanta[1]. Celková hmotnost látky, která proteče přes levý krajní bod α uvažovaného úseku válce během časového intervalu $[t, t+\Delta t]$ je tedy dána výrazem

$$u(t,\alpha)v(t,\alpha)\Delta t + \vartheta_2(\Delta t)^2, \tag{4.4}$$

kde ϑ_2 je nějaká konstanta. Analogicky, hmotnost látky, která proteče během uvažovaného časového intervalu přes pravý krajní bod β, je dána výrazem

$$u(t,\beta)v(t,\beta)\Delta t + \vartheta_3(\Delta t)^2. \tag{4.5}$$

Pokud je rychlost v proudění kladná, tj. kapalina proudí zleva doprava, přiteče do úseku s krajními body α, β přes levý krajní bod celková hmotnost látky (4.4) a odteče z něho přes pravý krajní bod látka o hmotnosti (4.5); pokud by rychlost byla záporná, tj. kapalina by proudila zprava doleva, zaměníme slova „přiteče“ za „odteče“ a naopak. Změna hmotnosti látky za časový interval $[t, t+\Delta t]$ v úseku válce od bodu o souřadnici α po bod o souřadnici β způsobená advekcí je rovna rozdílu

$$\begin{aligned}u(t,\alpha)v(t,\alpha)\Delta t + \vartheta_2(\Delta t)^2 - \big(u(t,\beta)v(t,\beta)\Delta t + \vartheta_3(\Delta t)^2\big) &= \\ = \big(u(t,\alpha)v(t,\alpha) - u(t,\beta)v(t,\beta)\big)\Delta t + \vartheta_4(\Delta t)^2&,\end{aligned}$$

kde $\vartheta_4 = \vartheta_2 - \vartheta_3$. Tento rozdíl můžeme pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule vyjádřit ve tvaru

$$\left(-\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x} u(t,x)v(t,x)\mathrm{d}x\right)\Delta t + \vartheta_4(\Delta t)^2. \tag{4.6}$$

Celková změna hmotnosti drogy v uvažovaném úseku žíly za čas od t do $t+\Delta t$ je součtem výrazů (4.3) a (4.6),

$$\begin{aligned}\delta(t,\alpha,\beta,\Delta t) &= \\ &= \int_\alpha^\beta \left[\left(f\big(t+\vartheta_1\Delta t, x, u(t+\vartheta_1\Delta t, x)\big) - \frac{\partial}{\partial x}\big(g(t+\vartheta_1\Delta t, x) - u(t,x)v(t,x)\big)\right)\Delta t\right]\mathrm{d}x + \\ &\qquad + \vartheta_4(\Delta t)^2.\end{aligned}$$

Ze zákona zachování hmoty nyní můžeme vyjádřit celkovou hmotnost látky v úseku válce od α po β za časový interval délky Δt

$$\int_\alpha^\beta u(t+\Delta t, x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta u(t,x)\mathrm{d}x + \delta(t,\alpha,\beta,\Delta t).$$

Po dosazení a zřejmé úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \Bigg(\frac{u(t+\Delta t, x) - u(t,x)}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(g(t+\vartheta_1\Delta t, x) + u(t,x)v(t,x)\big) - \\ - f\big(t+\vartheta_1\Delta t, x, u(t+\vartheta_1\Delta t, x)\big)\Bigg)\mathrm{d}x = \vartheta_4\Delta t\end{aligned}$$

[1]Tuto konstantu lze podrobněji vyjádřit výrazem $h_3 = \frac{\partial}{\partial t}uv + v\frac{\partial}{\partial x}uv$, kde hodnoty funkcí u, v jsou vyčísleny v nějakém bodu dvojrozměrného intervalu $[t, t+\Delta t] \times [x, x+\Delta x]$.

a limitním přechodem $\Delta t \to 0$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} g(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) v(t,x) - f\big(t, x, u(t,x)\big) \right) \mathrm{d}x = 0.$$

Úsek válce od souřadnice α do souřadnice β byl vybrán libovolně, stejně tak i časový okamžik t. To znamená, že pro všechna x a všechna t musí platit

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x} g(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} v(t,x) u(t,x) + f\big(t, x, u(t,x)\big). \tag{4.7}$$

Tato relace váže neznámou funkci u (hustotu) a neznámou funkci g (difúzní tok), intenzita f probíhající chemické reakce je dána charakterem reakce. Potřebujeme tedy ještě nějak funkci g určit. Předpokládejme tedy, že difúzí se částice přesunuje z místa s větší koncentrací na místo s koncentrací menší (to je předpoklad celkem přirozený) a že rychlost difundující částice je přímo úměrná rozdílu koncentrací (přesněji gradientu, tj. derivaci koncentrace). Tento předpoklad bývá nazýván *Fickův zákon*. Tedy

$$g(t,x) = -D \frac{\partial}{\partial x} u(t,x).$$

Kladný koeficient úměrnosti D se nazývá *difuzivita*; může se měnit s časem i s místem, tedy $D = D(t,x)$. Dosazením do rovnosti (4.7) dostaneme *rovnici reakce-advekce-difúze*

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(t,x) \frac{\partial}{\partial x} u \right) - \frac{\partial}{\partial x} v(t,x) u + f(t,x,u). \tag{4.8}$$

Tato rovnice má být splněna pro každý čas $t > 0$ a každý bod $x \in \mathbb{R}$. K rovnici přidáme *počáteční podmínku* vyjadřující koncentraci difundující látky v počátečním čase $t = 0$

$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{4.9}$$

která má platit pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Speciální případy a okrajové podmínky

Budeme nyní předpokládat, že uvažovaná látka v kapalině nereaguje, tj. $f \equiv 0$, kapalina je homogenní, v čase se nemění, tj. $D(t,x) \equiv a^2 = const$, a proudí konstantní rychlostí $v(t,x) \equiv const$. Obecnou rovnici reakce-advekce-difúze (4.8) tak můžeme zjednodušit na *rovnici advekce-difúze* s konstantními koeficienty

$$\frac{\partial}{\partial t} u = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - v \frac{\partial}{\partial x} u. \tag{4.10}$$

V tomto případě můžeme prostorovou souřadnici transformovat – zavést novou souřadnou soustavu, která je „unášena rychlostí v“. Zavedeme tedy novou prostorovou souřadnici ξ vztahem

$$\xi = x - vt.$$

Pak podle řetězového pravidla pro výpočet parciálních derivací složených funkcí platí

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial t} u\big(t, \xi(t,x)\big) = \frac{\partial}{\partial t} u\big(t, \xi(t,x)\big) \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} u\big(t, \xi(t,x)\big) \frac{\partial \xi(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} u(t,\xi) - v \frac{\partial}{\partial \xi} u(t,\xi)$$

a analogicky a stručněji (bez psaní nezávisle proměnných)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u.$$

Dosazením do rovnice (4.8) dostaneme *rovnici difúze*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \tag{4.11}$$

Tato rovnice vlastně modeluje difúzi látky v neproudící kapalině, případně difúzi plynu v nějakém dlouhém válci naplněném vzduchem nebo jiným plynem.

Také si můžeme uvědomit, že vedení tepla v tělese je proces analogický difúzi – teplo také přechází z místa teplejšího na chladnější a přechod tepla můžeme považovat za úměrný teplotnímu spádu (tj. gradientu nebo derivaci teploty) a orientovaný opačně. Jinak řečeno, Fickův zákon popisuje i vedení tepla. Proto se rovnice (4.11) nazývá také *rovnice vedení tepla.* V takovém případě interpretujeme hledanou funkci $u = u(t, x)$ jako teplotu malého okolí bodu x (malého kousku tyče, v níž je teplo vedeno) v čase t. Poněkud přesněji vyjádřeno: v časovém okamžiku t je celková tepelná energie úseku tyče od bodu se souřadnicí α po bod se souřadnicí β dána výrazem

$$\frac{k}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta u(t, x) \mathrm{d}x,$$

kde $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \mathrm{JK}^{-1}$ je Boltzmanova konstanta.

Zatím jsme neuvažovali o délce trubice, v níž probíhá difúze. Jedna z možností je uvažovat ji tak dlouhou, že „na její konec nedohlédneme“, matematicky řečeno, pravý konec oboru, na němž difúze probíhá je v nekonečnu. Ale i v tak dlouhé trubici budeme uvažovat jen konečné množství látky. Tuto podmínku vyjádříme tak, že

$$\int_{x_0}^{\infty} u(t, x) \mathrm{d}x < \infty; \tag{4.12}$$

přitom x_0 je nějaké číslo. Tato podmínka říká, že uvedený nevlastní integrál konverguje, neboť hustota u je nezáporná. Odtud dále plyne, že

$$\lim_{x \to \infty} u(t, x) = 0$$

pro každý čas t, neboť funkci u považujeme za spojitou. Podmínka (4.12) se nazývá *podmínka integrability* nebo *integrovatelnosti.*

Pravý konec válce (trubice, žíly) však může být v nějaké konečné vzdálenosti, mít konečnou souřadnici x_0. Tento pravý konec může být pro difundující látku uzavřený, žádná přes něj neprostupuje, tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = 0 \tag{4.13}$$

pro každý čas t. Jiná možnost je, že na tomto konci je nějak dán tok (probíhá na něm nějaký proces, který tok určuje). Ten se může v čase měnit. Dostáváme tak podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = \nu(t). \tag{4.14}$$

Podmínky tvaru (4.13) nebo (4.14) se nazývají *Neumannovy okrajové podmínky.*

Jiná možnost je, že na pravém otevřeném konci válce se látka rozptyluje do volného prostoru. V takovém případě je napravo od krajního bodu x_0 koncentrace (prakticky) nulová a tok, tj. derivace hustoty podle prostorové proměnné, je podle Fickova zákona úměrný koncentraci nalevo od bodu x_0 (uvnitř válce). Tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = -hu(t, x_0) \tag{4.15}$$

pro každé t; přitom h je kladný koeficient úměrnosti (převrácená hodnota „difusivity přes hranici“). V okolním prostoru ale nemusí být jen nulová koncentrace látky. Napravo od krajního bodu

x_0 může koncentrace mít v každém okamžiku t nějakou hodnotu $\mu(t)$ nezávislou na koncentraci v trubici, např. v důsledku nějakého vnějšího probíhajícího procesu. V takovém případě je difúzní tok přes hranici úměrný rozdílu koncentrací nalevo a napravo od hranice, tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = -h\big(u(t, x_0) - \mu(t)\big). \tag{4.16}$$

Podmínky tvaru (4.15) nebo (4.16) se nazývají *Robinovy okrajové podmínky.*

Pokud rovnici (4.11) interpretujeme jako model vedení tepla v dlouhé tenké tyči (drátu) po stranách tepelně izolované, můžeme na jejím konci udržovat nulovou teplotu (konec tyče přiložíme k ledu). V takovém případě dostaneme podmínku

$$u(t, x_0) = 0 \tag{4.17}$$

pro každý čas t. Nebo teplota na konci tyče může být určována nějakým vnějším nezávislým procesem; pak dostaneme podmínky tvaru

$$u(t, x_0) = \mu(t). \tag{4.18}$$

Podmínky (4.17) a (4.18) se nazývají *Dirichletovy okrajové podmínky.*

Podmínky (4.13), (4.15) a (4.17) můžeme zapsat jednotným způsobem

$$\alpha u(t, x_0) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = 0; \tag{4.19}$$

pro $\alpha = 0$, $\beta = 1$ se jedná o podmínky Neumannovy, pro $\alpha = h$, $\beta = 1$ o podmínky Robinovy a pro $\alpha = 1$, $\beta = 0$ o podmínky Dirichletovy. Podobně i podmínky (4.14), (4.16) a (4.18) můžeme souhrnně zapsat ve tvaru

$$\alpha u(t, x_0) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = \varrho(t). \tag{4.20}$$

Podmínky (4.19) a (4.20) nazýváme *Robinovy okrajové podmínky.* (Ve starší evropské nebo ruské literatuře tyto byly podmínky nazývány *Newtonovy okrajové podmínky.*)

Analogicky můžeme zformulovat okrajové podmínky pro levý okraj oboru, na němž modelujeme difúzi nebo vedení tepla. Jediný rozdíl je v Robinových podmínkách, kde se změní znaménko u koeficientu h.

Obor prostorové proměnné x ale nemusí žádné okraje mít, může jít o nějaký uzavřený prstenec. V takovém případě po proběhnutí celého prstence (uzavřené křivky) se dostaneme do stejného bodu, koncentrace látky v něm musí být stejná. Trochu přesněji: označíme-li délku křivky ℓ, pak v každém časovém okamžiku t musí platit

$$u(t, x) = u(t, x + \ell) \tag{4.21}$$

pro libovolnou hodnotu x. Podmínku (4.21) nazýváme *podmínka periodičnosti* nebo *periodická okrajová podmínka.*

Ještě si všimněme jedné skutečnosti. Pokud nějaké funkce u_1, u_2 splňují některou z podmínek (4.12), (4.21) nebo (4.19), pak také libovolná lineární kombinace těchto funkcí splňuje stejnou podmínku. Podmínky (4.12), (4.21), (4.19) splňují princip superpozice a proto je souhrnně nazýváme *homogenní okrajové podmínky.*

Nejjednodušší řešení

Uvažujme jednoduchou situaci: v jednom bodě (který můžeme považovat za počátek souřadnic) do kapaliny v počátečním okamžiku „umístíme“ nějaké množství A látky, která se bude v neproudící kapalině šířit difúzí. Vývoj koncentrace difundující látky bude popsán rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.22}$$

V průběhu procesu žádnou látku z kapaliny neodebíráme, ani ji do ní neřidáváme, její množství je stále stejné jako na začátku. Musí tedy platit

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\mathrm{d}x = A \quad \text{pro všechna } t>0. \tag{4.23}$$

Tato rovnost však musí platit i na počátku, v čase $t=0$, tj.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} u(0,x)\mathrm{d}x.$$

Přitom ale předpokládáme, že na počátku je hustota v šude s výjimkou bodu $x=0$ nulová, neboť veškerá látka je koncentrována v jediném bodě. Hustotu na počátku tedy při této idealizaci nemůžeme považovat za „normální“ reálnou funkci a poslední integrál za „normální“ integrál (Riemannův nebo nějaký obecnější). Počáteční rozložení látky, její „distribuci“ (v hovorovém významu tohoto slova), budeme považovat za distribuci ve smyslu Dodatku A. Počáteční podmínku pro rovnici (4.22) tedy napíšeme ve tvaru

$$u(0,x) = A\delta(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{4.24}$$

kde δ je Diracova distribuce.

Pokusíme se „uhodnout“ řešení rovnice (4.22) s počáteční podmínkou (4.24). Můžeme si představovat, že difúze probíhá tak, že jednotlivé molekuly látky se náhodně pohybují a že pravděpodobnost pohybu nalevo je stejná jako pravděpodobnost pohybu napravo. Koncentrace látky po jistém čase by tedy mohla mít tvar normálního (Gaussova) rozložení pravděpodobnosti se střední hodnotou 0. Rozptyl se však s časem mění – na počátku je nulový a s postupem času se zvětšuje. Pro rozptyl $\sigma^2=\sigma(t)^2$ tedy platí

$$\sigma(0)=0. \tag{4.25}$$

Řešení rovnice (4.22) s počáteční podmínkou (4.24) tedy budeme hledat ve tvaru

$$u(t,x) = A\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}.$$

Z vlastností rozložení pravděpodobností je vidět, že při této volbě v každém čase t platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\mathrm{d}x = A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\mathrm{d}x = A,$$

takže podmínka (4.23) je splněna. Má být splněna také rovnice (4.22). Proto vyjádříme

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{\sigma(t)^2}\sigma'(t)+\frac{1}{\sigma(t)}\left(-\frac{x^2}{2}\left(-2\sigma(t)^{-3}\right)\sigma'(t)\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\sigma'(t)\left(\frac{x^2}{\sigma(t)^4}-\frac{1}{\sigma(t)^2}\right) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\left(x^2-\sigma(t)^2\right)\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)^4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma(t)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\left(-\frac{2x}{2\sigma(t)^2}\right)\right) = -\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma(t)^3}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\right) = \\ &= -\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma(t)^3}\left(1+x\left(-\frac{2x}{2\sigma(t)^2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\frac{1}{\sigma(t)^5}\left(x^2-\sigma(t)^2\right).\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (4.22) a jednoduché úpravě dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci σ

$$\sigma'(t) = \frac{a^2}{\sigma(t)}.$$

Řešení této rovnice se separovanými proměnnými, které splňuje počáteční podmínku (4.25) je $\sigma(t) = \sqrt{2a^2t}$. Dostáváme tedy řešení počáteční úlohy (4.22), (4.24) ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{A}{2\sqrt{a^2\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \tag{4.26}$$

4.1 Rovnice ve dvou proměnných, evoluční rovnice v jedné prostorové proměnné

Budeme se zabývat *lineární parabolickou rovnicí ve dvou nezávisle proměnných s konstantními koeficienty,* která je tvaru

$$A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2AC\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x,y), \tag{4.27}$$

kde A, C, D, E, F jsou reálné konstanty takové, že $|A|+|C| > 0$. Pokud je funkce f na pravé straně rovnice nulová, mluvíme o *homogenní* rovnici, v opačném případě o nehomogenní. Rovnice (4.27) je parabolická v celé rovině $\mathbb{R}^2$.

Rovnici (4.27) můžeme podle 2.1.1 transformací

$$\xi = x, \quad \eta = Cx - Ay$$

převést na tvar

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = \tilde{f}(\xi,\eta)$$

a dále podle 2.1.2 substitucí

$$v(\xi,\eta) = \exp\left(\frac{b}{2a}\xi + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\eta\right)u(\xi,\eta)$$

transformovat na kanonický tvar

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(\xi,\eta), \tag{4.28}$$

kde $g(\xi,\eta) = \tilde{f}(\xi,\eta)\exp\left(\frac{b}{2a}\xi + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\eta\right)$.

Evoluční rovnice (rovnice difúze, rovnice vedení tepla)

Evoluční parciální diferenciální rovnice je taková, v níž jednu z nezávisle proměnných interpretujeme jako čas.

Budeme se nyní zabývat rovnicemi, v nichž je derivace hledané funkce podle času prvního řádu. Uvažujme tedy lineární homogenní parabolickou evoluční parciální diferenciální rovnici s konstantním koeficientem v kanonickém tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.29}$$

Připomeňme, že tato rovnice splňuje princip superpozice, tj. funkce $u \equiv 0$ je jejím řešením a lineární kombinace jejich řešení je řešením, neboli že množina řešení rovnice (4.29) tvoří vektorový prostor.

Znaménko koeficientu α souvisí se „směrem plynutí času“. Vyjádříme to poněkud přesněji: Uvažujme čas τ, který „plyne opačným směrem“, tj. $\tau = -t$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -1 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}.$$

Pro řešení $u = u(t,x)$ rovnice (4.29) platí

$$\frac{\partial}{\partial\tau}u = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

To znamená, že změna znaménka konstanty α představuje nahrazení času plynoucího z přítomnosti do budoucnosti časem plynoucím z přítomnosti do minulosti.

Dále se budeme věnovat pouze rovnicím s kladným koeficientem α. Můžeme ho proto psát ve tvaru druhé mocniny. Jinak řečeno, budeme se věnovat *rovnici difúze* neboli *rovnici vedení tepla,*

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{4.30}$$

To je stejná rovnice jako (4.11).

Nechť $H = (0,\infty) \times J$, kde J je nějaký otevřený interval reálných čísel.

Klasické nebo silné řešení rovnice (4.29) je funkce $u : H \to \mathbb{R}$, která je spojitě diferencovatelná v první proměnné, dvakrát spojitě diferencovatelná ve druhé proměnné a splňuje rovnici (4.29).

Toto pojetí řešení nyní mírně rozšíříme: Za řešení homogenní evoluční parabolické rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x}, \quad t > 0,\ x \in J, \tag{4.31}$$

budeme považovat funkci $u = u(t,x)$ definovanou na množině H, která splňuje rovnici pro skoro všechna $(t,x) \in H$. Podrobněji řečeno, první derivace funkce u podle času a druhá derivace funkce u podle proměnné x jsou integrovatelné na každé kompaktní podmnožině množiny H (zejména tedy množina bodů, v nichž některá z derivací neexistuje, má míru nula) a pro každou dvojici intervalů $(t_1,t_2) \subseteq (0,\infty)$, $(\alpha,\beta) \subseteq J$ platí

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

Řešení nehomogenní evoluční parabolické rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x} + f(t,x), \tag{4.32}$$

zavádíme analogicky.

Řešení evoluční parabolické rovnice s *počáteční podmínkou*

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in J, \tag{4.33}$$

je takové řešení $u = u(t,x)$, že

$$\lim_{t\to 0+} u(t,x) = \varphi(x)$$

pro skoro všechna $x \in J$.

Pro parobolické rovnice nelze napsat generické řešení tak snadno, jako pro rovnice hyperbolické. Proto se budeme hned věnovat řešení úloh.

4.1.1 Homogenní úlohy pro homogenní rovnici na přímce

Budeme řešit homogenní parabolickou rovnici (4.32) pro $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$ s počáteční podmínkou (4.33).

Periodické okrajové podmínky

Nejprve budeme požadovat splnění periodických okrajových podmínek. Budeme tedy řešit úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{4.34}$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.35}$$
$$u(t,x) = u(t,x+l), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.36}$$

O počáteční funkci φ budeme předpokládat, že je periodická s periodou $l > 0$. Řešení úlohy má být také periodické se stejnou periodou. Proto můžeme obor prostorové proměnné x můžeme chápat jako kružnici délky l, tj. kružnici o poloměru $l/(2\pi)$. Takto formulovanou úlohu lze interpretovat jako model difúze v trubici délky l stočené do prstence.

Víme, že každou po částech spojitou funkci φ s periodou l můžeme vyjádřit jako trigonometrickou Fourierovu řadu

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{l} x \right),$$

kde

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \cos \frac{2k\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi, \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{2k\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Řešení úlohy budeme proto hledat ve tvaru Fourierovy řady v prostorové proměnné x, jejíž koeficienty závisí na časové proměnné t. Tento postup se nazývá *metoda Fourierových řad.*

Nechť tedy pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $t > 0$ platí

$$\varphi(x) = \frac{\Phi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Phi_k \cos \frac{2k\pi}{l} x + \Psi_k \sin \frac{2k\pi}{l} x \right),,$$

kde

$$\Phi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cos \frac{2k\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi, \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad \Psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cos \frac{2k\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{4.37}$$

Řešení úlohy (4.34)–(4.36) má být periodické v prostorové proměnné x, hledáme ho tedy ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(t) \cos \frac{2k\pi}{l} x + b_k(t) \sin \frac{2k\pi}{l} x \right), \tag{4.38}$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ jsou zatím neurčené funkce jedné proměnné. Platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{a_0'(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k'(t) \cos \frac{2k\pi}{l} x + b_k'(t) \sin \frac{2k\pi}{l} x \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k\pi}{l} \right)^2 \left(a_k(t) \cos \frac{2k\pi}{l} x + b_k(t) \sin \frac{2k\pi}{l} x \right);$$

symbol $'$ přitom označuje obyčejnou derivaci podle proměnné t.

Uvedené řady formálně dosadíme do rovnice (4.34) a počáteční podmínky (4.35),

$$\frac{a_0'(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(a_k'(t) + \left(\frac{2k\pi a}{l} \right)^2 a_k(t) \right) \cos \frac{2k\pi}{l} x + \left(b_k'(t) + \left(\frac{2k\pi a}{l} \right)^2 b_k(t) \right) \sin \frac{2k\pi}{l} x \right] = 0,$$

$$\frac{a_0(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(0) \cos \frac{2k\pi}{l} x + b_k(0) \sin \frac{2k\pi}{l} x \right) = \frac{\Phi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Phi_k \cos \frac{2k\pi}{l} x + \Psi_k \sin \frac{2k\pi}{l} x \right).$$

Věta o jednoznačnosti Fourierových řad říká, že rovnají-li se součty dvou Fourierových řad, pak se rovnají také jejich koeficienty. Odtud plyne, že pro funkce $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ musí platit

$$a_0'(t) = 0, \quad a_0(0) = \Phi_0,$$

$$a_k'(t) = -\left(\frac{2k\pi a}{l} \right)^2 a_k(t), \quad a_k(0) = \Phi_k, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

$$b_k'(t) = -\left(\frac{2k\pi a}{l} \right)^2 b_k(t), \quad b_k(0) = \Psi_k, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

To jsou počáteční úlohy pro obyčejné lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Jejich řešení je

$$a_k(t) = \Phi_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{l}\right)^2 t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \qquad b_k(t) = \Psi_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{l}\right)^2 t}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Tyto funkce dosadíme do tvaru (4.38) řešení dané úlohy. Po úpravě dostaneme

$$u(t, x) = \frac{\Phi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{l}\right)^2 t} \left(\Phi_k \cos \frac{2k\pi}{l} x + \Psi_k \sin \frac{2k\pi}{l} x \right).$$

Výsledek vyjádříme jen pomocí objektů, které jsou v zadání úlohy, tj. konstanty a a funkce φ. Jinak řečeno, do pravé strany předchozí rovnosti dosadíme vyjádření (4.37) koeficientů Φ_k a Ψ_k. Po úpravě (záměně pořadí integrace a sumace) dostaneme

$$u(t, x) = \int_0^l \varphi(\xi) \frac{1}{l} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{l}\right)^2 t} \left(\cos \frac{2k\pi}{l} \xi \cos \frac{2k\pi}{l} x + \sin \frac{2k\pi}{l} \xi \sin \frac{2k\pi}{l} x \right) \right) \mathrm{d}\xi.$$

Tento výsledek ještě upravíme pomocí součtového vzorce na tvar

$$u(t, x) = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{2k\pi}{l} (x - \xi) \right) \mathrm{d}\xi.$$

Dosažený výsledek lze zapsat v přehlednějším tvaru: Řešení úlohy (4.34)–(4.36) je dáno integrálem

$$u(t, x) = \int_0^l \varphi(\xi) G(t, x, \xi) \mathrm{d}\xi, \tag{4.39}$$

kde funkce $G : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daná výrazem

$$G(t, x, \xi) = \frac{1}{l} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{2k\pi}{l} (x - \xi) \right)$$

je tzv. *funkce vlivu okamžitého bodového zřídla* nebo *zdroje*[2], stručně *zřídlová* nebo *zdrojová funkce*, také *Greenova funkce* nebo *fundamentální řešení*.

Ještě si povšimněme několika vlastností funkce G, které jsou bezprostředně evidentní, nebo je lze ověřit přímým výpočtem.

- Funkce G je spojitá na množině $(0, \infty) \times \mathbb{R}^2$.

[2] Pokud rovnici (4.34) interpretujeme jako model vedení tepla v nějakém prstenci, pak funkce $G(\,\cdot\,, \xi, t)$ udává rozložení teploty v časovém okamžiku t, vzniká-li v tomto okamžiku v bodě ξ jisté množství tepla.

- Je symetrická ve druhé a třetí proměnné, tj. $G(t,x,\xi) = G(t,\xi,x)$ pro všechny trojice $(x,\xi,t) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2$.
- Funkce jedné proměnné $G(t,\cdot,\xi)$ má spojité derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů $(t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.
- Funkce dvou proměnných $G(\cdot,\cdot,\xi)$, je pro všechna $\xi \in \mathbb{R}$ řešením rovnice (4.34), které splňuje podmínku periodičnosti (4.36) pro každou hodnotu $t > 0$.
- Pro všechny hodnoty $x, \xi \in \mathbb{R}$ platí

  $$\lim_{t\to 0+} G(t,x,\xi) = \delta(x-\xi) \text{ ve smyslu distribucí;}$$

  δ je Diracova distribuce, sr. Dodatek A, poslední z příkladů δ-vytvořujících posloupností, str. 154. Dále

  $$\lim_{t\to\infty} G(t,x,\xi) = \frac{1}{l}.$$

Z poslední uvedené vlastnosti funkce G plyne, že pro řešení $u = u(t,x)$ homogenní parabolické rovnice (4.34) s počáteční podmínkou (4.35), které splňuje podmínku periodičnosti (4.36), platí

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Řešení konverguje pro $t \to \infty$ ke konstantní funkci. Pokud tedy úlohu (4.31), (4.33), (4.21) interpretujeme jako model difúze nějaké látky v uzavřeném prstenci délky l, dostáváme, že po dostatečně dlouhém čase se difundující látka stejnoměrně rozptýlí po prstenci a její lineární hustota bude podílem její celkové hmotnosti a délky prstence. To není nikterak překvapivý výsledek; ukazuje však, že se model chová realisticky.

Podmínky integrovatelnosti

Nyní budeme požadovat, aby řešení rovnice (4.32) bylo v jistém smyslu „silně ohraničené“ na celém oboru prostorové proměnné x, konkrétněji, aby bylo integrovatelné v absolutní hodnotě. Budeme tedy řešit úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{4.40}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.41}$$

$$\int_{-\infty}^0 \big|u(t,x)\big|\mathrm{d}x < \infty,\ \int_0^\infty \big|u(t,x)\big|\mathrm{d}x < \infty, \quad t > 0. \tag{4.42}$$

O počáteční funkci φ budeme předpokládat, že splňuje stejnou podmínku integrovatelnosti.

$$\int_{-\infty}^0 |\varphi(x)|\mathrm{d}x < \infty, \qquad \int_0^\infty |\varphi(x)|\mathrm{d}x < \infty, \tag{4.43}$$

Jinak řečeno, funkce φ je a funkce $u(t,\cdot)$ má být v definičním oboru Fourierovy transformace pro každou hodnotu $t > 0$; .

Podle tohoto předpokladu můžeme úlohu (4.40)–(4.42) transformovat na Fourierův obraz a pak hledat obraz (spektrum) jejího řešení. Tento způsob hledání řešení bývá nazýván *metoda Fourierovy transformace.*

Při transformaci úlohy čas t zafixujeme, budeme ho považovat za parametr. Fourierův obraz funkce $u(t,\cdot)$ je komplexní funkce jedné reálné proměnné definovaná předpisem

$$\mathcal{F}\big(u(t,\cdot)\big)(\xi) = \int_{-\infty}^\infty u(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x;$$

tuto hodnotu budeme stručně označovat symbolem $\hat{u}(t,\xi)$. Fourierův obraz derivace podle parametru t je

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,\,\cdot\,)\right)(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(t,\xi).$$

Poněvadž Fourierova transformace převádí derivaci na násobení výrazem $\mathrm{i}\xi$, je Fourierův obraz druhé derivace funkce $u(t,\,\cdot\,)$ roven

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,\,\cdot\,)\right)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^2\hat{u}(t,\xi) = -\xi^2\hat{u}(t,\xi).$$

Fourierův obraz rovnice (4.40) a počáteční podmínky (4.41) je tedy tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(t,\xi) = -a^2\xi^2\hat{u}(t,\xi), \quad \hat{u}(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi), \tag{4.44}$$

kde $\hat{\varphi}$ je Fourierův obraz počáteční funkce φ.

Nyní budeme na chvíli považovat proměnnou ξ za parametr a čas t za nezávisle proměnnou, tj. na rovnosti (4.44) se budeme dívat jako na počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici, kde hledanou funkcí je funkce $\hat{u}(\,\cdot\,,\xi)$. Jedná se o úlohu pro lineární homogenní rovnici s konstantním koeficientem, její řešení je dáno formulí

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}.$$

To je současně Fourierův obraz řešení počáteční úlohy (4.40)–(4.42). Označme ještě

$$\hat{g}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t} \tag{4.45}$$

a Fourierův obraz řešení této úlohy dostáváme ve tvaru

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\hat{g}(t,\xi).$$

Vzhledem k tomu, že součin Fourierových obrazů funkcí je Fourierovým obrazem jejich konvoluce, můžeme nyní řešení úlohy (4.40)–(4.42) zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \big(\varphi * g(t,\,\cdot\,)\big)(x). \tag{4.46}$$

Reálná funkce $g(t,\,\cdot\,)$ je vzorem spektrální funkce $\hat{g}(t,\,\cdot\,)$ dané formulí (4.45). Získáme ji tedy inversní Fourierovou transformací:

$$g(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Pravou stranu nejprve upravíme

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\cos x\xi\mathrm{d}\xi + \mathrm{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\sin x\xi\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\cos x\xi\mathrm{d}\xi,$$

neboť integrovaná funkce v imaginární části je lichá a integrovaná funkce v reálné části je sudá. Ve výsledném integrálu zavedeme substituci a označení

$$\eta = \sqrt{a^2 t}\,\xi, \quad q = \frac{x}{\sqrt{a^2 t}}.$$

Dostaneme

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\cos x\xi \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2}\cos q\eta \mathrm{d}\eta.$$

Poslední integrál označíme $I(q)$. Tedy

$$I(q) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2}\cos q\eta \mathrm{d}\eta,$$

zejména pro $q=0$ platí[3] $I(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Dále derivováním podle parametru q obdržíme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}I(q) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2}\cos q\eta \mathrm{d}\eta = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2}(-\eta\sin q\eta)\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(-2\eta\mathrm{e}^{-\eta^2}\right)\sin q\eta \mathrm{d}\eta = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[\mathrm{e}^{-\eta^2}\sin q\eta\right]_{\eta=0}^\infty - q\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2}\cos q\eta \mathrm{d}\eta\right) = -\frac{q}{2}I(q).\end{aligned}$$

Integrál $I(q)$ je tedy řešením počáteční úlohy pro obyčejnou lineární homogenní diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}I = -\frac{q}{2}I, \quad I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

to znamená, že

$$I(q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{q^2}{4}}.$$

Návratem k proměnné x dostaneme vyjádření funkce g,

$$g(t,x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2 t}}I\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 t}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right). \tag{4.47}$$

Nyní můžeme uzavřít, že řešení počáteční úlohy (4.40)–(4.42) je dáno formulí (4.46), kde funkce g je definována rovností (4.47), po dosazení tedy

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)\mathrm{d}\xi.$$

Pro zjednodušení zápisu ještě zavedeme funkci G (opět jí budeme říkat zřídlová funkce) předpisem

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \tag{4.48}$$

[3] Tento výsledek dostaneme snadným výpočtem:

$$\begin{aligned}I(0)^2 &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \iint_{[0,\infty)^2}\mathrm{e}^{-\eta^2-\xi^2}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(-2r\mathrm{e}^{-r^2}\right)\mathrm{d}r\right) = -\frac{\pi}{4}\left[\mathrm{e}^{-r^2}\right]_{r=0}^\infty = \frac{\pi}{4};\end{aligned}$$

při výpočtu dvojného integrálu jsme použili transformaci do polárních souřadnic.

a řešení úlohy vyjádříme jako nevlastní integrál

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi. \tag{4.49}$$

Podívejme se ještě na interpretaci získaného výsledku. Funkce u daná rovností (4.49) je kladná pro každé $t > 0$ a každé $x \in \mathbb{R}$. Jinak řečeno, za libovolně krátký čas a v libovolně velké vzdálenosti od počátku je koncentrace difundující látky nenulová. To by znamenalo, že nějaké částice látky se pohybují nekonečnou rychlostí, což samozřejmě není fyzikálně možné. Toto pozorování ukazuje, že zjednodušující předpoklady přijaté při vytváření modelu vedou k jeho neadekvátnosti. Fyzikální nesprávnost modelu je však jen teoretická. Vzhledem k tomu, že exponenciální funkce e^{x^2} s rostoucí hodnotou x velice rychle klesá k nule, je nenulová koncentrace v dostatečné vzdálenosti od počátku prakticky nedetekovatelná.

Na základě předchozí úvahy vypočítáme rychlost šíření difundující látky „z jediného bodu". Představme si proto, že na začátku procesu (v čase $t = 0$) bylo množství A difundující látky koncentrováno v jediném bodě, který můžeme považovat za počátek souřadnic. Tedy uvažujeme úlohu

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, && t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= A\delta(x), && x \in \mathbb{R}, \\ \int_{-\infty}^{0} \big|u(t,x)\big| \mathrm{d}x < \infty,\ & \int_{0}^{\infty} \big|u(t,x)\big| \mathrm{d}x < \infty, && t > 0, \end{aligned}$$

kde δ je Diracova distribuce. Pak pro $t > 0$ je

$$u(t,x) = AG(t,x,0) = \frac{A}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4a^2 t}\right).$$

Označme $R(t)$ takovou hodnotu, že $u\big(t, R(t)\big) = \varepsilon$ a $u(t,x) < \varepsilon$ pro $x > R(t)$; $\varepsilon > 0$ je přitom taková hodnota koncentrace, že ji považujeme za „prakticky nulovou". Pak

$$\varepsilon = \frac{A}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(\frac{-R(t)^2}{4a^2 t}\right) \quad \text{a z toho} \quad R(t)^2 = 4a^2 t \ln \frac{A}{2\varepsilon\sqrt{\pi a^2 t}}.$$

Vzdálenost měřitelného množství difundující látky od počátečního bodu v čase t je tedy dána výrazem

$$R(t) = 2\sqrt{a^2 t \ln \frac{A}{2\varepsilon\sqrt{\pi a^2 t}}}$$

To je funkce času (proměnné t) definovaná na intervalu $[0, T]$, kde čas

$$T = \frac{A^2}{4\varepsilon^2 \pi a^2}$$

vyjadřuje dobu, po niž je difundující látka detekovatelná. V čase

$$\tau = \frac{A^2}{4\mathrm{e}\varepsilon^2 \pi a^2} = \frac{T}{\mathrm{e}}$$

nabývá funkce R svého maxima

$$R_{\max} = \frac{A}{\varepsilon\sqrt{2\pi}};$$

tuto hodnotu lze interpretovat jako maximální vzdálenost, do níž se difundující látka dostane.

Příklad

Najdeme řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru$$

na oblasti $\{(t, x) : t > 0, x \in \mathbb{R}\}$, které splňuje počáteční podmínku

$$u(0, x) = \begin{cases} \alpha, & |x| < \frac{1}{2}\varepsilon, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\varepsilon > 0$.

Nejprve se zbavíme reakčního členu ru na pravé straně rovnice tak, že zavedeme novou neznámou funkci $v = v(t, x)$ vztahem

$$v(t, x) = \mathrm{e}^{-rt} u(t, x),$$

tj. provedeme speciální případ transformace rovnice na kanonický tvar uvedené v 2.1.2. Pak je

$$u(t, x) = \mathrm{e}^{rt} v(t, x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + rv(t, x)\right) \mathrm{e}^{rt}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)\mathrm{e}^{rt}$$

a po dosazení do rovnice dostaneme

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + rv(t, x)\right) \mathrm{e}^{rt} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)\mathrm{e}^{rt} + rv(t, x)\mathrm{e}^{rt}.$$

Výraz e^{rt} je nenulový, proto ho můžeme vykrátit. Funkce v je tedy řešením homogenní rovnice

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

s počáteční podmínkou

$$v(0, x) = u(0, x)\mathrm{e}^{r \cdot 0} = \begin{cases} \alpha, & |x| < \frac{1}{2}\varepsilon, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

Podle (4.49) a (4.48) je funkce v dána integrálem

$$v(t, x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\frac{1}{2}\varepsilon}^{\frac{1}{2}\varepsilon} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi.$$

Zavedeme v něm substituci

$$\eta = \frac{x - \xi}{\sqrt{2a^2 t}}, \qquad \mathrm{d}\xi = -\sqrt{2a^2 t}\,\mathrm{d}\eta.$$

Pak je

$$v(t, x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{2x-\varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}}}^{\frac{2x+\varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}}} \mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}} \mathrm{d}\eta = \alpha \left[\Phi\left(\frac{2x + \varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{2x - \varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}}\right)\right],$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Dostáváme tak řešení dané úlohy $u(t, x) = \mathrm{e}^{rt} v(t, x)$, tj.

$$u(t, x) = \alpha \left[\Phi\left(\frac{2x + \varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{2x - \varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}}\right)\right] \mathrm{e}^{rt}.$$

V počáteční podmínce nyní zvolíme speciálně $\alpha = \dfrac{A}{\varepsilon}$. Pak je

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(0,x)\mathrm{d}x = \frac{A}{\varepsilon}\int_{-\frac{1}{2}\varepsilon}^{\frac{1}{2}\varepsilon} \mathrm{d}x = A$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Pokud tedy danou rovnici interpretujeme jako model autokatalytické reakce (rychlost tvorby reagující látky je úměrná jejímu množství) a difúze, je počáteční množství difundující látky rovno A a toto množství je koncentrováno v malém okolí počátku, na intervalu délky ε. Pro $\varepsilon \to 0$ proto můžeme počáteční funkci považovat za distribuci, konkrétně za A-násobek Diracovy distribuce. Dále platí

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A}{\varepsilon}&\left[\Phi\left(\frac{2x+\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{2x-\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right)\right] = \\
&= \frac{A}{\sqrt{2a^2t}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{2a^2t}} + \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{2a^2t}} - \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{2a^2t}}\right)}{\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2a^2t}}} = \\
&= \frac{A}{\sqrt{2a^2t}}\lim_{\eta\to 0}\frac{\Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{2a^2t}} + \dfrac{\eta}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{2a^2t}} - \dfrac{\eta}{2}\right)}{\eta} = \frac{A}{\sqrt{2a^2t}}\Phi'\left(\frac{x}{\sqrt{2a^2t}}\right),
\end{aligned}$$

a poněvadž derivace distribuční funkce normovaného normálního rozložení pravděpodobnosti je hustotou tohoto rozdělení, dostáváme řešení dané úlohy pro $\varepsilon \to 0$ ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{A}{\sqrt{2a^2t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\cdot 2a^2t}}\,\mathrm{e}^{rt} = \frac{A}{2\sqrt{a^2\pi t}}\mathrm{e}^{rt-\frac{x^2}{4a^2t}}. \tag{4.50}$$

Pro $r = 0$ dostáváme řešení ve stejném tvaru, jaký mělo „uhodnuté“ řešení (4.26) úlohy (4.22), (4.24).

Pokusme se stanovit pozorovatelnou rychlost, jakou se v prostředí šíří difundující látka vznikající autokatalytickou rekcí. Nechť δ označuje minimální koncentraci látky, kterou lze v prostředí detekovat, a $R = R(t)$ časově závislou vzdálenost od počátku, v níž je koncentrace rovna hodnotě δ, tj. $u\big(t, R(t)\big) = \delta$. Dosazením do (4.50) dostaneme

$$\delta = \frac{A\mathrm{e}^{rt}}{2\sqrt{a^2\pi t}}\exp\left(-\frac{R(t)^2}{4a^2t}\right).$$

Z této rovnice vyjádříme

$$\frac{R(t)^2}{t^2} = 4a^2r - \frac{2a^2}{t}\ln\frac{4\pi a^2\delta^2 t}{A^2}$$

a dále

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{R(t)}{t}\right)^2 = 4a^2r.$$

Odtud plyne, že pro dostatečně velký čas t je

$$R(t) \approx 2\sqrt{a^2r}\,t, \tag{4.51}$$

což znamená, že pozorovatelná rychlost šíření látky je přibližně konstantní a rovna $2\sqrt{a^2r}$. ■

Na závěr opět shrneme některé evidentní vlastnosti zřídlové funkce $G : (0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \to (0,\infty)$ definovaná vztahem (4.48):

- Je spojitá na svém definičním oboru.

- Je symetrická ve druhé a třetí proměnné, tj. $G(t,x,\xi) = G(t,\xi,x)$ pro všechny trojice $(t,x,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2$.
- Funkce $G(t,\,\cdot\,,\xi)$ (tj. funkce G chápaná jako funkce jedné proměnné x se dvěma parametry t a ξ) má spojité derivace druhého řádu pro všechny hodnoty $(t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.
- Funkce $G(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\xi)$ je pro všechna $\xi \in \mathbb{R}$ řešením rovnice (4.31), které splňuje podmínky integrovatelnosti
$$\int_{-\infty}^{0} \big|G(t,x,\xi)\big| \mathrm{d}x < \infty, \qquad \int_{0}^{\infty} \big|G(t,x,\xi)\big| \mathrm{d}x < \infty$$
pro každou hodnotu t.
- Pro všechny hodnoty $x, \xi \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{t\to 0+} G(t,x,\xi) = \delta(x-\xi) \text{ ve smyslu distribucí;}$$
δ je Diracova distribuce, sr. Dodatek A, třetí z příkladů δ-vytvořujících posloupností, str. 154. Dále
$$\lim_{t\to\infty} G(t,x,\xi) = 0.$$
- Funkce jedné proměnné $G(t,0,\,\cdot\,)$ je pro jakoukoliv hodnotu t sudá.

  Funkce jedné proměnné $\dfrac{\partial G}{\partial x}(t,0,\,\cdot\,)$, tj. funkce daná předpisem
$$\frac{\partial G}{\partial x}(t,0,\xi) = \frac{\xi}{4\sqrt{\pi(a^2t)^3}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)$$
je lichá pro jakoukoliv hodnotu t.

4.1.2 Homogenní úlohy pro homogenní rovnici na polopřímce

Nejprve si všimneme jednoho důsledku poslední vlastnosti funkce G definované vztahem (4.48). Připomeňme si ještě, že součin sudé a liché funkce je funkce lichá, a že integrál z liché funkce na intervalu symetrickém kolem nuly je nulový. Odtud plyne:

Tvrzení 5. Nechť G je funkce definovaná vztahem (4.48). Jsou-li $\psi, \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohraničené funkce integrabilní na každém kompaktním intervalu, přičemž funkce ψ je lichá a funkce χ je sudá, pak pro funkce v, w definované vztahy
$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi, \qquad w(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi$$
platí
$$v(t,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) G(0,\xi,t) \mathrm{d}\xi = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(t,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) \frac{\partial G}{\partial x}(0,\xi,t) \mathrm{d}\xi = 0.$$
Nevlastní integrály chápeme ve smyslu hlavní hodnoty, tj. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\mathrm{d}\xi = \lim\limits_{c\to\infty} \int\limits_{-c}^{c} g(\xi)\mathrm{d}\xi$.

Toto tvrzení umožňuje najít řešení dvou okrajových úloh pro homogenní parabolickou rovnic na oboru $[0,\infty) \times [0,\infty)$ s využitím předchozích výsledků získaných metodou Fourierovy transformace.

Uvažujme nejprve počáteční úlohu s jednou homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou a s jednou podmínkou integrovatelnosti:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0,\ x > 0, \tag{4.52}$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x > 0, \tag{4.53}$$
$$u(t,0) = 0,\ \int\limits_0^\infty \big|u(t,x)\big| \mathrm{d}x < \infty, \qquad t > 0. \tag{4.54}$$

Počáteční funkci φ prodloužíme na celý interval $(-\infty, \infty)$ tak, aby to byla funkce lichá. Položíme tedy

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}.$$

Řešení úlohy

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, && t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= \tilde{\varphi}(x), && x \in \mathbb{R}, \\ \int\limits_{-\infty}^0 \big|u(t,x)\big| \mathrm{d}x < \infty,\ & \int\limits_0^\infty \big|u(t,x)\big| \mathrm{d}x < \infty, && t > 0 \end{aligned}$$

je podle (4.49) dáno formulí

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\xi) G(t,x,\xi) \mathrm{d}\xi,$$

kde zřídlová funkce G je dána formulí (4.48). Tento výsledek ještě upravíme tak, aby ve vyjádření řešení byly pouze funkce vystupující v zadání úlohy, tj. „funkce bez vlnek“. Pro lichou funkci $\tilde{\varphi}$ platí

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\xi) G(t,x,\xi) \mathrm{d}\xi = -\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(-\xi) G(t,x,\xi) \mathrm{d}\xi + \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\xi) G(t,x,\xi) \mathrm{d}\xi =$$
$$= -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\xi) G(t,x,-\xi) \mathrm{d}\xi + \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\xi) G(t,x,\xi) \mathrm{d}\xi = \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\xi) \big(G(t,x,\xi) - G(t,x,-\xi)\big) \mathrm{d}\xi.$$

Poněvadž

$$G(t,x,\xi) - G(t,x,-\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right) \right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2 t} \right) \left(\exp\frac{2x\xi}{4a^2 t} - \exp\frac{-2x\xi}{4a^2 t} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2 t} \right) \sinh\frac{x\xi}{2a^2 t},$$

můžeme řešení úlohy (4.52)–(4.54) psát ve tvaru

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty \varphi(\xi) G_D(t,x,\xi) \mathrm{d}\xi, \tag{4.55}$$

kde

$$G_D(t,x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2 t} \right) \sinh\frac{x\xi}{2a^2 t}.$$

Analogickým postupem (funkci φ prodloužíme na interval $(-\infty, \infty)$ tak, aby se z ní stala funkce sudá) odvodíme, že řešení úlohy

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0,\ x > 0, \tag{4.56}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x > 0, \tag{4.57}$$

$$u_x(t,0) = 0,\ \int\limits_0^\infty \big|u(t,x)\big| \mathrm{d}x < \infty, \qquad t > 0, \tag{4.58}$$

tj. úlohy s Neumannovou okrajovou podmínkou v levém krajním bodě, je tvaru

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty \varphi(\xi) G_N(t,x,\xi) \mathrm{d}\xi, \tag{4.59}$$

kde

$$G_N(t,x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2t}\right) \cosh \frac{x\xi}{2a^2t}.$$

Snadno nahlédneme, že funkce $G_D, G_N : (0,\infty)^3 \to [0,\infty)$ mají následující vlastnosti:

- Jsou spojité na svém definičním oboru.
- Jsou symetrické ve druhé a třetí proměnné.
- Funkce $G_N(t,\cdot,\xi)$ a $G_D(t,\cdot,\xi)$ mají spojité derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů $(\xi, t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$.
- Funkce $G_D(\cdot,\cdot,\xi)$, resp. $G_N(\cdot,\cdot,\xi)$, je pro všechna $\xi \in (0,\infty)$ řešením rovnice (4.52), které splňuje okrajové podmínky (4.54), resp. (4.58), pro každou hodnotu t.
- Pro jakékoliv hodnoty $x, \xi \geq 0$ platí

  $$\lim_{t\to\infty} G_D(t,x,\xi) = 0 = \lim_{t\to\infty} G_N(t,x,\xi)$$

  a

  $$\lim_{t\to 0+} G_D(t,x,\xi) = \delta(x-\xi) = \lim_{t\to 0+} G_N(t,x,\xi) \quad \text{ve smyslu distribucí,}$$

  kde δ je Diracova distribuce.

4.1.3 Homogenní úlohy pro homogenní rovnici na úsečce

Pro řešení homogenní parabolické rovnice na ohraničeném prostorovém oboru s obecnými homogenními Robinovými okrajovými podmínkami již nelze bezprostředně využít výsledek získaný pomocí Fourierovy transformace. Tuto úlohu budeme řešit separací proměnných, podobně jako v případě rovnice hyperbolické 3.1.4.

Uvažujme nyní úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0,\ 0 < x < l, \tag{4.60}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad 0 < x < l, \tag{4.61}$$

$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = 0 = \alpha_1 u(t,l) + \beta_1 u_x(t,l), \qquad t > 0; \tag{4.62}$$

opět předpokládáme, že okrajové podmínky jsou nedegenerované, tj. že parametry splňují nerovnosti $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0 \neq |\alpha_0| + |\beta_0|$.

Nejprve v separujeme proměnné, tj. řešení rovnice hledáme ve tvaru

$$u(t,x) = T(t)X(x). \tag{4.63}$$

Toto vyjádření dosadíme do rovnice (4.60) a upravíme tak, že na pravé straně ponecháme pouze funkci X a její derivaci. Dostaneme rovnost

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X},$$

jejíž levá strana nezávisí na proměnné x a pravá nezávisí na proměnné t; výrazy na obou stranách jsou tedy rovny nějaké konstantě, kterou označíme $-\lambda$ a dostaneme dvě rovnice

$$\frac{T'}{a^2T} = -\lambda, \qquad \frac{X''}{X} = -\lambda. \tag{4.64}$$

Druhou z nich přepíšeme do tvaru obyčejné lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantním koeficientem

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{4.65}$$

Vyjádření (4.63) funkce u dosadíme do okrajové podmínky (4.62). Dostaneme rovnosti

$$\alpha_0 T(t)X(0) + \beta_0 T(t)X'(0) = 0 = \alpha_1 T(t)X(l) + \beta_1 T(t)X'(l),$$

které mají být splněny pro libovolnou hodnotu $t > 0$. Odtud plyne, že řešení X rovnice (4.65) splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_0 X(0) + \beta_0 X'(0) = 0 = \alpha_1 X(l) + \beta_1 X'(l). \tag{4.66}$$

Úloha (4.65), (4.66) pro obyčejnou lineární rovnici druhého řádu s parametrem λ a homogenními okrajovými podmínkami je Sturmovou-Liouvilleovou úlohou, sr. Dodatek B.2. Podle Věty 3 existuje rostoucí posloupnost $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ jednoduchých vlastních čísel, z nichž nejmenší je větší nebo rovno 0. Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že 0 je vlastním číslem úlohy (4.65), (4.66) právě tehdy, když $\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 = \alpha_0\alpha_1 l$.

K vlastním číslům λ_k přísluší vlastní funkce v_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Dostáváme tak spočetně mnoho řešení

$$X_k(x) = v_k(x), \qquad k \in I$$

okrajové úlohy (4.65), (4.66).

Nalezené hodnoty λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ dosadíme do první z rovnic (4.64). Dostaneme tak obyčejné lineární homogenní rovnice prvního řádu

$$T' = -a^2\lambda_k T, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

jejichž obecné řešení je tvaru

$$T_k(t) = C_k \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t},$$

kde C_k jsou zatím neurčené konstanty. Poznamenejme, že řešení téhož tvaru i v případě $\lambda_1 = 0$. Po dosazení funkcí X_k, T_k do vyjádření (4.63) hledaného řešení úlohy pro parciální diferenciální rovnici dostaneme spočetný systém funkcí

$$u_k(t,x) = T_k(t)X_k(x) = C_k \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t} v_k(x), \qquad k \in I,$$

z nichž každá je řešením rovnice (4.60) a splňuje příslušné okrajové podmínky (4.60). Poněvadž rovnice i okrajové podmínky jsou homogenní, a tedy splňují princip superpozice, můžeme řešení této úlohy psát formálně ve tvaru nekonečné řady

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t} v_k(x). \tag{4.67}$$

Hodnoty koeficient[C_k, $k = 1, 2, \ldots$ získáme z dosud nevyužité počáteční podmínky (4.60)

$$\varphi(x) = u(0,x) = \sum_{k \in I} C_k v_k(x).$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že konstanty C_k jsou Fourierovými koeficienty funkce φ vzhledem k orthogonálnímu systému vlastních funkcí $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, tedy

$$C_k = \frac{1}{\|v_k\|^2} \int\limits_0^l \varphi(\xi) v_k(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Tyto koeficienty dosadíme do rovnosti (4.67) vyjadřující řešení a upravíme ji na tvar

$$u(t,x) = \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sum_{k\in I} \frac{v_k(x)v_k(\xi)}{\|v_k\|^2} \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t} \mathrm{d}\xi.$$

Dosažený výsledek shrneme: Řešení úlohy (4.60)–(4.62) je dáno integrálem

$$u(t,x) = \int\limits_0^l \varphi(\xi) G(t,x,\xi) \mathrm{d}\xi\,;$$

přitom funkce $G : [0,\infty) \times [0,l]^2 \to \mathbb{R}$ je definována nekonečnou řadou

$$G(t,x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)v_k(\xi)}{\|v_k\|^2} \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t},$$

kde λ_k jsou vlastní hodnoty a v_k jsou příslušné vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (4.65), (4.66).

Zřídlová funkce G má vlastnosti:

- Funkce G je spojitá na množině $(0,\infty) \times (0,l)^2$.
- Je symetrická ve druhé a třetí proměnné.
- Funkce jedné proměnné $G(t,\,\cdot\,,\xi)$ má spojité derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů $(t,\xi) \in (0,\infty) \times (0,l)$.
- Funkce dvou proměnných $G(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\xi)$ je pro všechna $\xi \in (0,l)$ řešením rovnice (4.60), které splňuje homogenní Robinovy okrajové podmínky

  $$\alpha_0 G(t,0,\xi) + \beta_0 \frac{\partial G}{\partial x}(t,0,\xi) = 0 = \alpha_1 G(t,l,\xi) + \beta_1 \frac{\partial G}{\partial x}(t,l,\xi)$$

  pro každou hodnotu $t > 0$.
- Pro všechny hodnoty $x,\xi \in [0,l]$ platí

  $$\lim_{t\to\infty} G(t,x,\xi) = \begin{cases} 0, & \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 \neq \alpha_0\alpha_1 l, \\ \dfrac{3\left(\alpha_1^2 x\xi - \alpha_1(x+\xi)(\alpha_1+\beta_1) + (\alpha_1+\beta_1)^2\right)}{l\left(\alpha_1^2 l^2 + 3\beta_1(\alpha_1+\beta_1)\right)}, & \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 = \alpha_0\alpha_1 l, \end{cases}$$

  a

  $$\lim_{t\to 0+} G(t,x,\xi) = \delta(x-\xi) \quad \text{ve smyslu distribucí.}$$

4.1.4 Homogenní úlohy pro homogenní rovnici – shrnutí

V odstavcích 4.1.1–4.1.3 jsme našli řešení počáteční úlohy pro homogenní parabolickou rovnici s homogenními okrajovými podmínkami na neomezeném nebo omezeném oboru J prostorové proměnné x. Řešení úlohy

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0,\ x \in J, \tag{4.68}$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in J, \tag{4.69}$$
$$\text{homogenní okrajová podmínka}, \qquad t > 0 \tag{4.70}$$

bylo vždy dáno integrálem tvaru

$$u(t,x) = \int_J \varphi(\xi) G(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Zřídlová (Greenova) funkce $G : (0,\infty) \times J \to \mathbb{R}$ je určena intervalem J a okrajovými podmínkami. Podrobněji: Funkce $G(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\xi)$ je řešením úlohy (4.68)–(4.70) s počáteční distribucí $\varphi(x) = \delta(x-\xi)$. Je to funkce spojitá na $(0,\infty) \times J$, je dvakrát spojitě diferencovatelná podle druhé proměnné x a je symetrická v „prostorových proměnných“ x a ξ.

V Tabulce 4.1 jsou uvedeny zřídlové funkce v některých speciálních případech.

Ještě poznamenejme, že mírně obecnější úloha

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad t > \sigma,\ x \in J, \tag{4.71}$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in J, \tag{4.72}$$
$$\text{homogenní okrajová podmínka}, \qquad t > 0 \tag{4.73}$$

má řešení dané integrálem

$$u(t,x) = \int_J \varphi(\xi) G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\xi,$$

které snadno odvodíme transformací (posunutím) proměnné t.

4.1.5 Úlohy pro nehomogenní rovnice

Pro řešení úlohy pro nehomogenní parabolickou rovnici s nulovou počáteční podmínkou a homogenní okrajovou podmínkou

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x), \qquad t > 0,\ x \in J, \tag{4.74}$$
$$u(0,x) = 0, \qquad x \in J, \tag{4.75}$$
$$\text{homogenní okrajová podmínka}, \qquad t > 0 \tag{4.76}$$

použijeme Duhamelův princip, podobně jako v případě hyperbolické rovnice, viz str. 58.

Budeme předpokládat, že řešení této úlohy je dáno integrálem

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma, \tag{4.77}$$

kde w je nějaká, zatím neznámá funkce tří proměnných. Funkce u definovaná rovností (4.77) splňuje počáteční podmínku (4.75). Dále pro ni platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

interval J	okrajová podmínka	$G(x,\xi,t)$
$(-\infty,\infty)$	$u(t,x)=u(t,x+l)$	$\frac{1}{l}\left(1+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2k\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{2k\pi}{l}(x-\xi)\right)$
$(-\infty,\infty)$	$\int\limits_{-\infty}^{0}\lvert u(t,x)\rvert\mathrm{d}x<\infty,\ \int\limits_{0}^{\infty}\lvert u(t,x)\rvert\mathrm{d}x<\infty$	$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2\sqrt{\pi a^2 t}}$
$(0,\infty)$	$u(t,0)=0,\ \int\limits_{0}^{\infty}\lvert u(t,x)\rvert\mathrm{d}x<\infty$	$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2t}}}{\sqrt{\pi a^2 t}}\sinh\frac{x\xi}{2a^2t}$
$(0,\infty)$	$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0,\ \int\limits_{0}^{\infty}\lvert u(t,x)\rvert\mathrm{d}x<\infty$	$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2t}}}{\sqrt{\pi a^2 t}}\cosh\frac{x\xi}{2a^2t}$
$(0,l)$	$u(t,0)=0=u(t,l)$	$\frac{2}{l}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}\xi\sin\frac{k\pi}{l}x$
$(0,l)$	$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0=\frac{\partial u}{\partial x}(t,l)$	$\frac{1}{l}\left(1+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{k\pi}{l}\xi\cos\frac{k\pi}{l}x\right)$
$(0,l)$	$u(t,0)=0=\frac{\partial u}{\partial x}(t,l)$	$\frac{2}{l}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}\xi\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$
$(0,l)$	$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0=u(t,l)$	$\frac{2}{l}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}\xi\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$

Tabulka 4.1: Zřídlové funkce úlohy (4.68), (4.70) pro některé homogenní okrajové podmínky.

Tabulka 4.1: pokračování

$(0,l)$	$u(t,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,l)=-hu(t,l)$	$2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(h^2+\lambda_k)}{l(h^2+\lambda_k)+2h}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\sin\sqrt{\lambda_k}x,$ λ_k jsou kladné kořeny rovnice $\sqrt{\lambda}=-h\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda}l\right)$
$(0,l)$	$\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,l)=-hu(t,l)$	$2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(h^2+\lambda_k)}{l(h^2+\lambda_k)+2h}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}\cos\sqrt{\lambda_k}\xi\cos\sqrt{\lambda_k}x,$ λ_k jsou kladné kořeny rovnice $\sqrt{\lambda}=h\,\mathrm{cotg}\left(\sqrt{\lambda}l\right)$
$(0,l)$	$\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0)=hu(t,0),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,l)=-hu(t,l)$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}\left(\cos\sqrt{\lambda_k}\xi+\dfrac{h}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\right)\left(\cos\sqrt{\lambda_k}x+\dfrac{h}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}x\right)}{\dfrac{l}{2}+\dfrac{h^2l+2h}{2\lambda_k}},$ λ_k jsou kladné kořeny rovnice $\dfrac{\sqrt{\lambda}}{h}-\dfrac{h}{\sqrt{\lambda}}=2\,\mathrm{cotg}\left(\sqrt{\lambda}l\right)$

a podle věty o derivaci integrálu závislého na parametru platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma = w(t,x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Po dosazení do rovnice (4.74) dostaneme

$$w(t,x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma = a^2\int\limits_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma + f(t,x)$$

a po snadné úpravě

$$\int\limits_0^t \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t,x,\sigma) - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x,\sigma)\right)\mathrm{d}\sigma = f(t,x) - w(t,x,t).$$

Z této rovnosti vidíme, že za funkci w ve vyjádření (4.77) řešení úlohy (4.74)–(4.76) můžeme dosadit funkci $w = w(t,x,\sigma)$ chápanou jako funkci nezávisle proměnných t a x, s jedním parametrem σ, která při jakékoliv hodnotě tohoto parametru σ splňuje rovnosti

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t}(t,x,\sigma) = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x,\sigma), && \text{pro } t > \sigma \text{ a } x \in J,\\ &w(\sigma,x,\sigma) = f(\sigma,x), && \text{pro } x \in J. \end{aligned} \tag{4.78}$$

To znamená, že funkce $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\sigma)$ je řešením počáteční úlohy pro homogenní rovnici. Pro úplné určení této funkce potřebujeme ještě podmínky okrajové. Pokud je podmínka (4.76) některého z tvarů (4.36), (4.42), (4.54), (4.58), nebo (4.62), můžeme stejnou podmínku klást na funkci $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\sigma)$. Funkce u daná integrálem (4.77) pak okrajovou podmínku splní také.[4] Podle 4.1.4 je tedy

$$w(t,x,\sigma) = \int\limits_J f(\sigma,\xi)G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

a řešení úlohy (4.74)–(4.76) pro nehomogenní rovnici s nulovou počáteční podmínkou a homogenní okrajovou podmínkou dostáváme ve tvaru

$$u(t,x) = \int\limits_0^t \left(\int\limits_J f(\sigma,\xi)G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma = \int\limits_J\int\limits_0^t f(\sigma,\xi)G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\xi,$$

[4] To snadno ověříme: v případě Robinovy podmínky platí

$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = \alpha_0\int\limits_0^t w(t,0,\sigma)\mathrm{d}\sigma + \beta_0\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t w(t,0,\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^t (\alpha_0 w(t,0,\sigma) + \beta_0 w_x(t,0,\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$$

a analogicky ve druhém krajním bodě. Dále platí pro periodické podmínky

$$u(t,x+l) = \int\limits_0^t w(t,x+l,\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma = u(t,x)$$

a pro podmínky integrability

$$\int\limits_0^\infty |u(t,x)|\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty\left|\int\limits_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma\right|\mathrm{d}x \le \int\limits_0^\infty\int\limits_0^t |w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty |w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\sigma < \infty,$$

neboť vnitřní nevlastní integrál je konvergentní, tj. konečný, a vnější integrál je počítán na konečném intervalu. Podobně zdůvodníme platnost podmínky integrability v $-\infty$.

kde G je Greenova funkce příslušné homogenní úlohy.

Zdůrazněme ještě, že z provedených úvah nijak neplyne, že by řešení úlohy (4.74)–(4.76) nutně muselo mít tvar daný rovností (4.77) a dále rovnostmi (4.78). Pouze jsme ukázali, že pokud bude funkce w splňovat rovnosti (4.78) a příslušné okrajové podmínky, pak funkce (4.77) je řešením této úlohy.

Snadno ověříme, že řešení počáteční úlohy pro nehomogenní parabolickou rovnici s homogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(t,x), && t > 0,\ x \in J, && (4.79)\\ u(0,x) &= \varphi(x), && x \in J, && (4.80)\\ &\text{homogenní okrajová podmínka}, && t > 0 && (4.81) \end{aligned}$$

je součtem řešení homogenní rovnice s nenulovou počáteční podmínkou a nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou, tedy

$$u(t,x) = \int_J \varphi(\xi)G(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi + \int_J \int_0^t f(\sigma,\xi)G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\xi =$$
$$= \int_J \left(\varphi(\xi)G(t,x,\xi) + \int_0^t f(\sigma,\xi)G(t-\sigma,x,\xi)\mathrm{d}\sigma \right)\mathrm{d}\xi. \tag{4.82}$$

Nehomogenní Robinovy podmínky

Nejobecnější úloha pro parabolickou rovnici s konstantním koeficientem v jedné omezené prostorové proměnné (na úsečce) je úloha

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(t,x), && t > 0,\ 0 < x < l, && (4.83)\\ u(0,x) &= \varphi(x), && 0 < x < l, && (4.84)\\ \alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) &= \mu_0(t), && && \\ \alpha_1 u(t,l) + \beta_1 u_x(t,l) &= \mu_1(t), && t > 0. && (4.85) \end{aligned}$$

Řešení této úlohy je tvaru

$$u(t,x) = U(t,x) + w(t,x),$$

kde funkce U splňuje okrajové podmínky (4.85) a funkce w je řešením úlohy s homogenními podmínkami

$$\begin{aligned} w_t = a^2 w_{xx} + f(t,x) - a^2 U_{xx}(t,x) + U_t(t,x), && t > 0,\ 0 < x < l,\\ u(0,x) = \varphi(x) - U(0,x), && 0 < x < l,\\ \alpha_0 w(t,0) + \beta_0 w_x(t,0) = 0 = \alpha_1 w(t,l) + \beta_1 w_x(t,l), && t > 0. \end{aligned}$$

Okrajové podmínky (4.85) jsou stejné, jako okrajové podmínky (3.86). Funkci U lze tedy volit stejně, jako na str. 73. To samozřejmě není jediná možnost. Někdy lze funkci U volit tak, aby nějakým způsobem odpovídala interpretaci řešené úlohy. Pokud se to podaří, úloha pro funkci w bývá jednodušší, než při „tupé volbě“ polynomu nebo goniometrické funkce.

Analogicky lze hledat řešení úlohy na polopřímce s jednou nehomogenní okrajovou podmínkou.

Příklad

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && t > 0,\ x > 0,\\ &u(0,x) = 0, && x > 0,\\ &u(t,0) = \sin t,\ \int_0^\infty |u(t,x)|\mathrm{d}x < \infty, && t > 0. \end{aligned}$$

Tuto úlohu můžeme interpretovat jako popis vedení tepla v dlouhé tyči, která je na povrchu izolovaná, na počátku má nulovou teplotu a na jednom konci ji periodicky zahříváme a ochlazujeme. Lze očekávat, že v každém bodě tyče se bude teplota měnit se stejnou periodou. Ovšem vliv kolísání teploty na konci tyče na teplotu ve vzdálenosti x od něho se projeví s nějakým zpožděním, které je tím větší, čím je vzdálenost x větší; v nejjednodušším případě by zpoždění mohlo být vzdálenosti přímo úměrné. Amplituda kolísání teploty se musí s rostoucí vzdáleností od konce zmenšovat, a to tak, aby byla splněna podmínka integrovatelnosti. Tato úvaha vede k nápadu, že funkce U by mohla být tvaru

$$U(t,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin(t-\beta x),$$

kde α, β jsou zatím neurčené kladné konstanty. Při této volbě je

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(t-\beta x),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\big((\alpha^2-\beta^2)\sin(t-\beta x) + 2\alpha\beta\cos(t-\beta x)\big),$$

takže

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\big(a^2(\alpha^2-\beta^2)\sin(t-\beta x) + (2a^2\alpha\beta - 1)\cos(t-\beta x)\big).$$

Aby byl poslední výraz nulový, budeme požadovat $\alpha^2 = \beta^2$, $2a^2\alpha\beta = 1$, tedy zvolíme

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2a^2}}, \qquad U(t,x) = \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right)\sin\left(t - \frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right).$$

Dostáváme tak řešení dané úlohy ve tvaru $u(t,x) = U(t,x) + v(t,x)$, kde v je řešením počáteční úlohy pro homogenní parabolickou rovnici na polopřímce s homogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, && t>0,\ x>0,\\
&v(0,x) = \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right), && x>0,\\
&v(t,0) = 0,\ \int_0^\infty |v(t,x)|\mathrm{d}x < \infty, && t>0.
\end{aligned}$$

Podle (4.55) je tedy řešení úlohy dáno formulí

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right)\sin\left(t - \frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2 t} - \frac{\xi}{\sqrt{2a^2}}\right)\sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a^2}}\right)\cosh\frac{x\xi}{2a^2 t}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Ještě si můžeme povšimnut, že

$$\lim_{t\to\infty}\big(u(t,x) - U(t,x)\big) = 0;$$

řešení dané úlohy je asymptoticky ekvivalentní s „uhodnutou“ funkcí U. V historické aplikaci parabolické rovnice uvedené od str. 111 uvidíme, že funkce U vyjadřuje speciální případ prvních dvou Fourierových zákonů vedení tepla. ■

4.1.6 Úloha bez počátečních podmínek

Nejprve si všimněme, že pro téměř všechny zřídlové funkce G uvedené v Tabulce 4.1 (výjimkou je funkce G pro homogenní Neumannovu úlohu na úsečce), platí vztah

$$\lim_{t\to\infty} G(t,x,\xi) = 0 \text{ pro všechna } (x,\xi) \in \mathbb{R}^2.$$

To znamená, že po „dostatečně dlouhém čase“ bude hodnota integrálu

$$\int_J \varphi(\xi)G(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

ve vyjádření řešení úlohy (4.79)–(4.81) rovností (4.82) zanedbatelná. Jinak řečeno, řešení úlohy v „dostatečně dlouhém časovém horizontu“ nezávisí na počáteční podmínce, v průběhu času vymizí informace o počátku. Systém s takovou vlastností – jeho vývoj za dlouhý časový interval nezávisí na počátečním stavu – se nazývá *ergodický*.

Dosud jsme hledali řešení parabolické rovnice, které splňovalo nějakou počáteční podmínku, tj. znali jsme stav v počátečním čase $t = 0$. Tato informace však nemusí být vždy dostupná, zejména pokud proces popsaný parabolickou rovnicí pozorujeme v čase dlouho od jeho začátku. Vzhledem k ergodičnosti však počáteční stav nemá na vývoj systému už nějaký podstatný vliv.

Konkrétně: Teplota na zemském povrchu v průběhu dne i v průběhu roku kolísá. Toto kolísání lze v prvním přiblížení považovat za periodické. Budeme modelovat šíření periodických teplotních změn v zemi, kterou budeme považovat za homogenní poloprostor; budeme ho charakterizovat jedinou souřadnicí x, hloubkou pod povrchem. Při mnohonásobném pravidelném opakování teplotních změn na povrchu bude vliv počáteční teploty menší, než vlivy, které zanedbáváme (např. nehomogennost půdy, odchylky od přesné periodičnosti průběhu povrchové teploty a podobně).

Teplotu v čase t a v hloubce x označíme $u(t,x)$. Vnitřní zdroje tepla v půdě (např. geotermální energii) neuvažujeme. Proto bude vývoj teploty popsán homogenní parabolickou rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.86}$$

kde a^2 vyjadřuje koeficient teplotní vodivosti půdy. Teplota na povrchu bude vyjádřena okrajovou podmínkou

$$u(t,0) = \mu(t), \tag{4.87}$$

kde μ je nějaká spojitá periodická funkce. Jakožto spojitá periodická funkce je μ také ohraničená, tj. existuje nějaká hodnota M, že

$$|\mu(t)| \le M \text{ pro } t \in \mathbb{R}.$$

Teplota půdy v dlouhodobém časovém horizontu nemůže překračovat nejvyšší teplotu na povrchu a nemůže klesnout pod jeho nejnižší teplotu (poněvadž neuvažujeme žádné vnitřní zdroje tepla nebo chlazení). Proto budeme hledat řešení, které splňuje podmínku ohraničenosti

$$|u(t,x)| \le M \text{ pro } t \in \mathbb{R},\ x \ge 0. \tag{4.88}$$

Hledáme tedy funkci $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která splňuje rovnici (4.86) a podmínky (4.87), (4.88).

Poněvadž funkce μ je spojitá a periodická, můžeme ji vyjádřit ve tvaru absolutně a stejnoměrně konvergentní Fourierovy řady[5]

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\right);$$

[5] Pokud uvažujeme roční kolísání teploty, je $\omega = 2\pi/\text{rok}$.

přitom

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \mu(s) \cos k\omega s \mathrm{d}s, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad b_k = \frac{\omega}{\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega} \mu(s) \sin k\omega s \mathrm{d}s, \; k = 1, 2, \ldots . \tag{4.89}$$

Je zřejmé, že pokud funkce v_i splňují rovnici (4.86) s okrajovými podmínkami $v_i(t, 0) = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, pak také jejich součet $v = v_1 + v_2$ splňuje rovnici (4.86) a navíc okrajovou podmínku $v(t, 0) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$. Proto budeme řešení naší úlohy (4.86), (4.87), (4.88) hledat ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t, x) + \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t, x),$$

kde všechny funkce v_k, w_k splňují rovnici (4.86), jsou ohraničené a splňují okrajové podmínky

$$v_k(t, 0) = a_k \cos k\omega t, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.90}$$

$$w_k(t, 0) = b_k \sin k\omega t, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.91}$$

Nejprve však najdeme ohraničené řešení pomocné úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad t \in \mathbb{R}, \; x > 0, \\ v(t, 0) &= a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}, \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.92}$$

s komplexní okrajovou podmínkou. Snadno ověřme, že reálná část řešení této úlohy je také řešením úlohy (4.86), (4.90). Řešení úlohy (4.92) budeme hledat v exponenciálním tvaru

$$v(t, x) = a_k \mathrm{e}^{\alpha t + \beta x}.$$

Pak je $v(t, 0) = a_k \mathrm{e}^{\alpha t}$ a porovnáním s okrajovou podmínkou v úloze (4.92) vidíme, že $\alpha = \mathrm{i}k\omega$. Dále

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \alpha a_k \mathrm{e}^{\alpha t + \beta x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = \beta^2 a_k \mathrm{e}^{\alpha t + \beta x},$$

takže po dosazení do rovnice v úloze (4.92) a snadné úpravě dostaneme

$$\alpha = a^2 \beta^2.$$

Odtud $a^2\beta^2 = \mathrm{i}k\omega$. Z této kvadratické rovnice s komplexními koeficienty vypočítáme

$$\beta = \pm(1 + \mathrm{i})\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}.$$

Dostáváme tak řešení pomocné úlohy (4.92) ve tvaru

$$v(t, x) = a_k \exp\left(\mathrm{i}k\omega t \pm (1 + i)\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\, x\right) = a_k \exp\left(\pm\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\, x\right) \exp\left[\mathrm{i}\left(k\omega t \pm \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\, x\right)\right].$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že řešení se znaménkem „+“ je neohraničené; vyhovuje tedy tedy pouze funkce se znaménkem „−“. Proto omezené řešení úlohy (4.86), (4.90) je reálnou částí posledního výrazu, v němž místo symbolu „±“ píšeme znaménko „−“, tj.

$$v_k(t, x) = a_k \exp\left(-\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\, x\right) \cos\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\, x\right).$$

Analogicky najdeme ohraničené řešení úlohy (4.86), (4.91) ve tvaru

$$w_k(t, x) = b_k \exp\left(-\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\, x\right) \sin\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\, x\right).$$

Celkem tak dostáváme řešení úlohy (4.86), (4.87), (4.88) ve tvaru nekonečné řady

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right)\left[a_k \cos\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right) + b_k \sin\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}\,x\right)\right],$$

kde koeficienty a_k, b_k jsou dány integrály (4.89). Výraz v hranatých závorkách můžeme upravit[6] a výsledek zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x) \cos k\omega\big(t - \delta_k(x)\big),$$

kde

$$A_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(-\sqrt{\dfrac{k\omega}{2a^2}}\,x\right)}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}, & a_k^2+b_k^2 \neq 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad \delta_k(x) = \sqrt{\frac{1}{2ka^2\omega}}\,x + \begin{cases} \dfrac{1}{k\omega}\operatorname{arctg}\dfrac{b_k}{a_k}, & a_k \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2k\omega}, & a_k = 0. \end{cases}$$

Klasická aplikace: Teplotní vlny

Úloha o vedení tepla v půdě je jedním z prvních příkladů užití matematické teorie tepla. Za zjednodušujících předpokladů ji řešil již Joseph Fourier[7]. Předpokládal, že teplota na povrchu v průběhu roku (čas vyjadřoval ve dnech) je rovna součtu průměrné roční teploty a teploty specifické pro den, která je úměrná výšce Slunce nad obzorem za poledne. Pokud se tedy čas t počítá od okamžiku letního slunovratu, je povrchová teplota vyjádřena funkcí

$$\mu(t) = T + \gamma \cos \omega t,$$

kde T je průměrná roční teplota, γ je příslušná konstanta úměrnosti a frekvence ω má hodnotu

$$\omega = \frac{2\pi}{365{,}26}\,\text{den}^{-1}.$$

Při této volbě tedy je $a_0 = 2T$, $a_1 = \gamma$, $a_2 = a_3 = \cdots = 0 = b_1 = b_2 = \cdots$ a řešení úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && t \in \mathbb{R},\ x > 0, \\ u(t,0) &= T + \gamma \cos \omega t,\ \ |u(t,\cdot)| \le |T| + |\gamma| && t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

je dáno výrazem

$$u(t,x) = T + \gamma \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x\right) = T + \gamma \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x} \cos \omega\left(t - \sqrt{\frac{1}{2a^2\omega}}\,x\right).$$

Označme

$$A(x) = \gamma \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x}, \qquad \alpha(x) = \sqrt{\frac{1}{2a^2\omega}}\,x.$$

Řešení nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = T + A(x) \cos \omega\big(t - \alpha(x)\big)$$

[6] Při výpočtu používáme vzorce $\cos(\varphi - \operatorname{arctg}\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\cos\varphi + \dfrac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\sin\varphi$.

[7] J. Fourier: *Théorie analytique de la chaleur.* Firmin Didot Père et Fils, Paris 1822.

a interpretovat ho jako šíření teplotních vln v půdě. Přitom $A(x)$ vyjadřuje amplitudu kolísání teploty v hloubce x, $\alpha(x)$ vyjadřuje opožďování $\alpha(x)$ maxim (minim) teplot v hloubce x od příslušných okamžiků na povrchu. Výsledek lze také přepsat pomocí periody $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ kolísání povrchové teploty jako

$$u(t,x) = T + A(x)\cos\frac{2\pi}{\tau}\big(t - \alpha(x)\big);$$

při tomto zápisu je

$$A(x) = \gamma \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\,x}, \qquad \alpha(x) = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\,x.$$

Mění-li se po dlouhou dobu periodicky teplota na povrchu, nastává v půdě kolísání teploty s toutéž periodou. Přitom platí:

1. Amplituda $A(x)$ kolísání teploty v hloubce x klesá exponenciálně s hloubkou; rostou-li hloubky s aritmetickou posloupností, klesají amplitudy s geometrickou posloupností (první Fourierův zákon).
   V hluboké studni nebo v jeskyni je dlouhodobě téměř konstantní teplota přibližně se rovnající průměrné roční teplotě na povrchu.

2. Teplota v půdě kolísá s jistým fázovým zpožděním za kolísáním teploty na povrchu; opožďování $\alpha(x)$ teplotních extrémů v hloubce x je úměrné této hloubce (druhý Fourierův zákon). V hloubce x se teplotní extrém projeví za čas $\alpha(x)$ od jeho výskytu na povrchu, což lze chápat i tak, že teplo se v půdě šíří konstantní rychlostí

$$\frac{x}{\alpha(x)} = \sqrt{2a^2\omega} = 2\sqrt{a^2\frac{\pi}{\tau}}.$$

   Poznamenejme, že tato rychlost má formálně stejné vyjádření, jako rychlost difundující látky vznikající autokatalytickou reakcí (viz str. 96nn), přičemž reakční rychlost odpovídá poloviční frekvenci kolísání teploty.

3. Hloubka pronikání teploty do půdy závisí na periodě kolísání teploty na povrchu. Relativní změna amplitudy v hloubce x je rovna

$$\frac{A(x)}{\gamma} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\,x};$$

   při kolísání povrchové teploty o periodách τ_1 a τ_2 budou hloubky x_1 a x_2, ve kterých dochází ke stejným relativním změnám teploty, v poměru

$$\frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}.$$

   (třetí Fourierův zákon).

Kapitola 5

Eliptické rovnice

5.1 Rovnice ve dvou proměnných

Kanonický tvar eliptické rovnice ve dvou proměnných s konstantními koeficienty je podle 2.1.2

$$u_{xx} + u_{yy} = cu + f(x, y).$$

Pokud je $c = 0$, nazývá se tato rovnice *Poissonova,* pokud je navíc $f \equiv 0$, rovnice se nazývá *Laplaceova.*

Laplaceova rovnice $u_{xx} + u_{yy} = 0$ je „svým způsobem“ rovnicí vlnovou $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. Pokud totiž zavedeme novou „časovou proměnnou“ y vztahem

$$y = \mathrm{i}at,$$

kde i je imaginární jednotka, dostaneme $u_{tt} = -a^2 u_{yy}$ a po dosazení do vlnové rovnice a vykrácení konstatnty a^2 dostaneme rovnici Laplaceovu. Poněvadž jsou tedy Laplaceova a vlnová rovnice formálně identické, můžeme přepsat formuli (3.12) a dostaneme **generické řešení** eliptické rovnice ve tvaru

$$u(x, y) = F(x + \mathrm{i}y) + G(x - \mathrm{i}y).$$

Argumenty funkcí $x + \mathrm{i}y$ a $x - \mathrm{i}y$ jsou čísla komplexně sdružená. Proto můžeme generické řešení Laplaceovy rovnice psát stručně

$$u(x, y) = F(x + \mathrm{i}y), \tag{5.1}$$

kde F je nějaká, obecně komplexní, funkce komplexní proměnné. Teorie Laplaceovy rovnice tedy úzce souvisí s analýzou v komplexním oboru. Tento zajímavý směr však nebudeme v tomto textu dále sledovat.

Laplaceova rovnice má v polárních souřadnicích r, φ tvar

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{5.2}$$

viz Dodatek C.1. V *radiálně symetrickém případě,* tj. když hledaná funkce závisí pouze na průvodiči r, nikoliv na úhlu φ, je $u_{\varphi\varphi} = 0$ a Laplaceova rovnice nabývá tvar

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0.$$

To je obyčejná diferenciální rovnice, kterou snadno vyřešíme dvojí integrací,

$$u(r) = A \ln r + B,$$

kde A, B jsou integrační konstanty. Radiálně symetrická řešení Laplaceovy rovnice jsou tedy konstanta a logaritmus.

5.1.1 Okrajová úloha na obdélníku

Budeme hledat řešení eliptické rovnice s konstantními koeficienty na obdélníku $(0, a) \times (0, b)$,

$$u_{xx} + u_{yy} = cu + f(x, y), \quad 0 < x < a, \ 0 < x < b, \tag{5.3}$$

která splňuje Robinovy okrajové podmínky homogenní

$$\alpha_0 u(0, y) + \beta_0 u_x(0, y) = 0 = \alpha_1 u(a, y) + \beta_1 u_x(a, y) \quad 0 < y < b, \tag{5.4}$$
$$\gamma_0 u(x, 0) + \delta_0 u_y(x, 0) = 0 = \gamma_1 u(x, b) + \delta_1 u_y(x, b) \quad 0 < x < a, \tag{5.5}$$

nebo nehomogenní

$$\alpha_0 u(0, y) + \beta_0 u_y(0, y) = \mu_0(y), \quad \alpha_1 u(a, y) + \beta_1 u_y(a, y) = \mu_1(x), \quad 0 < y < b, \tag{5.6}$$
$$\gamma_0 u(x, 0) + \delta_0 u_y(x, 0) = \nu_0(x), \quad \gamma_1 u(x, b) + \delta_1 u_y(x, b) = \nu_1(x), \quad 0 < x < a, \tag{5.7}$$

kde $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1$ jsou reálné parametry.

Nehomogenní rovnice s homogenními okrajovými podmínkami

Nejprve se podíváme na rovnici (5.3) s homogenními Robinovými okrajovými podmínkami (5.4), (5.5). Podobně jako u metody separace proměnných budeme řešení hledat ve tvaru součinu dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na nezávisle proměnné x a druhá pouze na proměnné y, tedy $u(x, y) = v(x)w(y)$. Navíc budeme požadovat, aby tento součin splňoval dané homogenní okrajové podmínky. Takové vlastnosti mají funkce, které jsou řešením Sturmových-Liouvilleových úloh

$$-v'' + cv = \lambda v, \qquad 0 < x < a, \tag{5.8}$$
$$\alpha_0 v(0) + \beta_0 v'(0) = 0 = \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) \tag{5.9}$$

a

$$-w'' = \kappa w, \qquad 0 < y < b, \tag{5.10}$$
$$\gamma_0 w(0) + \delta_0 w'(0) = 0 = \gamma_1 w(b) + \delta_1 w'(b). \tag{5.11}$$

Každá z těchto úloh má podle B.2 spočetně mnoho řešení v_k, w_l, indexy jsou z nějakých indexových množin $k \in I$, $l \in J$; tento poněkud komplikovaný zápis používáme proto, že v některých situacích je vhodnější vlastní čísla a funkce číslovat od jedničky, v jiných od nuly. Každý součin $v_k w_l$ splňuje okrajové podmínky (5.4) a (5.5) a také libovolný součet takových součinů je splňuje. Řešení úlohy (5.3), (5.4), (5.5) tedy formálně vyjádříme jako dvojnou nekonečnou řadu

$$u(x, y) = \sum_{k \in I, l \in J} A_{kl} v_k(x) w_l(y). \tag{5.12}$$

Pokud taková řada konverguje absolutně a stejnoměrně na oblasti $[0, a] \times [0, b]$, pak uvnitř této oblasti platí

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} - cu &= \\ = \sum_{k \in I, l \in J} A_{kl} \left(v_k'' w_l + v_k w_l''\right) &- \sum_{k \in I, l \in J} c A_{kl} v_k w_l = \sum_{k \in I, l \in J} A_{kl} \left[\left(v_k'' - c v_k\right) w_l + v_k w_l''\right] = \\ &= \sum_{k \in I, l \in J} A_{kl} \left(-\lambda_k v_k w_l - v_k \kappa_l w_l\right) = -\sum_{k \in I, l \in J} A_{kl} \left(\lambda_k + \kappa_l\right) v_k w_l, \end{aligned} \tag{5.13}$$

neboť všechny funkce v_k a w_l jsou řešením rovnic (5.8) a (5.10).

Předpokládejme, že funkce f v rovnici (5.3) je z prostoru $\mathcal{L}^2\big((0, a) \times (0, b)\big)$. To není z hlediska aplikací žádné omezení. Pak funkci $f(\,\cdot\,, y)$ lze pro každé $y \in (0, b)$ vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady vzhledem k orthogonální posloupnosti funkcí $\{v_k\}$ a anologické tvrzení platí i pro funkci $f(x,\cdot)$ a posloupnost $\{w_l\}$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{k\in I}\left(\frac{1}{\|v_k\|^2}\int\limits_0^a f(\xi,y)v_k(\xi)\mathrm{d}\xi\right)v_k(x) = \\ &= \sum_{k\in I}\left[\frac{1}{\|v_k\|^2}\int\limits_0^a \sum_{l\in J}\left(\frac{1}{\|w_l\|^2}\int\limits_0^b f(\xi,\eta)w_l(\eta)\mathrm{d}\eta\right)w_l(y)\mathrm{d}\xi\right]v_k(x) = \\ &= \sum_{k\in I,l\in J}\left(\frac{1}{\|v_k\|^2\|w_l\|^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^b f(\xi,\eta)v_k(\xi)w_l(\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\right)v_k(x)w_l(y). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Výrazy (5.13) a (5.14) dosadíme do řešené rovnice (5.3),

$$\begin{aligned} -\sum_{k\in I,l\in J} A_{kl}\left(\lambda_k+\kappa_l\right)v_k(x)w_l(y) &= \\ = \sum_{k\in I,l\in J}\left(\frac{1}{\|v_k\|^2\|w_l\|^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^b f(\xi,\eta)v_k(\xi)w_l(\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\right)v_k(x)w_l(y). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Porovnáním koeficientů nyní dostaneme, že

$$A_{kl} = \frac{-1}{(\lambda_k+\kappa_l)\|v_k\|^2\|w_l\|^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^b f(\xi,\eta)v_k(\xi)w_l(\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi, \qquad k\in I, l\in J,\ \lambda_k+\kappa_l\neq 0. \tag{5.16}$$

Pokud tedy jsou vlastní čísla λ_k a κ_l úloh (5.8) a (5.10) taková, že $\lambda_k+\kappa_l\neq 0$ pro všechna k,l, pak jsou všechny koeficienty dvojné řady (5.12) jednoznačně určeny nehomogenitou f. Dále, všechny vlastní funkce v_k, w_l jsou goniometrické (viz Tabulku B.1) a tedy omezené. Pokud navíc alespoň dva v každé čtveřici koeficientů $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$ a $\gamma_0,\gamma_1,\delta_0,\delta_1$ jsou nulové, pak snadno vidíme, že výrazy ve jmenovateli zlomku na pravé straně rovnosti (5.16) divergují do nekonečna „zhruba stejně rychle jako druhá mocnina přirozených čísel“. To znamená, že v takovém případě řada (5.12) konverguje absolutně a stejnoměrně.

Závěr z provedených úvah lze formulovat poněkud vágně (ale zřejmým způsobem ho precizovat): úloha (5.3), (5.4), (5.5) může mít řešení ve tvaru sumy součinů dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na nezávisle proměnné x a druhá na y. Takové řešení je dáno řadou (5.12), její koeficienty jsou určeny rovnostmi (5.16), kde λ_k, v_k a κ_l, w_l jsou vlastní čísla a vlastní funkce Sturmových-Liouvilleových úloh (5.8) a (5.10).

Provedená úvaha samozřejmě nic neříká o tom, zda úloha může mít jiná řešení, neříká nic o jednoznačnosti řešení; k tomuto problému se vrátíme v 5.2.1 Pokud se řešení úlohy nepodaří uvedeným způsobem najít, zase to nic nevypovídá o existenci řešení.

Příklad.

Najdeme řešení Poissonovy rovnice na obdélníku $\Omega=(0,a)\times(0,b)$

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y), \quad 0<x<a,\ 0<y<b \tag{5.17}$$

s homogenními okrajovými podmínkami Dirichletovými

$$u(0,y)=u(a,y)=u(x,0)=u(x,b)=0, \quad 0<x<a,\ 0<y<b, \tag{5.18}$$

nebo Neumannovými

$$u_x(0,y)=u_x(a,y)=u_y(x,0)=u_y(x,b)=0, \quad 0<x<a,\ 0<y<b. \tag{5.19}$$

V případě Dirichletových podmínek máme

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \; v_k(x) = \sin\frac{k\pi}{a}x, \; \|v_k\|^2 = \frac{a}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\kappa_l = \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2, \; w_l(y) = \sin\frac{l\pi}{b}y, \; \|w_l\|^2 = \frac{b}{2}, \quad l = 1, 2, 3, \dots,$$

takže

$$A_{kl} = \frac{-1}{\left(\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2\right)\frac{a}{2}\frac{b}{2}} \iint\limits_\Omega f(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi}{a}\xi\,\sin\frac{l\pi}{b}\eta\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta =$$
$$= \frac{-4ab}{\pi^2\left(b^2k^2 + a^2l^2\right)} \iint\limits_\Omega f(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi}{a}\xi\,\sin\frac{l\pi}{b}\eta\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

Řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici na obdélníku (5.17), (5.18) je tedy dáno rovností

$$u(x,y) = -\frac{4ab}{\pi^2}\iint\limits_\Omega f(\xi,\eta)\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{1}{b^2k^2 + a^2l^2}\sin\frac{k\pi}{a}x\,\sin\frac{l\pi}{b}y\,\sin\frac{k\pi}{a}\xi\,\sin\frac{l\pi}{b}\eta\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

U Neumannových okrajových podmínek je situace poněkud komplikovanější. Vlastní čísla a vlastní funkce s příslušnými normami jsou

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \; v_k(x) = \cos\frac{k\pi}{a}x, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \|v_0\|^2 = a, \; \|v_k\|^2 = \frac{a}{2}, \; k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\kappa_l = \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2, \; w_l(y) = \cos\frac{l\pi}{b}y, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad \|w_0\|^2 = b, \; \|w_l\|^2 = \frac{b}{2}, \; l = 1, 2, 3, \dots.$$

To znamená, že $\lambda_0 + \kappa_0 = 0$ a koeficient A_{00} nelze podle (5.16) vyjádřit. Ale rovnost (5.15) můžeme přepsat do tvaru

$$0\cdot A_{00} - \sum_{k=1}^{\infty} A_{k0}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\cos\frac{k\pi}{a}x - \sum_{l=1}^{\infty} A_{0l}\left(\frac{l\pi}{b}\right)^2\cos\frac{l\pi}{b}y -$$
$$- \sum_{k,l=1}^{\infty} A_{kl}\left(\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2\right)\cos\frac{k\pi}{a}x\,\cos\frac{l\pi}{b}y =$$
$$= \frac{4}{ab}\sum_{k,l=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi}{a}x\,\cos\frac{l\pi}{b}y\iint\limits_\Omega f(\xi,\eta)\cos\frac{k\pi}{b}\xi\,\cos\frac{l\pi}{b}\eta\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta +$$
$$+ \frac{2}{ab}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi}{a}x\iint\limits_\Omega f(\xi,\eta)\cos\frac{k\pi}{a}\xi\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \sum_{l=1}^{\infty}\cos\frac{l\pi}{b}y\iint\limits_\Omega f(\xi,\eta)\cos\frac{l\pi}{b}\eta\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right) +$$
$$+ \frac{1}{ab}\iint\limits_\Omega f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

Z tohoto vyjádření plyne, že pokud

$$\iint\limits_\Omega f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = 0, \tag{5.20}$$

pak koeficient A_{00} může být libovolný.

Pokud je splněna podmínka (5.20), pak má Neumannova úloha pro Poissonovu rovnici nekonečně mnoho řešení tvaru

$$u(x,y) = C - \frac{4ab}{\pi^2} \iint\limits_{\Omega} f(\xi,\eta) \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^2k^2} \cos\frac{k\pi}{a}x \cos\frac{k\pi}{a}\xi + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{a^2l^2} \cos\frac{l\pi}{b}y \cos\frac{l\pi}{b}\eta + \right.$$

$$\left. + \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{b^2k^2 + a^2l^2} \cos\frac{k\pi}{a}x \cos\frac{l\pi}{b}y \cos\frac{k\pi}{a}\xi \cos\frac{l\pi}{b}\eta \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta,$$

kde C je libovolná konstanta. Pokud podmínka (5.20) splněna není, Neumannova úloha pro Poissonovu rovnici nemá řešení ve tvaru sumy součinů dvou funkcí jedné proměnné. ■

Homogenní rovnice s jednou homogenní okrajovou podmínkou

Uvažujme úlohu pro homogenní eliptickou rovnici

$$u_{xx} + u_{yy} = cu, \quad 0 < x < a, \ 0 < y < b, \tag{5.21}$$

s jednou Robinovou okrajovou podmínkou homogenní (5.4) a jednou nehomogenní (5.7). Úlohu budeme řešit metodou separace proměnných, tj. řešení budeme hledat ve tvaru součinu dvou funkcí jedné proměnné, $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Po dosazení do rovnice dostaneme

$$\frac{X''}{X} + c = -\frac{Y''}{Y}. \tag{5.22}$$

Poněvadž levá strana této rovnosti nezávisí na proměnné y, pravá strana nezávisí na proměnné x, musí se obě rovnat nějaké konstantě. Poněvadž okrajová podmínka je homogenní pro funkci proměnné x, potřebujeme dostat Sturmovu-Liouvilleovu úlohu pro funkci X. Proto jako konstantu, jíž jsou rovny obě strany rovnosti (5.22), volíme $-\lambda$, tedy tuto rovnost přepíšeme na tvar

$$\frac{X''}{X} - c = -\frac{Y''}{y} = -\lambda. \tag{5.23}$$

Odtud a z okrajové podmínky (5.4) dostaneme Sturmovu-Liouvilleovu úlohu

$$\begin{aligned} -X'' + cX &= \lambda X, & 0 < x < a, \\ \alpha_0 X(0) + \beta_0 x'(0) &= 0 = \alpha_1 X(a) + \beta_1 x'(a), \end{aligned}$$

která má vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ a příslušné vlastní funkce $v_1, v_2, v_3, \ldots$. Přitom $c \le \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \cdots$. Vlastní čísla jsou tedy od jistého indexu kladná. Mohou ale také existovat vlastní čísla záporná a jedno vlastní číslo nulové. Označme

$$I_+ = \{k : \lambda_k > 0\}, \quad I_0 = \{k : \lambda_k = 0\}, \quad I_- = \{k : \lambda_k < 0\};$$

množina I_0 je jednoprvková nebo prázdná, množina I_+ je konečná nebo prázdná. Pro další výpočty budeme předpokládat, že $I_- \neq \emptyset$ a existuje index $k_0 \in I_0$. Postup hledání řešení v ostatních případech je stejný, jen poněkud jednodušší.

Nalezená vlastní čísla dosadíme do druhé části rovnosti (5.23) a dostaneme obyčejné lineární rovnice druhého řádu

$$Y_k'' - \lambda_k Y_k = 0, \quad k \in I_+ \cup I_0 \cup I_-.$$

Obecné řešení těchto rovnic je

$$Y_1(y) = \begin{cases} A_k \cos\sqrt{|\lambda_1|}\, y + B_k \sin\sqrt{|\lambda_1|}\, y, & k \in I_-, \\ A_{k_0} + B_{k_0} y, \\ A_k \cosh\sqrt{\lambda_1}\, y + B_k \sinh\sqrt{\lambda_1}\, y, & k \in I_+. \end{cases}$$

Podobně jako při řešení hyperbolických a parabolických rovnic metodou separace proměnných nyní napíšeme řešení úlohy (5.21), (5.5), (5.7) ve tvaru nekonečné řady se zatím neurčenými koeficienty

$$u(x,y) = \sum_{k\in I_+} \left(A_k \cos\sqrt{|\lambda_k|}\, y + B_k \sin\sqrt{|\lambda_k|} y \right) v_k(x) + (A_{k_0} + B_{k_0} y) v_{k_0}(x) +$$
$$+ \sum_{k\in I_-} \left(A_k \cosh\sqrt{\lambda_k}\, y + B_k \sinh\sqrt{\lambda_k}\, y \right) v_k(x).$$

Tato funkce splňuje rovnici (5.21) a homogenní okrajovou podmínku (5.4). Derivace podle proměnné y je dána vztahem

$$u_y(x,y) = \sum_{k\in I_+} \sqrt{|\lambda_k|} \left(-A_k \sin\sqrt{|\lambda_k|}\, y + B_k \cos\sqrt{|\lambda_k|} y \right) v_k(x) + B_{k_0} v_{k_0}(x) +$$
$$+ \sum_{k\in I_-} \sqrt{\lambda_k} \left(A_k \sinh\sqrt{\lambda_k}\, y + B_k \cosh\sqrt{\lambda_k}\, y \right) v_k(x).$$

Vyjádření funkce u a její derivace u_y dosadíme do nehomogenní podmínky (5.7) a přitom funkce ν_0, ν_1 rozvineme do Fourierových řad s bázovými funkcemi $v_1, v_2, v_3, \ldots$. Dostaneme

$$(\gamma_0 A_{k_0} + \delta_0 B_{k_0}) v_{k_0}(x) + \sum_{k\in I+\cup I_-} \left(\gamma_0 A_k + \delta_0 \sqrt{|\lambda_k|}\, B_k \right) v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_k(x)$$

a

$$\sum_{k\in I_-} \left(\gamma_1 (A_k \cos\sqrt{|\lambda_k|}\, b + B_k \sin\sqrt{|\lambda_k|}\, b) - \delta_1 \sqrt{|\lambda_k|}\, (A_1 \sin\sqrt{|\lambda_k|}\, b - B_k \cos\sqrt{|\lambda_k|}\, b) \right) v_k(x) +$$
$$+ (\gamma_1 A_{k_0} + \delta_1 B_{k_0} b) v_{k_0}(x) +$$
$$+ \sum_{k\in I_+} \left(\gamma_1 (A_k \cosh\sqrt{\lambda_k}\, b + B_k \sinh\sqrt{\lambda_k}\, b) + \delta_1 \sqrt{\lambda_k}\, (A_1 \sinh\sqrt{\lambda_k}\, b + B_k \cosh\sqrt{\lambda_k}\, b) \right) v_k(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} D_k v_k(x),$$

kde

$$C_k = \frac{1}{\|v_k\|^2} \int_0^a \nu_0(\xi) v_k(\xi) \mathrm{d}\xi, \quad D_k = \frac{1}{\|v_k\|^2} \int_0^a \nu_1(\xi) v_k(\xi) \mathrm{d}\xi, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Z jednoznačnosti koeficientů Fourierových řad dostaneme soustavu algebraických lineárních rovnic pro koeficienty $A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, B_3, \ldots$:

$$\gamma_0 A_{k_0} + \delta_0 B_{k_0} = C_{k_0},$$
$$\gamma_0 A_k + \delta_0 |\lambda_k| B_k = C_k, \quad k \in I_- \cup I_+$$
$$\left(\gamma_1 \cos\sqrt{|\lambda_k|}\, b - \delta_1 \sqrt{|\lambda_k|} \sin\sqrt{|\lambda_k|}\, b \right) A_k + \left(\gamma_1 \sin\sqrt{|\lambda_k|}\, b + \delta_1 \sqrt{|\lambda_k|} \cos\sqrt{|\lambda_k|}\, b \right) B_k = D_k, \quad k \in I_-$$
$$\gamma_1 A_{k_0} + \delta_{k_0} b B_{k_0} = D_{k_0},$$
$$\left(\gamma_1 \cosh\sqrt{\lambda_k}\, b + \delta_1 \sqrt{\lambda_k} \sinh\sqrt{\lambda_k}\, b \right) A_k + \left(\gamma_1 \sinh\sqrt{\lambda_k}\, b + \delta_1 \sqrt{\lambda_k} \cosh\sqrt{\lambda_k}\, b \right) B_k = D_k, \quad k \in I_+$$

Z lineární algebry víme, že tato soustava může být jednoznačně řešitelná, mít nekonečně mnoho řešení nebo být neřešitelná. A také víme, za jakých podmínek k tomu dojde.

Z provedených výpočtů tedy vidíme, že pro úlohu (5.21), (5.4), (5.7) metoda separace proměnných může – ale nemusí – vést k řešení, nebo může najít nekonečně mnoho řešení.

Příklad.

Budeme řešit Neumannovu úlohu pro Laplaceovu rovnici na obdélníku

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, && 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u_x(0,y) = 0 &= u_x(a,y), && 0 < y < b, \\ u_y(x,0) = \nu_0(x),\ & u_y(x,b) = \nu_1(x), && 0 < x < y. \end{aligned}$$

V tomto případě separace proměnných $u(x,y) = X(x)Y(y)$ vede na Sturmovu-Liouvilleovu úlohu

$$\begin{aligned} -X'' &= \lambda X, && 0 < x < a, \\ X'(0) = 0 &= X'(a), \end{aligned}$$

která má vlastní hodnoty

$$0 \text{ a } \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2,\ k = 1,2,3,\dots$$

a příslušné vlastní funkce

$$v_0(x) = 1,\ v_k(x) = \cos\frac{k\pi}{a}x,\ k = 1,2,3,\dots.$$

Pro funkce Y tak dostáváme rovnice

$$Y_0'' = 0, \quad Y_k'' = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k,\ k = 1,2,3,\dots,$$

které mají řešení

$$Y_0(y) = A_0 + B_0 y, \quad Y_k(y) = A_k \mathrm{e}^{\frac{k\pi}{a}y} + B_k \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{a}y},\ k = 1,2,3,\dots.$$

Obecné řešení dané rovnice s homogenní Neumannovou podmínkou je tedy dáno řadou

$$u(x,y) = A_0 + B_0 y + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \mathrm{e}^{\frac{k\pi}{a}y} + B_k \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{a}y}\right)\cos\frac{k\pi}{a}x. \tag{5.24}$$

Pak je

$$u_y(x,y) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_k \mathrm{e}^{\frac{k\pi}{a}y} - B_k \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{a}y}\right)\cos\frac{k\pi}{a}x$$

a dosazením do zbývajících okrajových podmínek odvodíme rovnosti

$$B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_k - B_k\right)\cos\frac{k\pi}{a}x = \nu_0(x), \quad B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_k \mathrm{e}^{\frac{k\pi}{a}b} - B_k \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{a}b}\right)\cos\frac{k\pi}{a}x = \nu_1(x).$$

Z těchto rovností dostaneme

$$B_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \nu_0(\xi)\mathrm{d}\xi \quad \text{a současně} \quad B_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \nu_1(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Odtud vidíme, že úloha může mít řešení pouze tehdy, když platí $\int_0^a \nu_0(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_0^a \nu_1(\xi)\mathrm{d}\xi$. Dále dostáváme vztahy

$$\frac{k\pi}{a}\left(A_k - B_k\right) = \frac{2}{a}\int_0^a \nu_0(\xi)\cos\frac{k\pi}{a}\xi\mathrm{d}\xi,$$

$$\frac{k\pi}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi}{a}b} - B_k e^{-\frac{k\pi}{a}b}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a \nu_1(\xi)\cos\frac{k\pi}{a}\xi \mathrm{d}\xi,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

a z nich

$$A_k = \frac{1}{k\pi\sinh\frac{k\pi b}{a}}\int_0^a \left(\nu_1(\xi) - e^{-\frac{k\pi}{a}b}\nu_0(\xi)\right)\cos\frac{k\pi}{a}\xi \mathrm{d}\xi,$$

$$B_k = \frac{1}{k\pi\sinh\frac{k\pi b}{a}}\int_0^a \left(\nu_1(\xi) - e^{\frac{k\pi}{a}b}\nu_0(\xi)\right)\cos\frac{k\pi}{a}\xi \mathrm{d}\xi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Konstanta A_0 zůstává neurčena.

Vypočítané hodnoty dosadíme do rovnosti (5.24), upravíme a dostaneme řešení dané úlohy

$$u(x,y) = c + \frac{1}{a}\int_0^a \left(y\nu_1(\xi) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_1(\xi)\cosh\frac{k\pi}{a}y - \nu_0(\xi)\cosh\frac{k\pi}{a}(y-b)}{\sinh\frac{k\pi b}{a}}\cos\frac{k\pi}{a}\xi\ \cos\frac{k\pi}{a}x\right)\mathrm{d}\xi,$$

kde c je libovolná konstanta. Daná Neumannova úloha pro Laplaceovu rovnici je řešitelná pouze za předpokladu

$$\int_0^a \nu_0(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_0^a \nu_1(\xi)\mathrm{d}\xi;$$

pak má ale nekonečně mnoho řešení, která se liší o konstantu. ■

Analogicky můžeme řešit úlohu pro homogenní eliptickou rovnici na obdélníku, kde homogenní ohrajové podmínky jsou kladeny na druhou nezávisle proměnnou, tedy úlohu pro rovnici (5.21) s okrajovými podmínkami (5.6), (5.5). Řešení opět hledáme ve tvaru $u(x,y) = X(x)Y(y)$, ale po separaci proměnných píšeme

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + c = \lambda.$$

Homogenní rovnice s nehomogenními okrajovými podmínkami

Řešení homogenní eliptické rovnice na obdélníku (5.21) s obecnými Robinovými okrajovými podmínkami můžeme hledat jako součet řešení úloh (5.21), (5.4), (5.7) a (5.21), (5.6), (5.5).

Příklad.

Najdeme řešení Laplaceovy rovnice na obdélníku $\Omega = (0,a)\times(0,b)$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b \tag{5.25}$$

s Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$u(0,y) = \mu_0(y),\ u(a,y) = \mu_1(y), \quad 0 < y < b, \tag{5.26}$$
$$u(x,0) = \nu_0(x),\ u(x,b) = \nu_1(y), \quad 0 < x < a. \tag{5.27}$$

Aby tato úloha mohla mít klasické řešení, musí funkce $\mu_0, \mu_1, \nu_0, \nu_1$ být spojité a splňovat podmínky konzistence

$$\mu_0(0) = \nu_0(0),\ \nu_0(a) = \mu_1(0),\ \mu_1(b) = \nu_1(a),\ \nu_1(0) = \mu_0(b).$$

Její řešení rozdělíme na řešení dvou „sub-úloh“.

Řešení první z nich,

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= 0, && 0 < x < a,\ 0 < y < b,\\ u_1(0,y) = \mu_0(y),\ u_1(a,y) &= \mu_1(y), && 0 < y < b,\\ u_1(x,0) = 0 &= u_1(x,b), && 0 < x < a \end{aligned}$$

hledáme ve tvaru součinu dvou funkcí jedné proměnné, z nichž první závisí pouze na proměnné x, druhá pouze na proměnné y, $u_1(x,y) = X(x)Y(y)$. Po dosazení do rovnice a jednoduché úpravě dostaneme vztah

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Poněvadž homogenní podmínky mají být splněny na okrajích oboru proměnné y, volíme jako společnou hodnotu obou stran předchozí rovnosti hodnotu λ. Dostaneme tak Sturmovu-Liouvilleovu úlohu

$$\begin{aligned} -Y'' &= \lambda Y, \qquad 0 < y < b,\\ Y(0) &= 0 = Y(b), \end{aligned}$$

která má vlastní čísla a vlastní funkce

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, \quad v_k(y) = \sin\frac{k\pi}{b}y, \qquad k = 1,2,3,\ldots.$$

Tato vlastní čísla dosadíme do rovnosti pro funkci X, tyto funkce rozlišíme indexy a dostaneme lineární homogenní obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$X_k'' - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 X_k = 0,$$

které mají obecné řešení

$$X_k(x) = A_k \mathrm{e}^{\frac{k\pi}{b}x} + B_k \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{b}x},$$

kde A_k, B_k jsou libovolné konstanty. Z principu superpozice plyne, že řešení úlohy můžeme vyjádřit řadou

$$u_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \mathrm{e}^{\frac{k\pi}{b}x} + B_k \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{b}x}\right)\sin\frac{k\pi}{b}y.$$

Funkce μ_0 a μ_1 vyjádříme také jako Fourierovy řady vzhledem k bázi $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\mu_0(y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi}{b}y, \quad \text{kde } C_k = \frac{2}{b}\int_0^b \mu_0(\eta)\sin\frac{k\pi}{b}\eta\,\mathrm{d}\eta, \quad k = 1,2,3,\ldots,$$

$$\mu_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\frac{k\pi}{b}y, \quad \text{kde } D_k = \frac{2}{b}\int_0^b \mu_0(\eta)\sin\frac{k\pi}{b}\eta\,\mathrm{d}\eta, \quad k = 1,2,3,\ldots.$$

Nalezená formální vyjádření funkcí u_1, μ_0 a μ_1 dosadíme do nehomogenních podmínek

$$u_1(0,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + B_k)\sin\frac{k\pi}{b}y = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi}{b}y,$$

$$u_1(a,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \mathrm{e}^{\frac{k\pi}{b}a} + B_k \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{b}a}\right)\sin\frac{k\pi}{b}y = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\frac{k\pi}{b}y$$

a dostaneme soustavy lineárních algebraických rovnic pro zatím neurčené koeficienty A_k, B_k,

$$\begin{aligned} A_k + \qquad\quad B_k &= C_k, \\ \mathrm{e}^{\frac{k\pi}{b}a} A_k + \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{b}a} B_k &= D_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

které mají řešení

$$A_k = \frac{1}{2\sinh \frac{k\pi}{b} a}\left(D_k - C_k \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{b}a}\right), \quad B_k = \frac{1}{2\sinh \frac{k\pi}{b} a}\left(C_k \mathrm{e}^{\frac{k\pi}{b}a} - D_k\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Nyní nalezené výrazy dosadíme do formálního vyjádření funkce u_1 a po (snadné, ale poněkud pracné) úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = -\frac{1}{b}\int_0^b \mu_0(\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{2k\pi}{b}(x-a)}}{\sinh \frac{k\pi}{a} b} \sin \frac{k\pi}{b} y \sin \frac{k\pi}{b}\eta \,\mathrm{d}\eta + \\ + \frac{1}{b}\int_0^b \mu_1(\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{b}x}}{\sinh \frac{k\pi}{a} b} \sin \frac{k\pi}{b} y \sin \frac{k\pi}{b}\eta \,\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

Druhou „sub-úlohu“

$$\begin{aligned} \Delta u_2 &= 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u_2(0, y) = 0 = u_2(a, y) &= \mu_1(y), & 0 < y < b, \\ u_2(x, 0) = \nu_0(x),\ u_2(x, b) &= \nu_1(y), & 0 < x < a, \end{aligned}$$

řešíme stejným způsobem. Dostaneme

$$\begin{aligned} u_2(x, y) = -\frac{1}{a}\int_0^a \nu_0(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{2k\pi}{a}(y-b)}}{\sinh \frac{k\pi}{b} a} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{a}\xi \,\mathrm{d}\eta + \\ + \frac{1}{a}\int_0^a \nu_1(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{a}y}}{\sinh \frac{k\pi}{b} a} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{a}\xi \,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Řešení dané úlohy je součtem funkcí u_1 a u_2. ■

Uvedený postup však nevede k cíli vždy. V takovém případě lze řešení úlohy (5.21), (5.6), (5.6) hledat ve tvaru $u(x, y) = U(x, y) + w(x, y)$, kde funkce U splňuje nehomogenní okrajové podmínky (5.6), (5.7) a funkce w splňuje nehomogenní rovnici

$$w_{xx} + w_{yy} = cw + cU(x, y) - U_{xx}(x, y) - U_{yy}(x, y), \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b$$

s homogenními okrajovými podmínkami (5.4), (5.5). To je úloha již řešená.

5.1.2 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici na kruhu

Jedná se o okrajovou úlohu

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 < R^2, \tag{5.28}$$
$$u(x, y) = g(x, y), \quad x^2 + y^2 = R^2. \tag{5.29}$$

Přitom předpokládáme, že $R > 0$ a funkce g je spojitá.

Úlohu transformujeme do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Rovnice (5.28) a oblast, na které má být splněna se transformují na tvar

$$u_{rr} + \tfrac{1}{r}u_r + \tfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < r < R, \ \varphi \in \mathbb{R}. \tag{5.30}$$

Nezávisle proměnná r nabývá hodnot z ohraničeného intervalu. Ten má samozřejmě dva okraje, takže z okrajové podmínky (5.29) v kartézských souřadnicích potřebujeme pro první polární souřadnici získat podmínky dvě. Označme $f(\varphi) = g(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$. Z podmínky (5.29) bezprostředně dostaneme

$$u(R,\varphi) = f(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{5.31}$$

Hodnota funkce $u = u(r,\varphi)$ nemůže pro r v pravém okolí nuly záviset na úhlu φ a samozřejmě musí být konečná. Z této úvahy dostaneme podmínku

$$\lim_{r\to 0+} u(r,\varphi) = const \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{5.32}$$

Při pevné hodnotě r nesmí hodnota funkce $u = u(r,\varphi)$ záviset na tom, kolikrát počátek oběhneme, přesněji řečeno, funkce $u = u(r,\varphi)$ musí být 2π-periodická. Dostáváme tak ještě periodickou podmínku

$$u(r,\varphi) = u(r,\varphi + 2\pi), \quad 0 < r \le R, \ \varphi \in \mathbb{R}. \tag{5.33}$$

Řešená úloha (5.28), (5.29)se tedy transformuje na úlohu (5.30), (5.31), (5.32), (5.33).

Řešení rovnice (5.30) budeme hledat ve tvaru součinu funkcí, z nichž jedna závisí pouze na proměnné r a druhá pouze na proměnné φ, tedy

$$u(r,\varphi) = X(r)\Phi(\varphi).$$

Po dosazení do rovnice (5.30) dostaneme

$$X''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}X'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}X(r)\Phi''(\varphi) = 0$$

a po vynásobení výrazem $\dfrac{r^2}{X(r)\Phi(\varphi)}$ a jednoduché úpravě

$$r^2\frac{X''(r)}{X(r)} + r\frac{X'(r)}{X(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}. \tag{5.34}$$

Výraz na levé straně závisí pouze na proměnné r, výraz na pravé straně pouze na proměnné φ a to znamená, že oba výrazy jsou rovny nějaké konstantě. Poněvadž z odvozených okrajových podmínek je homogenní ta periodická pro proměnnou φ, potřebujeme jako samoadjungovanou rovnici pro funkci $\Phi = \Phi(\varphi)$. Tato funkce je tedy řešením okrajové úlohy s periodickou podmínkou

$$\begin{aligned} -\Phi'' &= \lambda\Phi, && \phi \in \mathbb{R},\\ \Phi(\varphi) &= \Phi(\varphi + 2\pi), && \phi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Podle Příkladu 2) v B.2 má tato úloha netriviální řešení pouze pro vlastní čísla $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Toto řešení je

$$\Phi_n(\varphi) = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Získané hodnoty $\lambda_n = n^2$ dosadíme do relace (5.34) a příslušné funkce X rozlišíme indexy. Dostaneme tak rovnici

$$r^2X_n''(r) + rX_n'(r) - n^2X_n(r) = 0.$$

Jedná se o Eulerovu rovnici, která má řešení[1]

$$X_n(r) = \begin{cases} c_0 + d_0 \ln r, & \text{pro } n = 0, \\ c_n r^n + d_n r^{-n}, & \text{pro } n > 0. \end{cases}$$

Kdyby pro nějaké $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ bylo $d_n \neq 0$, pak by $\lim\limits_{r\to 0+} |X_n(r)| = \infty$ a nemohla by být splněna podmínka (5.32). Je tedy $d_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ a

$$X_n(r) = c_n r^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Obecné řešení úlohy (5.30), (5.33), (5.32) je lineární kombinací součinů funkcí $\Phi_n = \Phi_n(\varphi)$ a $X_n = X_n(r)$, tj.

$$u(r, \varphi) = a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right),$$

při označení $A_0 = 2a_0 c_0$, $A_n = a_n c_n$, $B_n = b_n c_n$ dostaneme

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right), \tag{5.35}$$

Takto vyjádřenou funkci u dosadíme do podmínky (5.31):

$$u(R, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = f(\varphi).$$

Dostáváme tedy funkci f ve tvaru formální Fourierovy řady, takže její koeficienty jsou dány integrály

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int\limits_0^{2\pi} f(\sigma) \cos n\sigma \mathrm{d}\sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \qquad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int\limits_0^{2\pi} f(\sigma) \sin n\sigma \mathrm{d}\sigma, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Dosadíme je do předchozí řady:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\sigma) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos n\sigma \cos n\varphi + \sin n\sigma \sin n\varphi)\right) \mathrm{d}\sigma =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\sigma) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\sigma - \varphi)\right) \mathrm{d}\sigma.$$

---

[1] Zavedeme substituci $s = \ln r$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} X_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X_n \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X_n, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} X_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X_n\right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X_n + \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} X_n,$$

po dosazení

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} X_n - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X_n + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X_n - n^2 X = 0$$

a po úpravě

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} X_n - n^2 X_n = 0.$$

Obecné řešení této lineární rovnice druhého řádu s konstatntními koeficienty je

$$X_n(s) = \begin{cases} c_0 + d_0 s, & \text{pro } n = 0, \\ c_n \mathrm{e}^{ns} + d_n \mathrm{e}^{-ns}, & \text{pro } n > 0. \end{cases}$$

Integrovanou řadu lze explicitně sečíst[2] a tak dostaneme řešení transformované úlohy (5.30), (5.31), (5.32), (5.33) ve tvaru

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\sigma,\ \text{pro } r<R, \qquad u(r,\varphi)=f(\varphi),\ \text{pro } r=R. \tag{5.36}$$

Výraz

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\sigma \tag{5.37}$$

se nazývá *Poissonův integrál*, výraz

$$K(r,\varphi,R,\sigma) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2}$$

se nazývá *Poissonovo jádro*.

Nakonec se vrátíme k původním proměnným, tj. provedeme zpětnou transformaci

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pak je

$$\begin{aligned} R^2 - 2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2 &= R^2-2Rr(\cos\sigma\cos\varphi+\sin\sigma\sin\varphi)+r^2 = \\ &= x^2+y^2-2R(x\cos\sigma+y\sin\sigma)+R^2(\cos^2\sigma+\sin^2\sigma) = (x-R\cos\sigma)^2+(y-R\sin\sigma)^2. \end{aligned}$$

Řešení úlohy (5.28), (5.29) je tedy

$$u(x,y) = \frac{R^2-x^2-y^2}{2\pi R}\int_0^{2\pi} g(R\cos\sigma, R\sin\sigma)\frac{R\mathrm{d}\sigma}{(x-R\cos\sigma)^2+(y-R\sin\sigma)^2}. \tag{5.38}$$

Hodnoty integrovaného výrazu jsou definovány na hraniční kružnici se středem v počátku a poloměrem R, výraz $R\mathrm{d}\sigma$ je délkovým elementem oblouku této kružnice. To znamená, že integrál je

---

[2] Výraz $\cos n(\sigma-\varphi)$ je reálnou částí komplexního čísla $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\sigma-\varphi)}$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\sigma-\varphi)$$

je reálnou částí výrazu

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\sigma-\varphi)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R}\right)^n = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R}\frac{1}{1-\dfrac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R}} = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}} = \\ &= \frac{r(\cos(\sigma-\varphi)+\mathrm{i}\sin(\sigma-\varphi))}{R-r\cos(\sigma-\varphi)-\mathrm{i}r\sin(\sigma-\varphi)} = \frac{r(\cos(\sigma-\varphi)+\mathrm{i}\sin(\sigma-\varphi))(R-r\cos(\sigma-\varphi)+\mathrm{i}r\sin(\sigma-\varphi))}{(R-r\cos(\sigma-\varphi))^2+r^2\sin^2(\sigma-\varphi)}. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\sigma-\varphi) &= \frac{1}{2}+\frac{Rr\cos(\sigma-\varphi)-r^2\cos^2(\sigma-\varphi)-r^2\sin^2(\sigma-\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2\cos^2(\sigma-\varphi)+r^2\sin^2(\sigma-\varphi)} = \\ &= \frac{1}{2}+\frac{Rr\cos(\sigma-\varphi)-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2} = \frac{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2+2Rr\cos(\sigma-\varphi)-2r^2}{2(R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2)} = \\ &= \frac{R^2-r^2}{2(R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2)}. \end{aligned}$$

křivkovým integrálem a proto můžeme zjednodušit jeho zápis. Označíme $\boldsymbol{x} = (x, y)$, $S^R_{(0,0)}$ kružnici se středem v počátku a poloměrem R, $\boldsymbol{y}$ bod na této kružnici a $\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}$ délkový element této kružnice. Výsledek lze nyní zapsat pomocí křivkového integrálu

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{R^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2}{2\pi R} \oint\limits_{S^R_{(0,0)}} g(\boldsymbol{y}) \frac{\mathrm{d}s_{\boldsymbol{y}}}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2}. \tag{5.39}$$

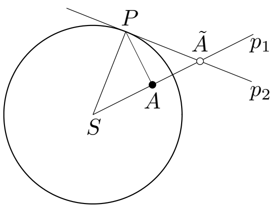
Tato formule se nazývá *Poissonův vzorec.*

V úloze (5.28), (5.29) jsme hledali řešení Laplaceovy rovnice uvnitř kruhu, obecně uvnitř nějaké množiny $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Proto se taková úloha nazývá *vnitřní Dirichletova úloha.* Podívejme se také na úlohu *vnější,* tedy úlohu

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 > R^2, \tag{5.40}$$
$$u(x, y) = g(x, y), \quad x^2 + y^2 = R^2. \tag{5.41}$$

Abychom mohli využít již dosažené výsledky, uděláme „geometrickou odbočku“.

Kruhová inverze



Jedná se o zobrazení, které bodu uvnitř kružnice přiřadí bod vně téže kružnice, v nějakém smyslu symetrický podle ní. Uvažujme kružnici se středem S o poloměru R a v jejím vnitřku bod A. Sdružený bod $\tilde{A}$ leží na přímce $p_1 = \overline{SA}$ spojující střed kružnice a bod A. Konstruujeme ho tak, že v bodě A vztyčíme kolmici k přímce p_1 a v jejím (libovolném) průsečíku P s kružnicí sestrojíme tečnu p_2 ke kružnici. Průsečík této tečny a přímky $\overline{SA}$ je bod $\tilde{A}$.

Označíme-li nyní r délku úsečky SA a $\tilde{r}$ délku úsečky $S\tilde{A}$, platí podle Eukleidovy věty

$$r\tilde{r} = R^2, \quad \text{tedy} \quad \tilde{r} = \frac{R^2}{r}, \; r = \frac{R^2}{\tilde{r}}. \tag{5.42}$$

Odtud vidíme, že pokud bod uvnitř kružnice se středem v počátku a s poloměrem R má polární souřadnice r, φ, pak sdružený bod má souřadnice $\tilde{r}, \varphi$.

Transformujme Laplaceův operátor v polárních souřadnicící r, φ

$$\Delta_{r,\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

do souřadnic $\tilde{r}, \varphi$ daných transformačním vztahem (5.42). Platí

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}}\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{R^2}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial r} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(-\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\frac{2r}{R^2}\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) = \left(\frac{r}{R}\right)^4 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2r^3}{R^4}\frac{\partial}{\partial r},$$

takže

$$\begin{aligned}\Delta_{\tilde{r},\varphi} u = \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= \left(\frac{r}{R}\right)^4 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2r^3}{R^4}\frac{\partial u}{\partial r} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{r}{R^2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \\ &= \left(\frac{r}{R}\right)^4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) = \left(\frac{r}{R}\right)^4 \Delta_{r,\varphi} u.\end{aligned}$$

To znamená, že funkce u splňuje Laplaceovu rovnici uvnitř kruhu právě tehdy, když její „kruhově inverzní obraz“ splňuje Laplaceovu rovnici vně kruhu.

Nyní můžeme řešení vnější Dirichletovy úlohy na kruhu (5.40), (5.41) zapsat pomocí formulí (5.36) a (5.38), v nichž proměnné zaměníme jejich obrazy v kruhové inverzi. Řešení vnější Dirichletovy úlohy na kruhu v polárních souřadnicích je

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sigma)\frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2Rr\cos(\sigma-\varphi) + r^2}\,\mathrm{d}\sigma,\ \text{pro } r > R, \qquad u(r,\varphi) = f(\varphi),\ \text{pro } r = R$$

a v kartézských souřadnicích

$$u(x,y) = \frac{x^2+y^2-R^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{g(R\cos\sigma, R\sin\sigma)}{(x-R\cos\sigma)^2+(y-R\sin\sigma)^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

5.1.3 Jednoduché harmonické funkce

V oddílu 5.1.2 jsme odvodili, že řešení Laplaceovy rovnice na kruhu má v polárních souřadnicích tvar (5.35). Je to lineární kombinace funkcí

$$r^n\cos n\varphi, \quad n = 0,1,2,\dots \quad \text{a} \quad r^n \sin n\varphi, \quad n = 1,2,3,\dots. \tag{5.43}$$

Skutečnost, že jsme řešili úlohu na kruhu není podstatná. Snadno se přesvědčíme, že všechny tyto funkce jsou řešením Laplaceovy rovnice v polárních souřadnicích

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0. \tag{5.44}$$

Funkce (5.43), které také můžeme vyjádřit jako polynomy v kartézských souřadnicích, se nazývají *jednoduché harmonické funkce*. Několik prvních jednoduchých harmonických funkcí je uvedeno v následující tabulce:

$u(r,\varphi)$	1	$r\cos\varphi$	$r\sin\varphi$	$r^2\cos 2\varphi$	$r^2\sin 2\varphi$	$r^3\cos 3\varphi$	$r^3\sin 3\varphi$	$\dots$
$u(x,y)$	1	x	y	x^2-y^2	$2xy$	x^3-3xy^2	$3x^2y-y^3$	$\dots$

Jednoduché harmonické funkce lze někdy využít k řešení úloh pro Laplaceovu rovnici na omezené oblasti. Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená oblast (souvislá množina s neprázdným vnitřkem) a s hranicí, která je po částech algebraickou křivkou (je vyjádřena pomocí polynomů) stupně nejvýše n. Na hranici $\partial\Omega$ jsou zadány nějaké okrajové podmínky, Dirichletovy také jako polynomy stupně nejvýše n, Neumannovy jako polynomy stupně nejvýše $n-1$. V takovém případě lze řešení úlohy hledat jako lineární kombinaci jednoduchých harmonických funkcí až do stupně n.

Příklad.

Budeme řešit úlohu na obdélníku

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b\\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) &= y, & 0 < y < b,\\ u_y(x,0) = u_y(x,b) &= \frac{x}{a}, & 0 < x < a. \end{aligned}$$

Hranice oblasti je tvořena úsečkami, tedy křivkami stupně 1, Dirichletova podmínky na pravém okraj opboru proměnné x je vyjádřena polynomem prvního stupně, Neumannovy podmínky na okrajích oboru proměnné y je vyjádřena polynomem druhého stupně. Proto zkusíme řešení úlohy najít jako kombinaci jednoduchých harmonických funkcí až do stupně 2:

$$u(x,y) = A + Bx + Cy + 2Dxy + E(x^2-y^2).$$

Po dosazení do levé okrajové podmínky pro x dostaneme

$$u(0,y) = A + Cy - Ey^2 = 0, \quad \text{z toho } A = C = E = 0.$$

Nalezené koeficienty dosadíme do pravé okrajové podmínky a dostaneme

$$u(a,y) = Ba + 2Day = y, \quad \text{z toho } B = 0,\ D = \frac{1}{2a}.$$

Vychází tedy $u(x,y) = \dfrac{xy}{a}$. Ověříme, zda tato funkce splňuje okrajové podmínky pro y. Skutečně,

$$u_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{xy}{a} = \frac{x}{a}$$

a podmínky jsou splněny.

Danou úlohu bylo samozřejmě možné řešit metodou popsanou v 5.1.1. Použití jednoduchých harmonických funkcí však k cíli vedlo rychleji. ■

Ještě zdůrazníme, že pokud nějaká okrajová úloha pro Laplaceovu rovnici nemá řešení v oboru jednoduchých harmonických funkcí, neznamená to, že by řešení neměla.

Kruhové inverze jednoduchých harmonických funkcí v polárních i kartézských souřadnicích jsou

$u(r,\varphi)$	1	$\frac{R^2}{r}\cos\varphi$	$\frac{R^2}{r}\sin\varphi$	$\frac{R^4}{r^2}\cos 2\varphi$	$\frac{R^4}{r^2}\sin 2\varphi$	$\frac{R^6}{r^3}\cos 3\varphi$	$\frac{R^6}{r^3}\sin 3\varphi$	$\dots$
$u(x,y)$	1	$\frac{R^2x}{x^2+y^2}$	$\frac{R^2y}{x^2+y^2}$	$\frac{R^4(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$	$\frac{2R^4xy}{(x^2+y^2)^2}$	$\frac{R^6(x^3-3xy^2)}{(x^2+y^2)^3}$	$\frac{R^6(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^3}$	$\dots$

Tyto harmonické funkce lze využít k řešení Laplaceovy rovnice na neomezené oblasti

Příklad.

Budeme řešit vnitřní i vnější Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici na kruhu:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \qquad x^2 + y^2 \neq R^2,\\ u(x,y) &= 1 - \frac{3x^2}{R^2}, \quad x^2 + y^2 = R^2. \end{aligned}$$

Hranice je kružnice, tedy algebraická křivka druhého stupně, funkce na okraji je také polynom druhého stupně. Řešení vnitřní úlohy tedy budeme hledat ve tvaru

$$u(x,y) = A + Bx + Cy + D(x^2 - y^2) + 2Exy$$

se zatím neurčenými koeficienty A, B, C, D, E. Dosadíme do okrajové podmínky

$$u\left(x, \sqrt{R^2 - x^2}\right) = 1 - \frac{3}{R^2}x^2 = A + Bx + C\sqrt{R^2 - x^2} + D\left(2x^2 - R^2\right) + 2Ex\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Porovnáním koeficientů vidíme, že

$$A - DR^2 = 1,\ 2D = -\frac{3}{R^2},\ B = C = E = 0.$$

Odtud $A = -\frac{1}{2}$, $D = -\frac{3}{2}R^{-2}$ a řešení úlohy dostáváme ve tvaru

$$u(x,y) = \frac{3y^2 - 3x^2 - 1}{2R^2}.$$

Podle Poissonova vzorce (5.38) je řešení úlohy dáno integrálem

$$u(x,y) = \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - 3(\cos\sigma)^2}{(x - R\cos\sigma)^2 + (x - R\sin\sigma)^2} \mathrm{d}\sigma.$$

Je ale zřejmé, že výpočet tohoto integrálu je obtížnější, než hledání neurčitých koeficientů lineární kombinace.

Řešení vnější úlohy bychom mohli bezprostředně napsat jako kruhovou inverzi řešení vnitřní úlohy. Ukážeme ale ještě jiný postup. Je možné okrajovou podmínku transformovat do polárních souřadnic a hledat řešení jako lineární kombinaci jednoduchých harmonických funkcí v polárních souřadnicích.

Transformovaná okrajová podmínka je

$$u(R,\varphi) = 1 - 3(\cos\varphi)^2 = 1 - 3\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos 2\varphi.$$

Řešení hledáme ve tvaru

$$u(r,\varphi) = A + B\frac{R^2}{r}\cos\varphi + C\frac{R^2}{r}\sin\varphi + E\frac{R^4}{r^2}\cos 2\varphi + F\frac{R^4}{r^2}\sin 2\varphi$$

a toto řešení na okraji kruhu je

$$u(R,\varphi) = A + BR\cos\varphi + CR\sin\varphi + DR^2\cos 2\varphi + ER^2\sin 2\varphi.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$A = -\frac{1}{2},\ B = C = E = 0,\ D = -\frac{3}{2R^2},$$

takže řešení v polárních souřadnicích je

$$u(r,\varphi) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos 2\varphi.$$

Vyjádříme ho v souřadnicích kartézských:

$$u(x,y) = \frac{3R^2(y^2 - x^2) - 1}{2(x^2 + y^2)^2}.$$

■

5.2 Rovnice v n proměnných

5.2.1 Jednoznačnost řešení okrajových úloh pro Poissonovu rovnici

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$. Uvažujme *Poissonovu rovnici*

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{5.45}$$

s *Robinovou* okrajovou podmínkou

$$\alpha u(\boldsymbol{x}) + \beta\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{5.46}$$

Připusťme, že existují dvě funkce u_1 a u_2, které současně splňují Poissonovu rovnici s okrajovou podmínkou a tyto funkce jsou spojité na $\bar{\Omega}$. Položme $u = u_1 - u_2$. Pro $\boldsymbol{x} \in \Omega$ platí

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u_1(\boldsymbol{x}) - \Delta u_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) = 0,$$

tedy funkce u splňuje na Ω Laplaceovu, tj. homogenní, eliptickou rovnici. Podle prvního Greenova vzorce (C.7) nyní platí

$$0 = \int\limits_{\Omega} u\Delta u \,\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \,\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}V. \tag{5.47}$$

Pokud je $\alpha = 0 \neq \beta$, tj. pokud je okrajová podmínka Neumannova, pak pro $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ platí

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \frac{\partial u_2(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{\beta}\big(g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})\big) = 0$$

a proto je povrchový integrál na pravé straně rovnosti (5.47) roven 0. Dostáváme tak, že

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}V = 0, \tag{5.48}$$

což znamená, že $\nabla u(\boldsymbol{x}) = 0$, neboli $u(\boldsymbol{x}) = const$ pro $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Funkce u_1 a u_2 se liší o aditivní konstantu.

Pokud $\alpha \neq 0$, pak pro $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ platí

$$u(\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\alpha}\left(g(\boldsymbol{x}) - \beta\frac{\partial u_1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - g(\boldsymbol{x}) + \beta\frac{\partial u_2(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}. \tag{5.49}$$

Pokud $\beta = 0$, tj. pokud je okrajová podmínka Dirichletova, je $u(\boldsymbol{x}) = 0$ pro $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ a z rovnosti (5.47) plyne rovnost (5.48). To opět znamená, že $u(\boldsymbol{x}) = c$ pro $\boldsymbol{x} \in \Omega$ a ze spojitosti funkce u na $\bar{\Omega}$ plyne, že $c = 0$, tedy $u_1(\boldsymbol{x}) = u_2(\boldsymbol{x})$ pro $\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}$.

Nechť $\beta \neq 0$. Z rovnosti (5.47) dostaneme

$$-\frac{\beta}{\alpha}\int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^2 \mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}V. \tag{5.50}$$

Pokud $\alpha\beta > 0$, plyne odtud, že

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^2 \mathrm{d}S = 0 = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}V.$$

Z první rovnosti plyne, že

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{pro } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$$

a ze druhé, že $u(\boldsymbol{x}) = const$ pro $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Vzhledem k rovnosti (5.49) a ze spojitosti funkce u na $\bar{\Omega}$ to znamená, že $u(\boldsymbol{x}) = 0$ pro $\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}$, tedy funkce u_1 a u_2 splývají.

Platí tedy:

Tvrzení 6. Všechna řešení Neumannovy úlohy (5.45), (5.46) s $\alpha = 0$ se liší o aditivní konstantu.

Všechna řešení úlohy (5.45), (5.46) s $\alpha \neq 0 \leq \alpha\beta$, která jsou spojitá na $\bar{\Omega}$, jsou shodná; úloha má nejvýše jedno řešení.

5.2.2 Harmonické funkce

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast (otevřená souvislá množina) s rozumnou hranicí (množina bodů hranice, ve kterých k ní neexistuje tečný prostor, má nulovou míru).

Definice 1. Funkce $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazývá *harmonická,* pokud má spojité parciální derivace druhého řádu, na oblasti Ω splňuje Laplaceovu rovnici

$$\Delta u = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$$

a pokud je Ω neohraničená, platí navíc

$$\limsup_{\substack{|\boldsymbol{x}|\to\infty \\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} |\boldsymbol{x}|^{n-2} u(\boldsymbol{x}) < \infty. \tag{5.51}$$

Zavedeme ještě několik označení, která budou užitečné v následujících úvahách:

$B^a_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < a\}$ — otevřená koule se středem $\boldsymbol{x}$ a poloměrem a,

$S^a_{\boldsymbol{x}} = \partial B^a_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = a\}$ — sféra se středem $\boldsymbol{x}$ a poloměrem a,

$|S^a_{\boldsymbol{x}}|$ — $(n-1)$-rozměrná míra sféry $S^a_{\boldsymbol{x}}$.

Pro míru sféry platí $|S^a_{\boldsymbol{x}}| = a^{n-1}|S^1_{\boldsymbol{x}}|$ a míra c_n jednotkové sféry v prostoru $\mathbb{R}^n$ je dána vztahy

$$c_{2k} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}, \quad c_{2k+1} = \frac{2^{2k+1} k!\, \pi^k}{(2k)!},$$

zejména tedy $c_1 = 2$, $c_2 = 2\pi$, $c_3 = 4\pi$.

Fundamentální harmonické funkce

Budeme hledat funkce, které jsou harmonické v celém prostoru $\mathbb{R}^n$ s výjimkou počátku souřadnic a které jsou navíc sféricky symetrické, tj. jejich hodnota v bodě $\boldsymbol{x}$ závisí pouze na vzdálenosti $|\boldsymbol{x}|$ tohoto bodu od počátku. Řešíme tedy úlohu

$$\Delta u = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}, \tag{5.52}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = u(|\boldsymbol{x}|), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}. \tag{5.53}$$

Úlohu budeme transformovat do n-rozměrných sférických souřadnic $r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$, které jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4 \cdots \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\
x_2 &= r \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4 \cdots \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\
x_3 &= r \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \cos\varphi_4 \cdots \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\
x_4 &= r \sin\varphi_3 \cos\varphi_4 \cdots \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\
x_n &= r \sin\varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Pak platí

$$|\boldsymbol{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$$

a derivováním tohoto vztahu podle x_i dostaneme

$$2x_i = 2r \frac{\partial r}{\partial x_i},$$

takže

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{r - x_i \dfrac{\partial r}{\partial x_i}}{r^2} = \frac{r - \dfrac{x_i^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}.$$

Pro transformaci Laplaceova operátoru si nejdříve uvědomíme, že z podmínky symetrie (5.53), tj. ze závislosti funkce u pouze na průvodiči, nikoliv na úhlech, plyne nulovost derivací funkce u podle úhlů,

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

a proto

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial r} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial r}$$

a dále

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} =$$

$$= \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

Odtud dostaneme vyjádření Laplaceova operátoru

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{nr^2 - r^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Rovnice (5.52) transformovaná do sférických souřadnic je tedy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0. \tag{5.54}$$

Podmínka ohraničenosti harmonické funkce shora (5.51) má ve sférických souřadnicích tvar

$$\limsup_{r\to\infty} r^{n-1}u(r) < \infty. \tag{5.55}$$

První integrací rovnice (5.54) dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial r} = r^{1-n}C_n,$$

kde C_n je integrační konstanta, druhou integrací dostaneme

$$u(r) = D_n + C_n \int^r s^{1-n}\mathrm{d}s = \begin{cases} D_1 + C_1 r, & n = 1,\\ D_2 + C_2 \ln r, & n = 2,\\ D_n + C_n \dfrac{r^{2-n}}{2-n}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Aby byla v případě $n = 2$ splněna podmínka (5.55), musí být $C_2 < 0$. Nehledáme všechny sféricky symetrické harmonické funkce definované na $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$, stačí nám jedna z nich. Zvolíme $D_n = 0$ a $C_n = -1$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

Vrátíme se ke kartézským souřadnicím. Poněvadž $r = |\boldsymbol{x}|$, nalezené řešení úlohy (5.52), (5.53) je tvaru

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \ln \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|}, & n = 2,\\ \dfrac{1}{n-2}\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}, & n \neq 2. \end{cases}$$

Harmonické funkce vyjádřené předchozí formulí jsou harmonické všude s výjimkou jediného bodu, konkrétně počátku souřadnic. V tomto bodě nejsou pro $n > 1$ definovány, pro $n = 1$ je zde funkce nediferencovatelná. Tuto skutečnost vyjadřujeme frází, že nalezené funkce *mají singularitu* v bodě $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Tím je motivováno zavedení následujícího pojmu:

Definice 2. *Fundamentální* (nebo *elementární*) *harmonické funkce se singularitou v bodě* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ definovány vztahem

$$v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \ln \dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}, & n = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{n-2} \dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n-2}}, & n \neq 2. \end{cases}$$

Poznamenejme, že fundamentální harmonické funkce bývají někdy pro $n \neq 2$ definovány bez faktoru $\dfrac{1}{n-2}$ a pro $n = 1$ se definuje $v(x, y) = -|x - y|$. Pro $n \in \{1, 2, 3\}$ obě možné definice splývají.

Ukážeme několik vlastností fundamentálních harmonických funkcí.

1. Fundamentální harmonické funkce jsou symetrické ve svých proměnných,

$$v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = v(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

2. $\Delta_{\boldsymbol{x}} v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial x_i^2} = 0$ a $\Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial y_i^2} = 0$,
tedy fundamentální harmonická funkce je v obou proměnných harmonická na svém (klasickém) definičním oboru $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}\}$.

3. Nechť $\boldsymbol{y} \in S_{\boldsymbol{x}}^a$ a $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})$ je jednotkový vektor vnější normály ke sféře $S_{\boldsymbol{x}}^a$ v bodě $\boldsymbol{y}$. Pak

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = -\frac{1}{a^{n-1}}.$$

Důkaz: Vektor $\boldsymbol{\nu}$ je dán výrazem $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{1}{a}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$, takže jeho souřadnice jsou $\nu_i = \dfrac{y_i - x_i}{a}$.
Vzdálenost bodů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ je

$$a = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2},$$

a proto je jeho derivace podle i-té proměnné

$$\frac{\partial |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}{\partial y_i} = \frac{-2(x_i - y_i)}{2\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}} = -\frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}.$$

Pro $n = 2$ tak dostáváme

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\big(-\ln |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|\big) = -\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \left(-\frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \right) = \frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2} = \frac{x_i - y_i}{a^2}$$

a pro $n \neq 2$

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial y_i} = \frac{1}{n-2} \frac{\partial}{\partial y_i} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{2-n} = \frac{1}{n-2} (2-n) |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{1-n} \left(-\frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \right) = \frac{x_i - y_i}{a^n}.$$

Celkem dostáváme

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = \nabla_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - y_i}{a^n}\frac{y_i - x_i}{a} = -\frac{1}{a^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = -\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{a^{n+1}},$$

což po snadné úpravě dá dokazovaný vztah. □

4. $\displaystyle\int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} \frac{\partial v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathrm{d}S = -|S^1_{\boldsymbol{x}}|$; přitom $|S^r_{\boldsymbol{x}}|$ označuje $(n-1)$-rozměrnou míru sféry $S^r_{\boldsymbol{x}}$ (délku kružnice, obsah kulové plochy, …).

Důkaz: Podle předchozího výsledku je

$$\int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} \frac{\partial v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathrm{d}S = \int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} \left(-\frac{1}{a^{n-1}}\right) \mathrm{d}S = -\frac{1}{a^{n-1}}|S^a_x| = -\frac{1}{a^{n-1}}a^{n-1}|S^1_x|,$$

což je dokazovaná rovnost. □

5. $$\int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\mathrm{d}S = \begin{cases} (-a\ln a)\,|S^1_{\boldsymbol{x}}|, & n=2, \\ \dfrac{a}{n-2}|S^1_{\boldsymbol{x}}|, & n\neq 2, \end{cases} \quad \text{a tedy} \quad \lim_{a\to 0+}\int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\mathrm{d}S = 0.$$

Důkaz: Pro $n=2$ dostaneme

$$\int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\mathrm{d}S = -\int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} \ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}} = -\ln a\int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} \mathrm{d}S = (-\ln a)2\pi a,$$

a pro $n\neq 2$

$$\int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\mathrm{d}S = \frac{1}{n-2}\int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} \frac{\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} = \frac{1}{n-2}\frac{1}{a^{n-2}}\int_{S^a_{\boldsymbol{x}}} \mathrm{d}S = \frac{1}{n-2}\frac{|S^a_{\boldsymbol{x}}|}{a^{n-2}};$$

z toho již bezprostředně plyne dokazovaná rovnost. □

6. $$\int_{B^a_{\boldsymbol{x}}} v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\mathrm{d}V = \begin{cases} \frac{1}{4}a^2\left(1-\ln a^2\right)|S^1_{\boldsymbol{x}}|, & n=2, \\ \dfrac{a^2}{2(n-2)}|S^1_{\boldsymbol{x}}|, & n\neq 2, \end{cases} \quad \text{a tedy} \quad \lim_{a\to 0+}\int_{B^a_{\boldsymbol{x}}} v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\mathrm{d}S = 0.$$

Důkaz: Integrál přepíšeme podle Fubiniovy věty

$$\int_{B^a_{\boldsymbol{x}}} v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\mathrm{d}V = \int_0^a \left(\int_{S^r_{\boldsymbol{x}}} v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r$$

a využijeme předchozí výsledek. Na pravé straně rovnosti pro $n=2$ dostaneme

$$-|S^1_{\boldsymbol{x}}|\int_0^a r\ln r\mathrm{d}r = -|S^1_{\boldsymbol{x}}|\left[\frac{1}{2}r^2\ln r - \frac{1}{4}r^2\right]_{r=0}^{a} = -\frac{1}{4}|S^1_{\boldsymbol{x}}|a^2\left(\ln a^2 - 1\right),$$

a pro $n\neq 2$

$$|S^1_{\boldsymbol{x}}|\int_0^a \frac{r}{n-2}\mathrm{d}r = \frac{1}{n-2}\frac{a^2}{2},$$

což jsou dokazované formule. □

Nechť f je spojitá funkce na oblasti Ω a bod $\boldsymbol{x} \in \Omega^\circ$. Budeme definovat *nevlastní integrál ve smyslu hlavní hodnoty* ze součinu funkcí $fv(\boldsymbol{x}, \cdot)$ jako limitu

$$\int_\Omega fv(\boldsymbol{x}, \cdot)\mathrm{d}V = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\Omega \setminus B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} fv(\boldsymbol{x}, \cdot)\mathrm{d}V. \tag{5.56}$$

Tato definice má smysl, neboť

$$\int_\Omega fv(\boldsymbol{x}, \cdot)\mathrm{d}V = \int_{\Omega \setminus B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} fv(\boldsymbol{x}, \cdot)\mathrm{d}V + \int_{B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} fv(\boldsymbol{x}, \cdot)\mathrm{d}V$$

a podle věty o střední hodnotě integrálního počtu ke každému $\varepsilon > 0$ existuje bod $\boldsymbol{x}_\varepsilon \in \overline{B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon}$ takový, že

$$\left| \int_{B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} fv(\boldsymbol{x}, \cdot)\mathrm{d}V \right| = \left| f(\boldsymbol{x}_\varepsilon) \int_{B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} v(\boldsymbol{x}, \cdot)\mathrm{d}V \right| \le |f(\boldsymbol{x}_\varepsilon)| \left| \int_{B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} v(\boldsymbol{x}, \cdot)\mathrm{d}V \right|.$$

Ze spojitosti funkce f plyne, že $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} |f(\boldsymbol{x}_\varepsilon)| = |f(\boldsymbol{x})| < \infty$ a druhý výraz na pravé straně rovnosti (5.56) podle vlastnosti 6. konverguje k nule.

Integrální reprezentace dvakrát diferencovatelné funkce

Buď $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dvakrát spojitě diferencovatelná uvnitř oblasti Ω, spojitá (nebo spojitě prodlužitelná) na $\bar{\Omega}$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Zvolíme kladné číslo ε tak malé, že $B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon \subseteq \Omega^\circ$, $\overline{B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} \subseteq \Omega$. Podle druhého Greenova vzorce (C.8) nyní platí

$$\int_{\Omega \setminus B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} \big(u\Delta v(\boldsymbol{x}, \cdot) - v(\boldsymbol{x}, \cdot)\Delta u\big)\mathrm{d}V = \int_{\partial(\Omega \setminus B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon)} \left(u \frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\boldsymbol{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S, \tag{5.57}$$

kde $v(\boldsymbol{x}, \cdot)$ je fundamentální harmonická funkce se singularitou $\boldsymbol{x}$.

Podívejme se nejprve na levou stranu této rovnosti. Poněvadž funkce $v(\boldsymbol{x}, \cdot)$ je na celém integračním oboru harmonická, je $\Delta v(\boldsymbol{x}, \cdot) = 0$ a první sčítanec (menšenec) v integrované funkci je roven nule, tedy levá strana rovnosti je rovna

$$-\int_{\Omega \setminus B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} v(\boldsymbol{x}, \cdot)\Delta u \, \mathrm{d}V.$$

Přechodem k limitě $\varepsilon \to 0+$ dostaneme

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\Omega \setminus B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} \big(u\Delta v(\boldsymbol{x}, \cdot) - v(\boldsymbol{x}, \cdot)\Delta u\big)\mathrm{d}V = -\int_\Omega v(\boldsymbol{x}, \cdot)\Delta u \, \mathrm{d}V, \tag{5.58}$$

kde integrál chápeme ve smyslu hlavní hodnoty.

Levou stranu rovnosti (5.57) rozepíšeme jako rozdíl dvou povrchových integrálů

$$\int_{\partial(\Omega \setminus B_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon)} \left(u \frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\boldsymbol{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S =$$
$$= \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\boldsymbol{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S - \int_{S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} \left(u \frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\boldsymbol{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S. \tag{5.59}$$

Druhý integrál opět můžeme rozepsat jako rozdíl dvou integrálů. Upravíme první z nich. Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu existuje bod $\boldsymbol{\eta} \in S_{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}$ tak, že s využitím vlastnosti 3. fundamentálních harmonických funkcí ze str. 133, platí následující rovnosti

$$\int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}} u \frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathrm{d}S = -\int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}} u \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \mathrm{d}S = -\frac{u(\boldsymbol{\eta})}{\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}} \mathrm{d}S = -\frac{u(\boldsymbol{\eta})}{\varepsilon^{n-1}} |S_{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}| = -u(\boldsymbol{\eta})|S_{\boldsymbol{x}}^{1}|\,;$$

první rovnost je právě zmíněná vlastnost a druhá plyne z věty o střední hodnotě integrálního počtu. Přechodem k limitě $\varepsilon \to 0+$ nyní dostaneme rovnost

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}} u \frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathrm{d}S = -u(\boldsymbol{x})|S_{\boldsymbol{x}}^{1}|\,. \tag{5.60}$$

Dále odhadneme druhou část druhého integrálu na pravé straně rovnosti (5.59). Derivace funkce u ve směru vnější normály je spojitá, sféra je kompaktní množina a proto podle druhé Weierstrassovy věty existuje konstanta K taková, že

$$\max\left\{ \left| \frac{\partial(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} \right| : \boldsymbol{y} \in S_{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon} \right\} \leq K.$$

Nyní můžeme, opět s využitím věty o střední hodnotě, napsat odhad

$$\left| \int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}} v(\boldsymbol{x},\cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathrm{d}S \right| \leq K \left| \int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mathrm{d}S \right|.$$

Odtud a z vlastnosti 5. fundamentálních harmonických funkcí vidíme, že

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}} v(\boldsymbol{x},\cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathrm{d}S = 0. \tag{5.61}$$

Pomocí rovností (5.58), (5.59), (5.60), (5.61) přejdeme v rovnosti (5.57) k limitě $\varepsilon \to 0+$. Dostaneme

$$-\int\limits_{\Omega} v(\boldsymbol{x},\cdot)\Delta u \,\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\boldsymbol{x},\cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S - u(\boldsymbol{x})|S_{\boldsymbol{x}}^{1}|\,.$$

Tímto způsobem jsme odvodili

Tvrzení 7 (Lemma o třech potenciálech)**.** Buďte $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast, funkce $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dvakrát spojitě diferencovatelná uvnitř oblasti Ω, spojitá (nebo spojitě prodlužitelná) na $\bar{\Omega}$ a bod $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Pak platí

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \left(v(\boldsymbol{x},\cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S - \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} v(\boldsymbol{x},\cdot)\Delta u \,\mathrm{d}V, \tag{5.62}$$

kde c_n je $(n-1)$-rozměrná míra jednotkové sféry v n-rozměrném prostoru; zejména $c_1 = 2$, $c_2 = 2\pi$, $c_3 = 4\pi$.

Buď nyní ψ testovací funkce na $\mathbb{R}^n$ jejíž nosič je částí vnitřku oblasti Ω. Podle definice distributivní derivace (viz A.3) platí

$$\langle \Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,|\, \psi(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,|\, \Delta\psi(\boldsymbol{y}) \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Delta\psi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}} = \int\limits_{\Omega} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Delta\psi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}},$$

neboť funkce ψ i $\Delta\psi$ jsou mimo vnitřek oblast Ω nulové. Navíc na hranici oblasti Ω je nulová funkce ψ i její derivace ve směru vnější normály. V rovnosti (5.62) s funkcí ψ místo funkce u je tedy povrchový integrál nulový, tj.

$$\int\limits_{\Omega} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Delta\psi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}} = -c_n\psi(\boldsymbol{x}).$$

Celkem tak dostáváme, že

$$\left\langle\, \Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\middle|\, \psi(\boldsymbol{y}) \,\right\rangle = -c_n\psi(\boldsymbol{x}) = \left\langle\, -c_n\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \psi(\boldsymbol{y}) \,\right\rangle,$$

kde δ je Diracova distribuce. To znamená, že

$$\Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -c_n\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}). \tag{5.63}$$

Vlastnosti harmonických funkcí

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ohraničená oblast a $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ harmonická funkce se spojitými parciálními derivacemi na $\bar{\Omega}$.

1. **Věta o reprezentaci harmonické funkce.**
   Funkce harmonická na oblasti Ω je jednoznačně určena svými hodnotami a hodnotami své derivace ve směru vnější normály na hranici této oblasti:

   $$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}} - u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S.$$

   Důkaz: Objemový integrál na pravé straně rovnosti (5.62) je pro funkci harmonickou na Ω nulový. A to je dokazovaná rovnost. □

2. **Nutná podmínka řešitelnosti Neumannovy úlohy pro Laplaceovu rovnici,** neboli **Podmínka nulových zdrojů uvnitř Ω.**

   $$\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S = 0.$$

   Důkaz: Ve druhém Greenově vzorci (C.8) stačí volit $v \equiv 1$. □

3. **Podmínka povrchového průměru.**
   Buď $\boldsymbol{x} \in \Omega$ a $S^a_{\boldsymbol{x}}$ taková sféra, že $S^a_{\boldsymbol{x}} \subseteq \Omega$. Pak platí

   $$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|S^a_{\boldsymbol{x}}|}\int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u\mathrm{d}S = \frac{1}{a^{n-1}c_n}\int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u\mathrm{d}S.$$

   Důkaz: Podle věty o reprezentaci je

   $$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_n}\int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}}\left(v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}} - u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S.$$

   Fundamentální harmonická funkce $v(\boldsymbol{x},\,\cdot\,)$ je na sféře $S^a_{\boldsymbol{x}}$ konstantní, řekněme rovna K. Odtud a s využitím vlastnosti 3 fundamentální harmonické funkce dostaneme

   $$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_n}\left(K\int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S - \int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u\left(-\frac{1}{a^{n-1}}\right)\mathrm{d}S\right).$$

První integrál je nulový podle první uvedené vlastnosti harmonických funkcí, a proto

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_n a^{n-1}} \int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u \mathrm{d}S,$$

což je dokazovaná rovnost. □

4. **Podmínka objemového průměru.**
Buď $\boldsymbol{x} \in \Omega$ a $B^a_{\boldsymbol{x}}$ taková koule, že $\overline{B^a_{\boldsymbol{x}}} \subseteq \Omega$. Pak platí

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|B^a_{\boldsymbol{x}}|} \int\limits_{B^a_{\boldsymbol{x}}} u \mathrm{d}V,$$

kde $|B^a_{\boldsymbol{x}}| = \dfrac{a^n c_n}{n}$ je objem (n-rozměrná míra) koule o poloměru a.

Důkaz: Podle Fubiniho věty a podle předchozího výsledku platí

$$\int\limits_{B^a_{\boldsymbol{x}}} u \mathrm{d}V = \int\limits_0^a \left(\int\limits_{S^r_{\boldsymbol{x}}} u \mathrm{d}S \right) \mathrm{d}r = u(\boldsymbol{x}) \int\limits_0^a |S^r_{\boldsymbol{x}}| \mathrm{d}r = u(\boldsymbol{x}) |B^a_{\boldsymbol{x}}|,$$

nebo také

$$\int\limits_{B^a_{\boldsymbol{x}}} u \mathrm{d}V = \int\limits_0^a \left(\int\limits_{S^r_{\boldsymbol{x}}} u \mathrm{d}S \right) \mathrm{d}r = u(\boldsymbol{x}) c_n \int\limits_0^a r^{n-1} \mathrm{d}r = \frac{a^n c_n}{n} u(\boldsymbol{x}).$$

Tvrzení je tedy bezprostředním důsledkem tvrzení o povrchovém průměru. □

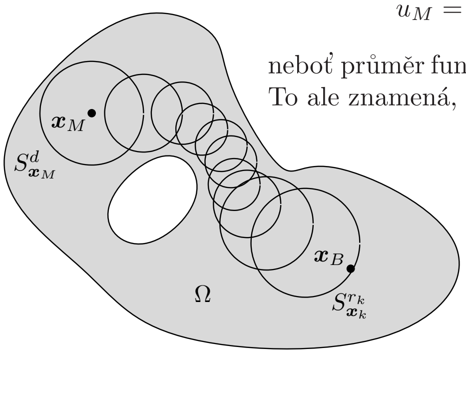
5. **Princip maxima.**
Funkce u nabývá svého maxima a minima na hranici $\partial\Omega$ definiční oblasti Ω,tj. pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega^\circ$ platí

$$\min\{u(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{y} \in \partial\Omega\} \leq u(\boldsymbol{x}) \leq \max\{u(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{y} \in \partial\Omega\}.$$

Zesílený princip maxima: Je-li harmonická funkce u nekonstantní na oblasti Ω, pak jsou obě předchozí nerovnosti ostré. Nebo ekvivalentně: Pokud harmonická funkce nabývá své extrémní hodnoty uvnitř oblasti Ω, pak je konstantní.

Důkaz: Poněvadž oblast Ω je podle předpokladu ohraničená, je její uzávěr $\bar{\Omega}$ kompaktní. Podle Weierstrassovy věty tedy existuje bod $\boldsymbol{x}_M \in \bar{\Omega}$ takový, že v něm funkce u nabývá svého maxima u_M. Pokud $\boldsymbol{x}_M \in \partial\Omega$, princip maxima platí.
Nechť $\boldsymbol{x}_M \in \Omega^\circ$. Pak existuje $d > 0$ takové, že otevřená koule $B^d_{\boldsymbol{x}_M}$ leží i se svou hranicí $S^a_{\boldsymbol{x}_M}$ uvnitř oblasti Ω. Dále podle podmínek povrchového a objemového průměru platí, že

$$u_M = u(\boldsymbol{x}_M) = \text{průměr na sféře } S^d_{\boldsymbol{x}_M} = \text{průměr na kouli } B^d_{\boldsymbol{x}_M} \leq u_M,$$



neboť průměr funkčních hodnot na kouli nemůže být větší, než je maximální funkční hodnota. To ale znamená, že na celé uzavřené kouli $\overline{B^d_{\boldsymbol{x}_M}}$ má funkce u stejnou hodnotu u_M.
Nyní zvolíme libovolný bod $\boldsymbol{x}_B \in \Omega^\circ$. Poněvadž je oblast Ω souvislá a omezená, lze body $\boldsymbol{x}_M$ a $\boldsymbol{x}_B$ spojit konečným „řetízkem“ koulí $B^d_{\boldsymbol{x}_M}$, $B^{r_1}_{\boldsymbol{x}_1}$, $B^{r_2}_{\boldsymbol{x}_2}$, …, $B^{r_k}_{\boldsymbol{x}_k}$ takových, že $\boldsymbol{x}_1 \in \overline{B^d_{\boldsymbol{x}_M}}$, $\boldsymbol{x}_2 \in \overline{B^{r_1}_{\boldsymbol{x}_1}}$, …, $\boldsymbol{x}_k \in \overline{B^{r_{k-1}}_{\boldsymbol{x}_{k-1}}}$, $\boldsymbol{x}_B \in \overline{B^{r_k}_{\boldsymbol{x}_k}}$ a všechny tyto koule leží uvnitř oblasti Ω. Stejnou úvahou, jakou jsme ukázali, že pro všechny body $\boldsymbol{x} \in S^d_{\boldsymbol{x}_M}$ platí $u(\boldsymbol{x}) = u_M$, můžeme ukázat, že i pro všechny body $\boldsymbol{x} \in \overline{B^{r_1}_{\boldsymbol{x}_1}}$ platí $u(\boldsymbol{x}) = u_M$, pro všechny body $\boldsymbol{x} \in \overline{B^{r_2}_{\boldsymbol{x}_2}}$ … atd. Nakonec i pro všechny body $\boldsymbol{x} \in S^{r_k}_{\boldsymbol{x}_k}$ platí $u(\boldsymbol{x}) = u_M$, zejména tedy $u(\boldsymbol{x}_B) = u_M$.

To znamená, že hodnota funkce u v bodě $\boldsymbol{x}_B$ je $u(\boldsymbol{x}_B) = u_M$. Bod $\boldsymbol{x}_B \in \Omega^\circ$ byl libovolný, tedy $u(\boldsymbol{x}) = u_M$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega^\circ$. Ze spojitosti funkce u na $\bar{\Omega}$ nyní plyne zesílený princip maxima. □

6. **Dirichletův princip minimální energie**
   Nechť u je funkce harmonická na oblasti Ω a w je libovolná spojitě diferencovatelná funkce ve vnitřku Ω° a spojitá na $\bar{\Omega}$ taková, že $w(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})$ pro všechna $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. Pak

$$E(w) \geq E(u),$$

kde E je zobecněná energie definovaná vztahem

$$E(w) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 \mathrm{d}V.$$

Důkaz: Definujme funkci $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ vztahem $v = w - u$. Pak je funkce v spojitě diferencovatelná a pro $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ platí $v(\boldsymbol{x}) = 0$. Z této vlastnosti a prvního Greenova vzorce (C.7) plyne

$$\begin{aligned} E(w) &= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \nabla(u+v) \cdot \nabla(u+v)\, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla v + |\nabla v|^2\right) \mathrm{d}V = \\ &= E(u) + \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}V + E(v) = E(u) + E(v) + \int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} v \Delta u \, \mathrm{d}V = \\ &= E(u) + E(v) \end{aligned}$$

a tvrzení nyní plyne ze skutečnosti, že $E(v) \geq 0$. □

Podívejme se ještě na interpretaci tohoto principu v případě $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Graf funkce w je plocha, jejíž obsah je dán integrálem

$$S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + w_x(x,y)^2 + w_y(x,y)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla w(x,y)|^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Obsah je minimální, pokud je také hodnota integrálu $\iint\limits_{\Omega} \left(1 + |\nabla w(x,y)|^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ minimální, a to nastane tehdy pokud i hodnota $\frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} |\nabla w(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = E(w)$ je minimální.

Princip minimální energie tedy říká, že obsah grafu harmonické funkce je nejmenší mezi všemi funkcemi, které mají funkční hodnoty zadané na hranici definiční oblasti. Pokud si graf funkce představíme jako nějakou membránu napnutou na křivku (třeba vytvořenou z drátu), pak tvar membrány daný funkcí harmonickou má nejmenší potenciální energii danou napětím.

Harmonické funkce tedy vyjadřují stavy „soustav“ s nejmenší potenciální energií, tedy nějaké stavy základní.

5.2.3 Greenovy funkce

Greenova funkce Laplaceova operátoru na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ s okrajovou podmínkou typu (α, β) je funkce $G : \Omega \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, která splňuje podmínky:

(i) Pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ je funkce $G(\boldsymbol{x}, \cdot\,)$ harmonická na oblasti $\Omega \setminus \{\boldsymbol{x}\}$.

(ii) Pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ a každou nekonečněkrát diferencovatelnou funkci ψ s kompaktním nosičem $\operatorname{Supp} \psi \subseteq \Omega$ platí

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta G(\boldsymbol{x}, \cdot\,)\, \mathrm{d}V = \int\limits_{\Omega} \psi \Delta G(\boldsymbol{x}, \cdot\,)\, \mathrm{d}V = \psi(\boldsymbol{x}),$$

neboli

$$\Delta_{\boldsymbol{y}} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}),$$

kde δ je Diracova distribuce.

(iii) Pro všechna $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$ platí

$$\alpha G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \beta \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = 0.$$

Následující příklad ukazuje, že nějaká Greenova funkce skutečně existuje, tj. že rozsah uvedené definice je neprázdný.

Příklad.

Uvažujme polorovinu $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\big\}$. Její hranice je $\partial\Omega = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, tedy osa x. Definujme funkci G předpisem

$$\begin{aligned} G(x, y, \xi, \eta) &= -\frac{1}{2\pi}\big(v(x, y, \xi, \eta) + v(x, y, \xi, -\eta)\big) = \\ &= \frac{1}{4\pi}\Big(\ln\big((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\big) + \ln\big((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2\big) \Big), \end{aligned}$$

kde v je fundamentální harmonická funkce. Ukážeme, že funkce G je Greenovou funkcí Laplaceova operátoru na polorovině Ω s okrajovou podmínkou typu $(0, 1)$.

Tato funkce je samozřejmě definována pro všechna $x, \xi \in \mathbb{R}$, $y > 0$ a $\eta \geq 0$, je tedy definována na $\Omega \times \bar{\Omega}$.

První sčítanec v definici funkce G je fundamentální harmonickou funkcí a proto z definice pro $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ platí

$$\Delta_{(\xi,\eta)} v(x, y, \xi, \eta) = 0.$$

Pro každou dvojici bodů $(x, y) \in \Omega$, $(\xi, \eta) \in \bar{\Omega}$ je $(x, y) \neq (\xi, -\eta)$ a proto je druhý sčítanec funkcí harmonickou na oblasti Ω,[3]

$$\Delta_{(\xi,\eta)} v(x, y, \xi, -\eta) = 0.$$

Podmínka (i) z definice Greenovy funkce je splněna.

Podle (5.63) platí

$$\Delta_{(\xi,\eta)} v(x, y, \xi, \eta) = -2\pi\delta\big((\xi, \eta) - (x, y)\big) = -2\pi\delta(\xi - x, \eta - y).$$

Celkem tedy

$$\Delta_{(\xi,\eta)} G(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\big(-2\pi\delta(\xi - x, \eta - y) + 0\big) = \delta(\xi - x, \eta - y).$$

Podmínka (ii) je také splněna.

---

[3] Z „cvičných důvodů“ můžeme tento závěr odvodit přímým výpočtem: Na množině $\big\{(x, y, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^4 : y > 0, \eta > 0\big\}$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \ln\big((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2\big) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{-2(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} = -2\frac{-(x-\xi)^2 - (y+\eta)^2 + 2(x-\xi)^2}{\big((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2\big)^2} = \\ &= -2\frac{(x-\xi)^2 - (y+\eta)^2}{\big((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2\big)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \ln\big((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2\big) = 2\frac{(x-\xi)^2 - (y+\eta)^2}{\big((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2\big)^2}, \quad \text{tedy} \quad \Delta_{(\xi,\eta)} \ln\big((x-\xi)^2 + (y+\eta)^2\big) = 0.$$

Okrajová podmínka typu $(0,1)$ je homogenní Neumannovou podmínkou. V libovolném bodě hranice $(\xi,0)$ je vektor vnější normály $\boldsymbol{\nu}(\xi,0)=(0,-1)$, tj.

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}(\xi,0)}=-\frac{\partial}{\partial\eta}.$$

Parciální derivace funkce G podle proměnné η je

$$\frac{\partial G}{\partial\eta}(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{-2(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\frac{2(y+\eta)}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\right),$$

a proto derivaci funkce G ve směru vnější normály v bodě $(\xi,0)$ na hranici oblasti Ω je rovna

$$\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{\nu}(\xi,\eta)}(x,y,\xi,\eta)\bigg|_{(\xi,\eta)\in\partial\Omega}=-\frac{\partial G}{\partial\eta}(x,y,\xi,\eta)\bigg|_{\eta=0}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{-2y}{(x-\xi)^2+y^2}+\frac{2y}{(x-\xi)^2+y^2}\right)=0.$$

Podmínka (iii) je také splněna. ∎

Ukážeme že pomocí Greenovy funkce lze zapsat řešení obecné Robinovy okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici

$$\Delta u=f(\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega,\tag{5.64}$$

$$\alpha u(\boldsymbol{x})+\beta\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}}=g(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega.\tag{5.65}$$

Podle druhého Greenova vzorce (C.8) platí

$$\int\limits_{\Omega}\big(u\Delta G(\boldsymbol{x},\cdot)-G(\boldsymbol{x},\cdot)\Delta u\big)\mathrm{d}V=\int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}}-G(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S.$$

Poněvadž podle definice Greenovy funkce je $\Delta_{\boldsymbol{y}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$, můžeme z předchozí rovnosti a z úlohy (5.64), (5.65) vyjádřit

$$u(\boldsymbol{x})=\int\limits_{\Omega}f\,G(\boldsymbol{x},\cdot)\mathrm{d}V+\int\limits_{\partial\Omega}\left(u\,\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}}-G(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S.\tag{5.66}$$

Pokud $\alpha=1$ a $\beta=0$, tedy pokud okrajová úloha (5.64), (5.65) je Dirichletova, můžeme bezprostředně napsat její řešení

$$u(\boldsymbol{x})=\int\limits_{\Omega}f\,G(\boldsymbol{x},\cdot)\mathrm{d}V+\int\limits_{\partial\Omega}g\,\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S.\tag{5.67}$$

Pokud je $\beta\neq0$, z podmínky (iii) v definici Greenovy funkce a z okrajové podmínky (5.64) vyjádříme

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})}=-\frac{\alpha}{\beta}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\quad\text{a}\quad\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})}=\frac{1}{\beta}\big(g(\boldsymbol{x})-\alpha u(\boldsymbol{x})\big)$$

a tyto výrazy dosadíme do rovnosti (5.66),

$$u(\boldsymbol{x})=\int\limits_{\Omega}f\,G(\boldsymbol{x},\cdot)\mathrm{d}V+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(-\frac{\alpha}{\beta}G(\boldsymbol{x},\cdot)\right)u-G(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{1}{\beta}(g-\alpha u)\right]\mathrm{d}S.$$

Po snadné úpravě odtud dostaneme řešení úlohy (5.64), (5.65) ve tvaru

$$u(\boldsymbol{x})=\int\limits_{\Omega}f\,G(\boldsymbol{x},\cdot)\mathrm{d}V-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\partial\Omega}g\,G(\boldsymbol{x},\cdot)\mathrm{d}S.\tag{5.68}$$

Pokud tedy známe Greenovu funkci Laplaceova operátoru na oblasti Ω s příslušnou okrajovou podmínkou, můžeme bezprostředně napsat řešení okrajové úlohy (5.64), (5.65)

Příklad.

Najdeme řešení Neumannovy okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici na polorovině

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0,\\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Greenovu funkci na polorovině s Neumannovou podmínkou $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$G(x,y,\xi\,\eta) = \frac{1}{4\pi}\Big(\ln\big((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\big)+\ln\big((x-\xi)^2+(y+\eta)^2\big)\Big)$$

známe z předchozím příkladu. Řešení úlohy tedy podle (5.68) je

$$\begin{aligned}u(x,y) &=\\ &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} f(\xi,\eta)\Big(\ln\big((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\big)+\ln\big((x-\xi)^2+(y+\eta)^2\big)\Big)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta-\\ &\qquad -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,\ln\big((x-\xi)^2+y^2\big)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

■

Podmínku (ii) z definice Greenovy funkce můžeme vzhledem k rovnosti (5.63) přepsat do tvaru

$$\Delta_{\boldsymbol{y}} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{c_n}\Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

kde v je fundamentální harmonická funkce. Toto pozorování napovídá, že Greenovu funkci můžeme hledat ve tvaru

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{c_n} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + h(\boldsymbol{y}),$$

kde harmonická funkce h je řešením počáteční úlohy

$$\Delta h = 0, \qquad \boldsymbol{y} \in \Omega, \tag{5.69}$$

$$\alpha h(\boldsymbol{y}) + \beta\frac{\partial h(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = \frac{\alpha}{c_n} v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \frac{\beta}{c_n}\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})}, \quad \boldsymbol{y} \in \partial\Omega. \tag{5.70}$$

Přímým výpočtem se snadno přesvědčíme, že takto definovaná funkce G je skutečně Greenovou funkcí.

Greenova funkce pro Dirichletovu úlohu na speciálních oblastech

Nechť otevřená oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ splňuje podmínku

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \Omega)(\exists \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})(\forall \boldsymbol{y} \in \partial\Omega)\,\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|} = \gamma(\boldsymbol{x}). \tag{5.71}$$

Tuto podmínku lze převyprávět tak, že ke každému bodu $\boldsymbol{x}$ z oblasti Ω lze najít nějaký sdružený bod $\boldsymbol{x}'$, „bod symetrický podle hranice“; tato „symetrie podle hranice“ znamená, že poměr vzdálenosti bodu $\boldsymbol{x}$ od nějakého bodu $\boldsymbol{y}$ na hranici a vzdálenosti sdruženého bodu $\boldsymbol{x}'$ od téhož bodu $\boldsymbol{y}$ nezávisí na poloze bodu $\boldsymbol{y}$.

Pokud oblast Ω splňuje podmínku (5.71) a okrajová podmínka (5.70) je Dirichletova, tj. $\alpha = 1$, $\beta = 0$, pak funkce

$$h(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y}|}, & n = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{(n-2)c_n} \left(\dfrac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y}|} \right)^{n-2}, & n \neq 2 \end{cases} \tag{5.72}$$

je řešením úlohy (5.69), (5.70). Přesvědčíme se o tom snadným výpočtem:

Z podmínky (5.71) plyne

$$|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y}| = \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}{\gamma(\boldsymbol{x})}.$$

To znamená, že

$$h(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}, & n = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{(n-2)c_n} \dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n-2}}, & n \neq 2 \end{cases} = \frac{1}{c_n} v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

a okrajová podmínka (5.70) s $\alpha = 1$, $\beta = 0$ je splněna.

Je-li $n = 2$, pak

$$h(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y}|} - \ln \gamma(\boldsymbol{x}) \right) = v(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y}) - \frac{1}{2\pi} \ln \gamma(\boldsymbol{x}),$$

je-li $n \neq 2$, pak

$$h(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(n-2)c_n} \frac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})^{n-2}} \frac{1}{|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y}|^{n-2}} = \frac{1}{c_n} \frac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})^{n-2}} v(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y}).$$

Poněvadž $\boldsymbol{x'} \notin \bar{\Omega}$, je

$$\Delta_{\boldsymbol{y}} h(\boldsymbol{y}) = 0.$$

Uvedeme některé konkrétní oblast, které mají vlastnost (5.71).

Polorovina a poloprostor $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

V tomto případě je hranicí oblasti Ω přímka, rovina nebo nadrovina $x_n = 0$. Bod sdružený s bodem $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega$ je bod $\boldsymbol{x'} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$.

Vskutku, pro libovolný bod $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, 0) \in \partial\Omega$ je

$$|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + x_n^2} = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|,$$

a tedy $\gamma(\boldsymbol{x}) = 1$ nezávisí na $\boldsymbol{y}$.

Greenova funkce je

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y}|}, & n = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{(n-2)c_n} \left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y}|^{n-2}} - \dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n-2}} \right), & n \neq 2. \end{cases}$$

Jednotkový vektor vnější normály na hranici je $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, \ldots, 0, -1)$. Proto pro $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$ je

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = -\frac{\partial}{\partial y_n},$$

a tedy

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{x_2}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}, & n = 2, \\[2ex] \dfrac{2}{c_n} \dfrac{x_n}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^n}, & n \neq 2. \end{cases}$$

Kruh a koule $\Omega = B_{\boldsymbol{o}}^R = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < R\}$.

Hranicí oblasti je kružnice nebo sféra o poloměru R, kterou značíme $S_{\boldsymbol{o}}^R$. Bod sdružený s bodem $\boldsymbol{x}$ je jeho obraz v kruhové nebo kulové inverzi,

$$\boldsymbol{x'} = \frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}.$$

Pro každý bod $\boldsymbol{y} \in S_{\boldsymbol{o}}^R$ platí $|\boldsymbol{y}| = R$. Dále

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{y}|^2 &= \left|\frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right|^2 = \frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\left|\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x} - \frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|^2 = \frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\sum_{i=1}^n\left(\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}x_i - \frac{|\boldsymbol{x}|}{R}y_i\right)^2 = \\
&= \frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\sum_{i=1}^n\left(\frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}x_i^2 - 2x_iy_i + \frac{|\boldsymbol{x}|^2}{R^2}y_i^2\right) = \frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\left(R^2 - 2\sum_{i=1}^n x_iy_i + |\boldsymbol{x}|^2\right) = \\
&= \frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\sum_{i=1}^n\left(y_i^2 - 2x_iy_i + x_i^2\right) = \frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\sum_{i=1}^n(x_i - y_i)^2 = \frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2.
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\gamma(\boldsymbol{x}) = \dfrac{|\boldsymbol{x}|}{R}$ nezávisí na $\boldsymbol{y}$.

Greenova funkce je

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{R|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}{\left|R^2\boldsymbol{x} - |\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{y}\right|}, & n = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{(n-2)c_n}\left[\left(\dfrac{R|\boldsymbol{x}|}{\left|R^2\boldsymbol{x} - |\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{y}\right|}\right)^{n-2} - \dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n-2}}\right], & n \neq 2. \end{cases}$$

Jednotkový vektor vnější normály v bodě $\boldsymbol{y}$ je $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{R}\boldsymbol{y}$ a derivace ve směru normály v tomto bodě je

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = \frac{R^{n-2}}{|S_{\boldsymbol{o}}^R|}\frac{R^2 - |\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^n};$$

přitom $|S_{\boldsymbol{o}}^R|$ označuje $(n-1)$-rozměrnou míru n rozměrné sféry o poloměru R, tedy

$$|S_{\boldsymbol{o}}^R| = \begin{cases} 2, & n = 1, \\ 2\pi R, & n = 2, \\ 4\pi R^2, & n = 3, \\ \dots & . \end{cases}$$

5.2.4 Vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$. Číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ nazveme *vlastním číslem* a funkci v definovanou na $\overline{\Omega}$ nazveme *vlastní funkcí Dirichletovy úlohy pro Laplaceův operátor*, je-li $v \not\equiv 0$ a platí

$$-\Delta v = \lambda v, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{5.73}$$
$$v(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{5.74}$$

Platí:

- Všechna vlastní čísla Laplaceova operátoru jsou kladná a všechny vlastní funkce jsou nekonstantní.
  Důkaz: Úloha

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, & \boldsymbol{x} &\in \Omega, \\ v(\boldsymbol{x}) &= 0, & \boldsymbol{x} &\in \partial\Omega \end{aligned}$$

má podle 5.2.1 jediné řešení a toto řešení je $v \equiv 0$. Proto 0 není vlastním číslem Laplaceova operátoru. Proto také pro libovolné vlastní číslo λ a libovolnou vlastní funkci v můžeme s využitím prvního Greenova vzorce (C.7) psát

$$0 \;>\; \int\limits_\Omega v^2 \mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{\lambda}\int\limits_\Omega v\lambda v\,\mathrm{d}V \;=\; -\frac{1}{\lambda}\int\limits_\Omega v\Delta v\,\mathrm{d}V \;=$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\left(\int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial v}{\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S - \int\limits_\Omega \nabla v\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V\right) \;=\; \frac{1}{\lambda}\int\limits_\Omega \nabla v\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{\lambda}\left\|\nabla v\right\|^2$$

Poněvadž $\left\|\nabla v\right\|^2$ nemůže být záporné, dostaneme odtud, že $\lambda > 0$ a $\|\nabla v\| > 0$. Každé vlastní číslo je kladné a gradient příslušné vlastní funkce je nenulový. To znamená, že vlastní funkce nemůže být konstantní. □

- Jsou-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vlastní čísla a $v_1,\ v_2$ příslušné vlastní funkce Laplaceova operátoru, pak jsou funkce $v_1,\ v_2$ orthogonální na Ω, tj. platí

$$\int\limits_\Omega v_1 v_2\,\mathrm{d}V \;=\; 0\,.$$

Důkaz: Poněvadž pro $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ je $v_1(\boldsymbol{x}) = 0 = v_2(\boldsymbol{x})$, dostaneme s využitím druhého Greenova vzorce (C.8)

$$\int\limits_\Omega v_1 v_2\,\mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_\Omega (\lambda_1-\lambda_2)v_1v_2\,\mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_\Omega (\lambda_1 v_1 v_2 - v_1\lambda_2 v_2)\mathrm{d}V \;=$$
$$= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_\Omega (-v_2\Delta v_1 + v_1\Delta v_2)\mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(v_1\frac{\partial v_2}{\partial\boldsymbol{\nu}} - v_2\frac{\partial v_1}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S \;=\; 0. \;\square$$

Úloha (5.73), (5.74) je vlastně zobecněním Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (B.2) pro obyčejné diferenciální rovnice. Uvedené jednoduché vlastnosti také odpovídají vlastnostem vlastních čísel a vlastních funkcí Sturmovy-Liouvilleovy úlohy. Obecně však není zaručeno, že by pro úlohu (5.73), (5.74) na obecné oblasti Ω existovala spočetná množina vlastních čísel, posloupnost vlastních čísel by divergovala do nekonečna, každé vlastní číslo by bylo jednoduchého typu, tj. k jednomu vlastnímu číslu by příslušela jediná (až na násobek konstantou) vlastní funkce, a že by tyto funkce tvořily úplnou orthogonální soustavu (bázi) v prostoru funkcí splňujících okrajovou podmínku. Takovou vlastnost mají pouze některé jednoduché oblasti – kvádry, koule, válce, ... Ale tyto oblasti se právě v praxi objevují nejčastěji.

Základní myšlenka řešení úlohy spočívá v separaci proměnných, tj hledání řešení ve tvaru $v = w_1 w_2$, kde funkce w_1 závisí pouze na proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m$ a funkce w_2 pouze na proměnných $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$. Po dosazení tohoto vyjádření do rovnice (5.73) a jednoduché úpravě dostaneme

$$-\frac{\Delta w_1}{w_1} = \frac{\Delta w_2}{w_2} + \lambda,$$

kde Δ označuje součet druhých parciálních derivací podle všech proměnných funkce, která se za tímto operátorem nachází. Levá strana této rovnosti závisí pouze na proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m$, pravá pouze na proměnných $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$. Proto musí být obě strany rovny nějaké konstantě, řekněme κ. Původní úloha se tak rozpadne na dvě „menší“ úlohy

$$-\Delta w_1 = \kappa w_1, \quad \text{a} \quad -\Delta w_2 = (\kappa - \lambda) w_2,$$

s příslušnými „průměty“ homogenních okrajových podmínek.

Pokud má Laplaceův operátor spočetnou množinu vlastních funkcí, které tvoří fundamentální množinu prostoru funkcí splňujících Dirichletovu podmínku, pak můžeme řešení úlohy

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{5.75}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \tag{5.76}$$

hledat ve tvaru nekonečné řady

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(\boldsymbol{x}),$$

kde v_n jsou vlastní funkce Dirichletovy úlohy pro Laplaceův operátor a C_n jsou reálné konstanty, $n = 1, 2, \dots$. Je-li funkce f integrovatelná ve druhé mocnině ($f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$), pak

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\boldsymbol{x}), \quad \text{kde } F_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int\limits_{\Omega} f v_n \mathrm{d}V \text{ a } \|v_n\|^2 = \int\limits_{\Omega} v_n^2 \mathrm{d}V.$$

Buďte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ vlastní čísla příslušná k vlastním funkcím $v_1, v_2, \dots$. Pak je

$$\begin{aligned}
\Delta \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(\boldsymbol{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\boldsymbol{x}), \\
\sum_{n=1}^{\infty} C_n \Delta v_n(\boldsymbol{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\boldsymbol{x}), \\
-\sum_{n=1}^{\infty} C_n \lambda_n v_n(\boldsymbol{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

Odtud

$$C_n = -\frac{F_n}{\lambda_n} = -\frac{1}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int\limits_{\Omega} f v_n \mathrm{d}V.$$

Řešení úlohy (5.75), (5.76) tedy je

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int\limits_{\Omega} f v_n \, \mathrm{d}V \right) v_n(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Omega} f \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{v_n(\boldsymbol{x}) v_n}{\lambda_n \|v_n\|^2} \right) \mathrm{d}V.$$

To znamená, že Greenova funkce Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$$

je

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\boldsymbol{x}) v_n(\boldsymbol{y})}{\lambda_n \|v_n\|^2},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ jsou vlastní čísla a $v_1, v_2, \dots$ jsou vlastní funkce úlohy (5.73), (5.74).

Vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru pro Dirichletovu úlohu na obdélníku

Úlohu

$$\begin{aligned}
-\Delta v(x,y) &= \lambda v(x,y), && 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\
v(x,0) = 0 &= v(x,b), && 0 < x < a, \\
v(0,y) = 0 &= v(a,y), && 0 < y < b
\end{aligned} \tag{5.77}$$

budeme řešit separací proměnných. Funkci $v = v(x,y)$ hledáme ve tvaru $v(x,y) = X(x)Y(y)$.

Po dosazení do rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$-\frac{Y''}{Y} = \lambda + \frac{X''}{X}.$$

Levá strana této rovnosti závisí pouze na proměnné y, pravá pouze na proměnné x; nemohou tedy záviset na žádné z nezávisle proměnných a jsou rovny nějaké konstantě, řekněme κ.

Z levé strany tak dostaneme okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} Y'' + \kappa Y &= 0, \qquad 0 < y < b, \\ Y(0) = 0 &= Y(b), \end{aligned}$$

která má nenulové řešení pouze pro

$$\kappa = \kappa_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

které je dáno předpisem $Y = Y_m(y) = \sin \dfrac{m\pi}{b} y$.

Toto vypočítané κ_m dosadíme do druhé části rovnosti, tj. do rovnosti $\lambda + \dfrac{X''}{X} = \kappa$ a dostaneme okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} X'' + (\lambda - \kappa_m) X &= 0, \qquad 0 < x < a, \\ X(0) = 0 &= X(a), \end{aligned}$$

která má nenulové řešení pouze pro $\lambda = \lambda_{nm}$ takové, že $\lambda_{nm} - \kappa_m = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$, tj. pro

$$\lambda_{nm} = \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right]\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Toto řešení je dáno předpisem $X_{nm}(x) = \sin \dfrac{n\pi}{a} x$.

Celkem tak dostáváme vlastní čísla úlohy (5.77) ve tvaru

$$\lambda_{nm} = \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right]\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \ m = 1, 2, \ldots.$$

Příslušné vlastní funkce jsou

$$v_{nm}(x,y) = \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y.$$

Norma vlastních funkcí je

$$\|v_{nm}\|^2 = \iint\limits_{[0,a]\times[0,b]} \left(\sin \frac{n\pi}{a}\xi \sin \frac{m\pi}{b}\eta\right)^2 \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi}{a}\xi \,\mathrm{d}\xi \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi}{b}\eta \,\mathrm{d}\eta = \frac{a}{2}\frac{b}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Ještě vypočítáme

$$\lambda_{nm} \|v_{nm}\|^2 = \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right]\pi^2 \frac{ab}{4} = \frac{\pi^2}{4} \frac{(ma)^2 + (nb)^2}{ab}$$

a dostaneme Greenovu funkci Laplaceova operátoru pro Dirichletovu úlohu na obdélníku

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{4ab}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2a^2 + n^2b^2} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b} \eta.$$

Dodatek A

Distribuce

A.1 Základní pojmy

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných definovaná na celém prostoru $\mathbb{R}^n$. *Nosič funkce* φ definujeme jako uzávěr množiny $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ a značíme ho $\operatorname{Supp}\varphi$.

Testovací funkce

Symbolem $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ označíme množinu funkcí definovaných na $\mathbb{R}^n$, které jsou třídy C^∞ (mají spojité všechny parciální derivace libovolného řádu) a jejichž nosič je množina A kompaktní v prostoru $\mathbb{R}^n$. Množina funkcí $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ s obvykle definovaným sčítáním funkcí a násobením číslem, tj. $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ a $(c\varphi)(x) = c\varphi(x)$, je vektorovým prostorem. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ značit stručně $\mathcal{D}$.

Na množině $\mathcal{D}$ definujeme metriku ρ vztahem

$$\rho(\varphi,\psi) \;=\; \sup\left\{\left|\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\varphi(\boldsymbol{x})-\psi(\boldsymbol{x}))\right| : \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ (i_1,i_2,\ldots,i_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n\right\}.$$

Množinu $\mathcal{D}$ s touto metrikou nazýváme *prostor testovacích funkcí*, jeho prvky nazýváme *testovací funkce*.

Příklady testovacích funkcí.

Položme

$$\lambda(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & x > 0,\\ 0, & x \le 0.\end{cases}$$

Funkce λ má spojité derivace všech řádů, neboť

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\mathrm{e}^{-1/x^2} = \frac{\text{polynom v } x}{\text{polynom v } x}\mathrm{e}^{-1/x^2} \quad \text{a z toho plyne } \lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\mathrm{e}^{-1/x^2} = 0.$$

Funkce φ definovaná vztahem $\varphi(x) = \lambda(x)\lambda(1-x)$ má kompaktní nosič $[0,1]$ a má derivace všech řádů.

Pro libovolné reálné $c > 0$ položme

$$\kappa_c(x) = \frac{\lambda(x)}{\lambda(x)+\lambda(c-x)}. \tag{A.1}$$

Pak κ_c je neklesající nezáporná funkce, která má derivace všech řádů a platí pro ni

$$\kappa_c(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0,\\ 1, & x > c.\end{cases}$$

Funkce κ_c tedy na intervalu délky c vyhlazuje skok funkčních hodnot.

Funkce ψ definovaná vztahem

$$\psi(x) = 1 - \kappa_c\left(|x| - \tfrac{1}{2}\right)$$

je nezáporná funkce, která má derivace všech řádů a

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{1}{2} + c, \\ 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

a tedy má kompaktní nosič $[-\frac{1}{2} - c, \frac{1}{2} + c]$.

Funkce φ, ψ jsou typické testovací funkce z prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Testovací funkce z prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ můžeme získat jako součin funkcí „jednorozměrných“, např.

$$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n), \quad \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_1)\psi(x_2)\cdots\psi(x_n).$$

Operace v prostoru testovacích funkcí

Kromě standardních operací součtu a součinu funkcí a násobení funkce číslem zavádíme operace:

- *Posunutí (translace)* testovací funkce o vektor $\boldsymbol{y}$ je definována vztahem $\varphi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.
- *Změna měřítka (přeškálování)* nezávisle proměnné faktorem $\alpha > 0$ je definováno vztahem $\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) = \varphi(\alpha\boldsymbol{x})$.

Pomocí těchto operací můžeme snadno vytvářet další testovací funkce ze známých.

Lineární funkcionál

Zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$T(\varphi + \psi) = T(\varphi) + T(\psi), \quad T(c\varphi) = cT(\varphi),\ c \in \mathbb{R}$$

nazýváme *lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí*. Obraz funkce φ při zobrazení T, tj. číslo $T(\varphi)$, budeme stručně značit $T\varphi$.

Množinu všech lineárních funkcionálů $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, která je zase vektorovým prostorem, nazýváme *(algebraický) duální prostor k* $\mathcal{D}$ a značíme ji $\mathcal{D}'$.

Definice distribuce

Spojitý lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí se nazývá *distribuce*.

Podrobněji: Zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazveme distribuce, jestliže

$(\forall\varphi, \psi \in \mathcal{D})\ T(\varphi + \psi) = T\varphi + T\psi$,
$(\forall\varphi \in \mathcal{D})\,(\forall c \in \mathbb{R})\ T(c\varphi) = cT\varphi$,
$(\forall\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D})\,(\forall\varphi \in \mathcal{D})\ \varphi_n \to \varphi$ v prostoru $(\mathcal{D}, \rho)$ $\Rightarrow$ $T\varphi_n \to T\varphi$ v $\mathbb{R}$ s přirozenou metrikou.

Množinu všech lineárních funkcionálů $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazýváme *topologický duální prostor k* $\mathcal{D}$ a značíme ji $\mathcal{D}^*$.

Příklady distribucí

1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každou kompaktní množinu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existuje konečný integrál $\int_K f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ (tzv. *lokálně integrabilní funkce na* $\mathbb{R}^n$). Definujme distribuci $T_f \in \mathcal{D}^*$ vztahem
$$T_f\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,. \tag{A.2}$$

Distribuce $T \in \mathcal{D}^*$ taková, že existuje lokálně integrabilní funkce f pro niž

$$T\varphi = \int\limits_{-\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

pro všechny $\varphi \in \mathcal{D}$, se nazývá *regulární distribuce*. Distribuce, která není regulární, se někdy nazývá *singulární*.
Každá lokálně integrabilní funkce určuje distribuci, můžeme tedy lokálně integrabilní funkce považovat za distribuce[1]. Z tohoto důvodu se distribuce někdy nazývají *zobecněné funkce*.

2. Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je lokálně integrabilní na otevřeném intervalu $(0, \infty)$, ale není lokálně integrabilní na celém $\mathbb{R}$. Avšak pro všechna a, b, $a < 0 < b$ je

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int\limits_a^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\ln \frac{\varepsilon}{|a|} + \ln \frac{b}{\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln \frac{b}{|a|} = \ln \frac{b}{|a|}.$$

Tuto limitu označíme $\mathrm{vp} \int\limits_a^b \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ a nazveme *integrál ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty.*
Tuto úvahu zobecníme. Nechť funkce f je lokálně integrabilní na $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$. Položme

$$B^r_{\boldsymbol{x}_0} = \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < r\}$$

(otevřená koule se středem $\boldsymbol{x}_0$ a poloměrem r). Integrál z funkce f ve smyslu hlavní hodnoty definujeme jako

$$\mathrm{vp} \int\limits_K f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{K\setminus B^{\varepsilon}_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

pokud limita na pravé straně existuje.
Má-li funkce f pro každou kompaktní množinu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ integrál ve smyslu hlavní hodnoty, pak zobrazení $T_f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definované vztahem

$$T_f\varphi = \mathrm{vp} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{A.3}$$

je distribucí.

3. *Diracova distribuce* δ přiřadí každé testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ hodnotu $\varphi(0)$.
Diracova distribuce není regulární.

Výrazy na pravých stranách rovností (A.2) a (A.3) formálně připomínají skalární součin. Proto hodnoty těchto distribucí zapisujeme ve tvaru

$$\langle\, f(\boldsymbol{x}) \,|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,\rangle, \text{ nebo stručně } \langle\, f \,|\, \varphi \,\rangle$$

Přestože Diracova distribuce není regulární ani není definována pomocí nějaké (klasické) funkce, používáme pro ni zápis

$$\langle\, \delta \,|\, \varphi \,\rangle \;=\; \langle\, \delta(\boldsymbol{x}) \,|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,\rangle \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \;=\; \varphi(0)\,.$$

[1] Povšimněme si, že dvě různé funkce mohou určovat tutéž distribuci; konkrétně jde o funkce, které se od sebe liší na množině nulové míry. Funkce f a g takové, že $\int\limits_K f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x = \int\limits_K g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x$ pro každou kompaktní $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou pro určení regulární distribuce ekvivalentní. Přesněji bychom tedy měli říkat, že ztotožňujeme distribuce a třídy ekvivalentních funkcí.

Podobným způsobem budeme zapisovat jakékoliv distribuce. V Diracově terminologii je tedy distribuce bravektorem a testovací funkce ketvektorem. Diracovu distribuci $\langle \delta$ budeme jednoduše psát jako δ, případně $\delta(\boldsymbol{x})$ pro zdůraznění nezávisle proměnné testovacích funkcí.

Symbolem $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ označme množinu lokálně integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^n$ (přesněji, množinu tříd ekvivalentních lokálně integrabilních funkcí). Testovací funkce jakožto spojité funkce jsou lokálně integrabilní. Určují tedy regulární distribuce. Platí tedy

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n).$$

Nosič distribuce

Řekneme, že distribuce $T \in \mathcal{D}^*$ je na množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *nulová*, jestliže $T\varphi = 0$ pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ takovou, že $\operatorname{Supp} \varphi \subseteq A$.

Nosič distribuce T je nejmenší (vzhledem k množinové inklusi) uzavřená množina taková, že na jejím komplementu je T nulová. Nosič distribuce T označíme $\operatorname{Supp} T$.

Nosič Diracovy distribuce je jednoprvková množina $\{0\}$.

Základní operace v prostoru distribucí

- *Součet distribucí* $T, S \in \mathcal{D}^*$:
  $T + S \in \mathcal{D}^*$ je distribuce, která splňuje rovnost

  $$(T + S)\varphi = T\varphi + S\varphi$$

  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.

- *Násobení distribuce* $T \in \mathcal{D}^*$ *funkcí* $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *třídy* C^∞:
  Je-li $\varphi \in \mathcal{D}$ testovací funkce, pak φ má kompaktní nosič. To znamená, že také funkce $a\varphi$ má kompaktní nosič, tedy $a\varphi \in \mathcal{D}$.
  $aT \in \mathcal{D}'$ je distribuce, která splňuje rovnost

  $$(aT)\varphi = T(a\varphi)$$

  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.

- *Posunutí (translace) distribuce* $T \in \mathcal{D}$ o vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:
  ${}^{\boldsymbol{y}}T \in \mathcal{D}^*$ je distribuce, která splňuje rovnost

  $${}^{\boldsymbol{y}}T\varphi = T\varphi_{\boldsymbol{y}}$$

  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.
  Pro regulární distribuci určenou funkcí f platí

  $$\left({}^{\boldsymbol{y}}T_f\right)\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z};$$

  v integrálu jsme použili substituci $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

S pomocí Diracovy symboliky můžeme definice operací s distribucemi zapsat ve tvaru:

- Součet: $\left\langle f + g \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \left\langle f \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \left\langle f \,\middle|\, \varphi \right\rangle + \left\langle g \,\middle|\, \varphi \right\rangle$

- Násobek funkcí: $\left\langle af \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \left\langle f \,\middle|\, a\varphi \right\rangle$

- Translace: $\left\langle f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \right\rangle = \left\langle f(\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \right\rangle$

Zejména pro Diracovu distribuci platí

$$\left\langle\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,\right\rangle = \left\langle\, \delta(\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \,\right\rangle = \varphi(\boldsymbol{y}), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{y});$$

$$\left\langle\, \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{z})\varphi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \varphi(\boldsymbol{y}).$$

Translace Diracovy distribuce o vektor $\boldsymbol{y}$, tedy distribuce zapisovaná jako $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ se nazývá *Diracova distribuce soustředěná v bodě* $\boldsymbol{y}$. Přitom platí

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}). \tag{A.4}$$

A.2 Konvergence v prostoru distribucí

Řekneme, že posloupnost distribucí $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}^*$ *konverguje pro $k \to \infty$ k distribuci* $T \in \mathcal{D}^*$ a píšeme

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T\,,$$

jestliže pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ je $\lim\limits_{k\to\infty} T_k\varphi = T\varphi$ (v tomto případě jde o konvergenci číselných posloupností).

Definici lze zapsat také v Diracově symbolice: Řekneme, že posloupnost distribucí $\{\langle f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje pro $k \to \infty$ k distribuci $\langle f$ a píšeme $\lim\limits_{k\to\infty} \langle f_k = \langle f$, jestliže pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}^*$ je $\lim\limits_{k\to\infty} \left\langle\, f_k \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle = \left\langle\, f \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle$.

Pro konvergenci v prostoru distribucí platí následující věty:

Věta 1: Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}^*$ je posloupnost distribucí taková, že pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ existuje limita posloupnosti čísel $\{T_k\varphi\}_{k=1}^{\infty}$. Definujme zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$T(\varphi) \;=\; \lim_{k\to\infty} T_k\varphi\,.$$

Pak T je distribuce, $T \in \mathcal{D}^*$.

Linearita plyne z linearity každé z distribucí T_k a z linearity operátoru limity posloupností), spojitost je dokázána např. v knize: Laurent Schwartz. *Théorie des distributions,* Paris 1973.

Věta 2: Ke každé distribuci $T \in \mathcal{D}^*$ existuje posloupnost testovacích funkcí $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}$, že

$$\lim_{k\to\infty} \langle \varphi_k = T, \quad \text{neboli } \big(\forall \varphi \in \mathcal{D}\big) \lim_{k\to\infty} \left\langle\, \varphi_k \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle = T\varphi.$$

tj. že tato posloupnost testovacích funkcí konverguje k T ve smyslu distribucí.

Každou distribuci lze aproximovat pomocí posloupnosti testovacích funkcí.

A.2.1 δ-vytvořující posloupnosti

Nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost lokálně integrabilních funkcí na $\mathbb{R}^n$ takových, že posloupnost regulárních distribucí $\{T_{f_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k Diracově distribuci, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle\, f_k \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle = \varphi(0)$$

pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$. Pak posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *δ-vytvořující posloupnost*, funkce f_k se nazývají *impulsní funkce.*

Příklady δ-vytvořujících posloupností:

Následující posloupnosti funkcí konvergují k Diracově distribuci na prostoru $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$.

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & |x| \le \frac{1}{2k} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2k} \end{cases}, \qquad f_k(x) = \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \le \frac{1}{k} \\ 0, & |x| > \frac{1}{k} \end{cases},$$

$$f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-kx^2/2}, \qquad f_k(x) = \frac{\sin kx}{\pi x},$$

$f_k(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\alpha_k}{x^2 + \alpha_k^2}$, kde $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost kladných čísel taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$,

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} + \dfrac{2}{\ell} \sum\limits_{m=1}^{k} \cos \dfrac{2\pi m}{\ell} x, & |x| \le \frac{1}{2}\ell \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}\ell \end{cases}.$$

Na obrázcích A.1 je znázorněno několik prvních členů některých δ-vytvořujících posloupností.

A.3 Derivování distribucí

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná (a tedy lokálně integrabilní) funkce, $\varphi \in \mathcal{D}$ je testovací funkce. Pak platí

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left([f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})]_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

poněvadž $\operatorname{Supp}\varphi$ je kompaktní.

Provedený výpočet motivuje následující definici.

Definice derivace distribuce

Parciální derivace distribuce $T \in \mathcal{D}^*$ podle první proměnné je distribuce $\dfrac{\partial}{\partial x_1}T$, pro niž platí

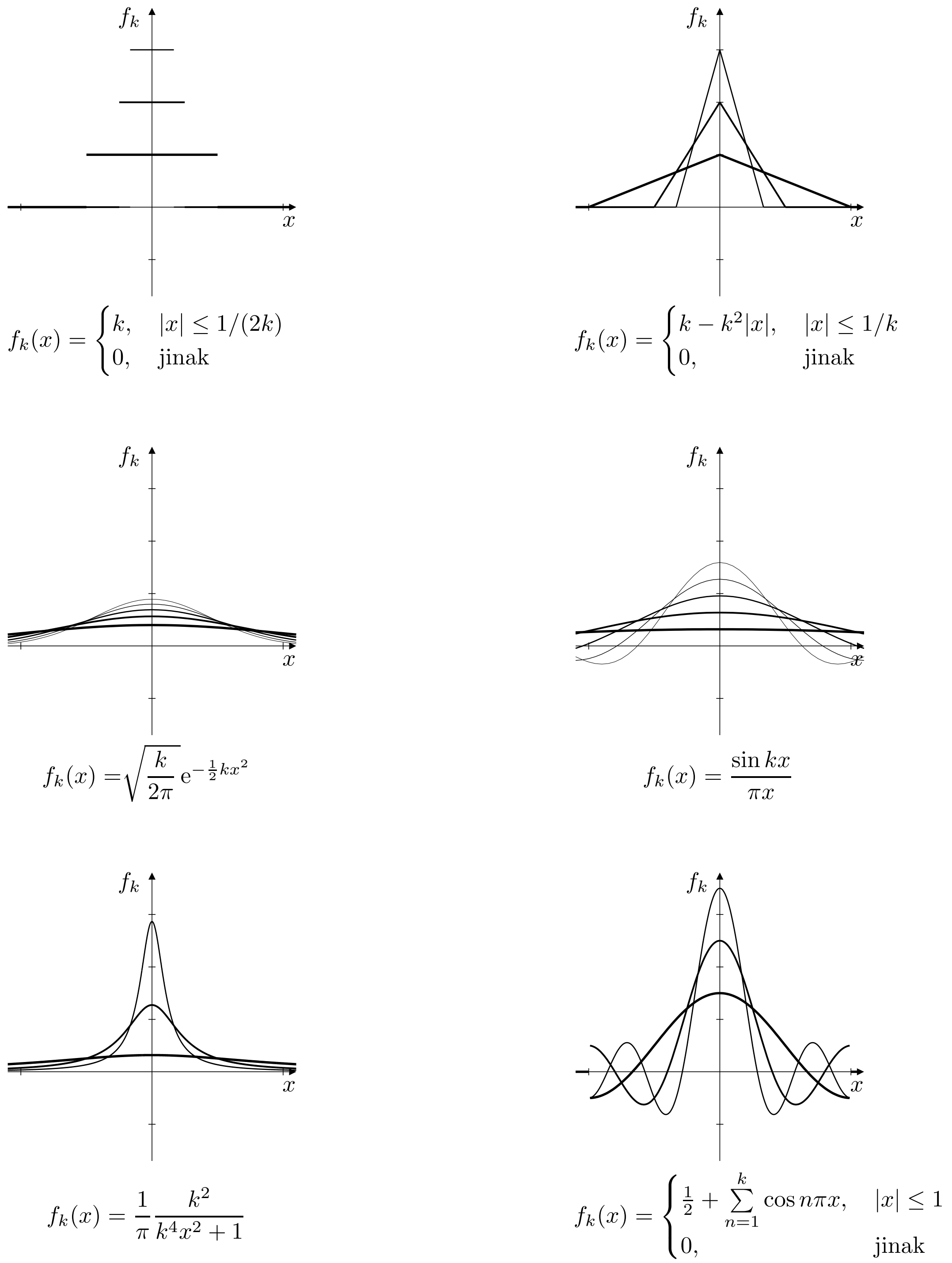
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}T\right)\varphi = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)$$

pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.

Obecně definujeme parciální derivace distribuce podle libovolných proměnných libovolného řádu rovností

$$\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}T\right)\varphi = (-1)^{i_1+i_2+\cdots i_n} T\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}\varphi\right)$$

pro každou testovací funkci φ a každý multiindex $(i_1, i_j, \ldots, i_n) \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^n$. Je zřejmé, že parciální derivace distribuce je lineární operátor na prostoru distribucí $\mathcal{D}^*$.



Obrázek A.1: Příklady δ-vytvořujících posloupností na prostoru $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$. S rostoucím k se zmenšuje síla čáry.

Každá distribuce má derivace libovolného řádu.

Každá lokálně integrabilní funkce f určuje regulární distribuci. Tato distribuce má derivaci libovolného řádu definovanou rovností

$$\left\langle \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = (-1)^{i_1+i_2+\cdots i_n} \left\langle f \,\middle|\, \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} \varphi \right\rangle$$

V tomto smyslu lze říci, že každá lokálně integrabilní funkce f má derivaci libovolného řádu. Tato distribuce však obecně není funkcí ale distribucí. Nazýváme ji *distributivní derivací funkce f*.

Příklady distributivních derivací funkcí

- **Derivace absolutní hodnoty:**
  Pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ platí

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}|x| \,\middle|\, \varphi(x) \right\rangle = -\left\langle\, |x| \,\middle|\, \varphi'(x) \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{\infty} x\varphi'(x)\mathrm{d}x = \big[x\varphi(x)\big]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x - \big[x\varphi(x)\big]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

  tedy $\dfrac{\partial}{\partial x}|x| = \operatorname{sgn} x$ ve smyslu distribucí.

- **Heavisidova skoková funkce (distribuce):**
  Funkce $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$H(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

  je lokálně integrabilní. Určuje tedy regulární distribuci, pro niž platí

$$\left\langle H \,\middle|\, \varphi \right\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

  Povšimněme si, že Heavisidova funkce je limitou funkcí $\kappa_{1/k}$ definovaných vztahem (A.1); tuto limitu můžeme chápat tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} \kappa_{1/k}(x) = H(x)$ pro každé $x \neq 0$, nebo, při použití Diracovy symboliky, že $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \kappa_{1/k} = \langle H$ ve smyslu distribucí. Dále platí

$$\left\langle H' \,\middle|\, \varphi \right\rangle \;=\; -\left\langle H \,\middle|\, \varphi' \right\rangle \;=\; -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x \;=\; -\left[\varphi(x)\right]_{0}^{\infty} \;=\; \varphi(0) \;=\; \left\langle \delta \,\middle|\, \varphi \right\rangle\,,$$

  tedy distributivní derivací Heavisidovy funkce H je Diracova distribuce, $H' = \delta$, podrobněji $H'(x) = \delta(x)$. Analogicky lze ukázat, že $H'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$ a $H'(x_0 - x) = -\delta(x - x_0)$.

  Obecně: Funkce $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

určuje regulární distribuci:

$$\begin{aligned}\left\langle H \,\middle|\, \varphi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} H(x_1,x_2,\ldots,x_n)\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\,.\end{aligned}$$

Z výpočtu $\left\langle \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}H \,\middle|\, \varphi \right\rangle =$

$$\begin{aligned}&= (-1)^n\left\langle H \,\middle|\, \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}\varphi \right\rangle = \\ &= (-1)^n\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \\ &= (-1)^n\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2\partial x_3\cdots\partial x_n}\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right]_{x_1=0}^{\infty}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n = \\ &= -(-1)^n\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2\partial x_3\cdots\partial x_n}\varphi(0,x_2,x_3,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n = \cdots = \\ &= (-1)^{2n}\varphi(0,0,\ldots,0) = \varphi(0,0,\ldots,0)\,,\end{aligned}$$

nyní plyne, že distributivní derivace $\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}H$ určuje Diracovu distribuci na prostoru $\mathbb{R}^n$.

Distributivní derivace funkcí jedné proměnné

Nechť funkce f je spojitá na každém z intervalů $(-\infty,0)$, (0∞) a existuje

$$\sigma_0 = \lim_{x\to 0+} f(x) - \lim_{x\to 0-} f(x).$$

Pak je tato funkce lokálně integrabilní na $\mathbb{R}$, určuje tedy regulární distribuci T_f. Pro každou testovací funkci $\varphi\in\mathcal{D}$ platí

$$\begin{aligned}T_f'\varphi &= -\left\langle f(x) \,\middle|\, \varphi'(x) \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{0} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \\ &= -\left[f(x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \left[f(x)\varphi(x)\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{x\to 0+} f(x)\varphi(x) - \lim_{x\to 0-} f(x)\varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \\ &= \varphi(0)\left(\lim_{x\to 0+} f(x) - \lim_{x\to 0-} f(x)\right) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \\ &= \sigma_0\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \sigma_0\left\langle \delta \,\middle|\, \varphi \right\rangle + \left\langle f' \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \sigma_0\left\langle \delta \,\middle|\, \varphi \right\rangle + T_{f'}\varphi\,,\end{aligned}$$

tj.

$$(\forall\varphi\in\mathcal{D})\left\langle\frac{\partial}{\partial x}f\,\middle|\,\varphi\right\rangle=\sigma_0\left\langle\delta\,\middle|\,\varphi\right\rangle+\left\langle f'\,\middle|\,\varphi\right\rangle,\quad\text{symbolicky } T_f'=\sigma_0\delta+T_{f'}\,.$$

Obecně: Nechť funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je třídy C^∞ na každém z intervalů $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$ a nechť každá její derivace je lokálně integrabilní. Tato funkce určuje regulární distribuci T_f.

Označme

$$\sigma_m=\lim_{x\to 0+}f^{(m)}(x)-\lim_{x\to 0-}f^{(m)}(x)\quad\text{a}\quad T_f'=\frac{\partial}{\partial x}T,\ T_f''=\frac{\partial^2}{\partial x^2}T\ \ldots,\ T_f^{(k)}=\frac{\partial^k}{\partial x^k}T.$$

Pak pro každou testovací funkci $\varphi\in\mathcal{D}$ platí

$$\left\langle\frac{\partial^k}{\partial x^k}f\,\middle|\,\varphi\right\rangle=\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^{k-m-1}\sigma_m\left\langle\delta\,\middle|\,\varphi^{(k-m-1)}\right\rangle+\left\langle f^{(k)}\,\middle|\,\varphi\right\rangle,$$

tj.

$$T_f^{(k)}\varphi\ =\ \sum_{m=0}^{k-1}(-1)^{k-m-1}\sigma_m\varphi^{(k-m-1)}(0)+\int_{-\infty}^{\infty}f^{(k)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

Symbolicky

$$T_f^{(k)}\ =\ \sum_{m=0}^{k-1}\sigma_m\delta^{(k-m-1)}+T_{f^{(k)}}\,.$$

Greenova funkce hyperbolické rovnice v jedné prostorové proměnné

Nechť $a>0$. Pro všechna $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ a libovolný reálný parametr ξ definujme

$$G(x,\xi,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & x-at<\xi<x+at,\\[2mm] 0, & \text{jinak;}\end{cases}$$

povšimněme si také, že pro $t\le 0$ je $G(x\xi,t)=0$. Vypočítáme distributivní derivaci $\dfrac{\partial}{\partial t}G(x,\xi,t)$.

Pro každou testovací funkci $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ platí

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}G(x,\xi,t)\,\middle|\,\varphi(t,x)\right\rangle=-\left\langle G(x,\xi,t)\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\right\rangle=$$
$$=-\int_{\mathbb{R}^2}G(x,\xi,t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=-\frac{1}{2a}\int_A\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Množina $A\subseteq\mathbb{R}^2$ je taková, že na ní je funkce $G(\,\cdot\,,\xi,\,\cdot\,)$ nenulová, tj.

$$A=\big\{(t,x)\in\mathbb{R}^2:\,0<t,\ \xi-at<x<\xi+at\big\}=$$
$$=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2:\,x<\xi,\ \frac{\xi-x}{a}<t\right\}\cup\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2:\,\xi\le x,\ \frac{x-\xi}{a}<t\right\}.$$

Podle Fubiniovy věty tedy můžeme poslední integrál rozepsat ve tvaru

$$-\frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\left(\int_{\frac{\xi-x}{a}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x+\int_{\xi}^{\infty}\left(\int_{\frac{x-\xi}{a}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right]=$$
$$=-\frac{1}{2a}\left[-\int_{-\infty}^{\xi}\varphi\left(\frac{\xi-x}{a},x\right)\mathrm{d}x-\int_{\xi}^{\infty}\varphi\left(\frac{x-\xi}{a},x\right)\mathrm{d}x\right].$$

V prvním z integrálů zavedeme substituci $s = \dfrac{\xi - x}{a}$ a upravíme ho

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\xi} \varphi\left(\frac{\xi - x}{a}, x\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{\infty}^{0} \varphi(s, \xi - as)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \varphi(s, \xi - as)\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta\big(x - (\xi - as)\big)\varphi(s, x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} H(t)\delta\big(x - (\xi - at)\big)\varphi(t, x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\langle H(t)\delta\big(x - (\xi - at)\big) \,\big|\, \varphi(t, x)\right\rangle .$$

Ve druhém z integrálů zavedeme substituci $s = \dfrac{x - \xi}{a}$ a upravíme ho analogickým způsobem

$$\frac{1}{2a}\int_{\xi}^{\infty} \varphi\left(\frac{x - \xi}{a}, x\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left\langle H(t)\delta\big(x - (\xi + at)\big) \,\big|\, \varphi(t, x)\right\rangle .$$

Celkem tak dostáváme

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}G(x, \xi, t) \,\middle|\, \varphi(t, x)\right\rangle =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\langle H(t)\delta\big(x - (\xi - at)\big) \,\big|\, \varphi(t, x)\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle H(t)\delta\big(x - (\xi + at)\big) \,\big|\, \varphi(t, x)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \tfrac{1}{2}\Big(\delta\big(x - (\xi - at)\big) + \delta\big(x - (\xi + at)\big)\Big)H(t) \,\middle|\, \varphi(t, x)\right\rangle ,$$

a tedy s využitím vztahu (A.4) můžeme psát, že

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x, \xi, t) = \tfrac{1}{2}\big(\delta(x + at - \xi) + \delta(x - at - \xi)\big)H(t) = \tfrac{1}{2}\Big(\delta\big(\xi - (x + at)\big) + \delta\big(\xi - (x - at)\big)\Big)H(t)$$

ve smyslu distribucí.

Cvičení

1) Vypočítejte druhou distributivní derivaci funkce $f(x) = |x|$.
2) Nechť H je Heavisidova funkce a položme $x_+ = xH(x)$, $x_- = -xH(-x)$. Vypočítejte distributivní derivace těchto funkcí.
3) Určete distribuci $x^n\delta^{(n)}(x)$
4) Funkce G proměnných t a x s parametrem ξ je dána výrazem

$$G(x, \xi, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & |x - at| < \xi < x + at, \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$$

jedná se o Greenovu funkci pro hyperbolickou rovnici na polopřímce s Dirichletovou okrajovou podmínkou. Vypočítejte distributivní derivaci $\dfrac{\partial}{\partial t}G(x, \xi, t)$.

Výsledky: 1) $2\delta(x)$ **2)** $x_+' = H(x)$, $x_-' = -H(-x)$ **3)** $(-1)^n n!\delta(x)$
4) $\tfrac{1}{2}\big(\delta(x + at - \xi) + \delta(x - at - \xi) - \delta(-x + at - \xi) - \delta(-x - at - \xi)\big)H(x)H(t)$

Dodatek B

Okrajové úlohy pro obyčejné lineární rovnice druhého řádu

B.1 Formulace úloh

Označme $C^k(\alpha, \beta)$ množinu funkcí k-krát diferencovatelných na intervalu (α, β). O interval (α, β) předpokládáme, že je nedegenerovaný, tj. $\alpha < \beta$. Interval (α, β) může být omezený nebo neomezený, tedy $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Diferenciální operátor

Buďte $a, b, c \in C^0(\alpha, \beta)$ a $a(x) \neq 0$ pro $x \in (\alpha, \beta)$. *Lineární diferenciální operátor druhého řádu* $L = L(a, b, c) : C^2(\alpha, \beta) \to C^0(\alpha, \beta)$ definujeme předpisem

$$Ly(x) = a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Rovnice

$$Ly = g,$$

kde $g \in C^0(\alpha, \beta)$ je lineární diferenciální rovnice druhého řádu; v případě $g \equiv 0$ homogenní, v opačném nehomogenní.

Buďte $p \in C^1(\alpha, \beta)$, $q \in C^0(\alpha, \beta)$. Pak operátor $L(-p, -p', q)$ daný vztahem

$$L(-p, -p', q)y(x) = -p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x)$$

nazveme *samoadjungovaný*. Každý lineární diferenciální operátor druhého řádu $L(a, b, c)$, pro jehož koeficienty a, b platí

$$b(x) = a'(x), \quad x \in (\alpha, \beta)$$

je samoadjungovaný. Rovnice

$$-\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (\alpha, \beta)$$

se nazývá *samoadjungovaná* nebo *Sturmova-Liouvilleova* rovnice.

Tvrzení 8. Každou lineární diferenciální rovnici s koeficientem $a \in C^1(\alpha, \beta)$ lze vyjádřit v samoadjungovaném tvaru.

Důkaz: Buď

$$h(x) = \int \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)} \mathrm{d}x, \quad \varrho(x) = \mathrm{e}^{h(x)}.$$

Pak

$$(\varrho(x)a(x))' = \left(e^{h(x)}a(x)\right)' = e^{h(x)}h'(x)a(x) + e^{h(x)}a'(x) =$$
$$= \varrho(x)\frac{b(x)-a'(x)}{a(x)}a(x) + \varrho(x)a'(x) = \varrho(x)b(x),$$

tedy

$$\varrho(x)a(x)y''(x) + \varrho(x)b(x)y'(x) + \varrho(x)c(x)y(x) = \varrho(x)g(x)$$

je samoadjungovaná rovnice, $p = -\varrho a$, $q = \varrho c$, $f = \varrho g$. □

Okrajové podmínky

Budeme hledat řešení rovnice

$$Ly = f,$$

na intervalu (α, β), které splňuje některé z následujících podmínek.

- *Dirichletovy podmínky*:
$$y(\alpha) = y_0, \qquad y(\beta) = y_1,$$
pokud $-\infty < \alpha < \beta < \infty$,
$$\lim_{x\to\alpha+} y(x) = y_0, \qquad \lim_{x\to\beta-} y(x) = y_1$$
obecně.
- *Neumannovy podmínky*:
$$y'(\alpha) = Y_0, \qquad y'(\beta) = Y_1,$$
pokud $-\infty < \alpha < \beta < \infty$,
$$\lim_{x\to\alpha+} y'(x) = Y_0, \qquad \lim_{x\to\beta-} y'(x) = Y_1$$
obecně.
- *Robinovy (Newtonovy) podmínky*:
$$\alpha_0 y(\alpha) + \beta_0 y'(\alpha) = \eta_0, \qquad \alpha_1 y(\beta) + \beta_1 y'(\beta) = y_1,$$
pokud $-\infty < \alpha < \beta < \infty$,
$$\lim_{x\to\alpha+} \big(\alpha_0 y(x) + \beta_0 y'(x)\big) = \eta_0, \qquad \lim_{x\to\beta-} \big(\alpha_1 y(x) + \beta_1 y'(x)\big) = \eta_1$$
obecně; přitom platí $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0 \neq \alpha_1^2 + \beta_1^2$.
- *Podmínky omezenosti*:
$$\limsup_{x\to\alpha+} |y(x)| < \infty, \qquad \limsup_{x\to\beta-} |y(x)| < \infty.$$
- *Podmínky periodičnosti (periodické podmínky)*:
$$y(\alpha) = y(\alpha), \quad y'(\beta) = y'(\beta),$$
pokud $-\infty < \alpha < \beta < \infty$,
$$y(x) = y(x+l), \text{ pro každé } x \in \mathbb{R},\ x > \alpha,$$
pokud $\beta = \infty$; přitom $l > 0$.

Dirichletovy podmínky jsou zvláštním případem podmínek Robinových pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$; Neumannovy podmínky jsou zvláštním případem Robinových podmínek pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

Podmínky různého typu lze kombinovat; můžeme například požadovat splnění Neumanovy podmínky v levém krajním bodě a podmínky omezenosti v pravém krajním bodě.

Jakékoliv okrajové podmínky nazveme *homogenní*, jestliže s libovolnými dvěma funkcemi y_1, y_2, které této podmínce vyhovují, vyhovuje téže podmínce i jejich libovolná lineární kombinace $k_1y_1 + k_2y_2$.

Robinovy podmínky s $y_0 = y_1 = 0$, podmínky periodičnosti i podmínky omezenosti s $y_1 = 0$ nebo $y_0 = 0$ jsou homogenní.

Okrajová úloha, v níž rovnice i okrajové podmínky jsou homogenní se nazývá *homogenní okrajová úloha*, v opačném případě *nehomogenní okrajová úloha*.

Symetrický diferenciální operátor

Řekneme, že *operátor L je symetrický na množině $M \subseteq C^2(\alpha, \beta)$*, jestliže pro všechny $u, v \in M$ platí

$$\int_\alpha^\beta Lu(x)v(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_\alpha^\beta u(x)Lv(x)\mathrm{d}x\,.$$

Buď $L = L(-p, -p', q)$ samoadjungovaný operátor. Pak platí (při výpočtu využíváme integraci „per partes“, pokud je některá z integračních mezí nevlastní, při výpočtu uvažujeme příslušnou jednostrannou limitu)

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta Lu(x)v(x)\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta u(x)Lv(x)\mathrm{d}x = \\
&\quad= \int_\alpha^\beta \Big[\Big(- \big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x)\Big)v(x) - u(x)\Big(- \big(p(x)v'(x)\big)' + q(x)v(x)\Big)\Big]\,\mathrm{d}x \;= \\
&\quad= \int_\alpha^\beta \Big(\big(p(x)v'(x)\big)'u(x) - \big(p(x)u'(x)\big)'v(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \\
&\quad= [p(x)v'(x)u(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta p(x)v'(x)u'(x)\mathrm{d}x - [p(x)u'(x)v(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta p(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \\
&\quad= p(\beta)v'(\beta)u(\beta) - p(\alpha)v'(\alpha)u(\alpha) - p(\beta)u'(\beta)v(\beta) + p(\alpha)u'(\alpha)v(\alpha) = \\
&\quad= p(\beta)\big(v'(\beta)u(\beta) - u'(\beta)v(\beta)\big) - p(\alpha)\big(v'(\alpha)u(\alpha) - u'(\alpha)v(\alpha)\big).
\end{aligned}$$

Z tohoto výpočtu plyne:

- Samoadjungovaný operátor $L = L(-p, -p', q)$ je symetrický na množině funkcí, které splňují homogenní Robinovy podmínky.
  Důkaz: Je-li $\beta_0 \neq 0$, pak $u'(0) = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}u(0), v'(\alpha) = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}v(\alpha)$, takže
  $v'(\alpha)u(\alpha) - u'(\alpha)v(\alpha) = 0$.
  Je-li $\alpha_0 \neq 0$, pak $u(\alpha) = -\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}u'(\alpha), v(\alpha) = -\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}v'(\alpha)$, takže opět $v'(\alpha)u(\alpha) - u'(\alpha)v(\alpha) = 0$.
  Analogicky ověříme, že $v'(\beta)u(\beta) - u'(\beta)v(\beta) = 0$. □

- Pokud funkce p je l-periodická, přičemž $l = \beta - \alpha$, pak samoadjungovaný operátor $L = L(-p, -p', q)$ je symetrický na množině l-periodických funkcí.

B.2 Homogenní okrajová úloha s parametrem

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$. Uvažujme homogenní okrajovou úlohu pro rovnici

$$Lv(x) = \lambda v(x).$$

Tato úloha má vždy *triviální řešení* $v \equiv 0$. Pokud existuje netriviální řešení $v = v(x)$, nazveme ho *vlastní funkcí okrajové úlohy* a parametr λ nazveme *vlastním číslem operátoru* L.

Je-li λ vlastní číslo operátoru L a $v = v(x)$ je příslušná vlastní funkce uvažované okrajové úlohy, pak také funkce cv je pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$ vlastní funkcí.

Jestliže vlastnímu číslu λ odpovídá k lineárně nezávislých vlastních funkcí, řekneme, že λ je *k-násobné vlastní číslo*.

Příklady:

Uvažujme samoadjungovaný operátor $L = L(-a^2, 0, 0)$, kde a je nějaká nenulová konstanta. Rovnici

$$-a^2 y''(x) = \lambda y(x) \tag{B.1}$$

můžeme přepsat na tvar

$$y''(x) + \frac{\lambda}{a^2} y(x) = 0.$$

Řešení této homogenní lineární rovnice druhého řádu závisí na znaménku parametru λ. Obecné řešení rovnice je dáno vztahem

$$y(x) = \begin{cases} A \exp\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|} x\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|} x\right), & \lambda < 0, \\ Ax + B, & \lambda = 0, \\ A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} x + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} x, & \lambda > 0, \end{cases}$$

kde A, B jsou nějaké konstanty.

1) Hledáme řešení rovnice (B.1) na intervalu $(0, l)$, které splňuje Dirichletovy homogenní okrajové podmínky

$$y(0) = 0 = y(l).$$

Je-li $\lambda = 0$, pak má platit

$$y(0) = 0 = B, \quad y(l) = 0 = Al + B,$$

takže $B = 0$ a v důsledku toho také $A = 0$ a rovnice má pouze triviální řešení.

Je-li $\lambda < 0$, pak má platit

$$y(0) = 0 = A + B, \quad \text{tj. } B = -A, \qquad y(l) = 0 = Ae^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|} l} - Ae^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|} l} = 2A \sinh \frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|} l;$$

pro $-\lambda > 0$ je však $\sinh \frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|} l > 0$ a z toho plyne, že $A = 0$. Rovnice (B.1) má opět pouze triviální řešení.

Je-li $\lambda > 0$, pak má platit

$$y(0) = 0 = A, \qquad y(l) = 0 = B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} l.$$

Odtud plyne, že $\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|} l = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, tedy $\lambda = \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots$, neboť $\lambda > 0$.

Vlastní čísla operátoru $L(-a^2,0,0)$ s homogenními Dirichletovými podmínkami na intervalu $(0,l)$ a příslušné vlastní funkce jsou

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x,\ k = 1,2,3,\ldots .$$

2) Nyní hledáme řešení rovnice (B.1) na $\mathbb{R}$, které splňuje podmínky periodičnosti

$$y(x) = y(x+l).$$

Je-li $\lambda < 0$, pak je řešení $y(x)$ je monotonní; konkrétně rostoucí pro $A > 0$ nebo $A = 0$, $B < 0$, klesající pro $A < 0$ nebo $A = 0$, $B > 0$ a konstantní nulové pro $A = B = 0$. Úloha má tedy pouze triviální řešení.

Pro $\lambda = 0$ má rovnice řešení $y(x) = Ax + B$, které je periodické a netriviální pouze pro $A = 0$, $B \neq 0$. První vlastní číslo tedy je $\lambda_0 = 0$ a příslušná vlastní funkce v_0 je nenulová konstanta.

Pro $\lambda > 0$ má rovnice řešení $y(x) = A\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + B\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$ které má splňovat podmínku

$$\begin{aligned}
A\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + B\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x &= A\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}(x+l) + B\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}(x+l) = \\
&= A\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x\,\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l - \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x\,\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l\right) + B\left(\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x\,\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l + \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x\,\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l\right) = \\
&= \left(A\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l + B\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l\right)\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + \left(-A\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l + B\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l\right)\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x.
\end{aligned}$$

Poněvadž funkce $\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$ a $\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$ jsou nezávislé, plyne odtud

$$A\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l + B\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = A, \qquad -A\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l + B\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = B,$$

neboli

$$\begin{aligned}
\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l - 1\right)A + \left(\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l\right)B &= 0, \\
\left(-\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l\right)A + \left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l - 1\right)B &= 0.
\end{aligned}$$

Tato homogenní soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé A, B má nenulové řešení právě tehdy, když determinant její matice je nulový, tj. právě tehdy, když

$$\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l - 1\right)^2 + \left(\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l\right)^2 = 0.$$

Tato rovnost je splněna právě tehdy, když $\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = 1$ a $\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = 0$, což znamená, že $\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Celkem tedy vlastní čísla operátoru $L(-a^2,0,0)$ s podmínkami periodičnosti a příslušné vlastní funkce jsou

$$\lambda_0 = 0, \quad v_0(x) = \mathit{const} \neq 0,$$

$$\lambda_k = \left(\frac{2k\pi a}{l}\right)^2, \quad v_k(x) = \cos\frac{2k\pi}{l}x,\ \tilde{v}_k(x) = \sin\frac{2k\pi}{l}x, \quad k = 1,2,3,\ldots .$$

Kladná vlastní čísla jsou tedy dvojnásobná.

3) Nakonec najdeme řešení rovnice (B.1) na $(0,\infty)$, které splňuje podmínky omezenosti

$$y(x) \text{ je omezená pro } x \to 0+ \text{ a pro } x \to \infty\,.$$

Je-li $\lambda < 0$, pak

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \begin{cases} \infty, & A \neq 0, \\ 0, & A = 0. \end{cases}$$

V tomto případě tedy všechna záporná čísla λ_- jsou vlastními čísly a příslušné vlastní funkce jsou

$$v_-(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{-\lambda_-}}{|a|}x}.$$

Podobně pro $\lambda = 0$ je

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \begin{cases} \infty, & A \neq 0, \\ B, & A = 0. \end{cases}$$

Číslo $\lambda_0 = 0$ je vlastním číslem a příslušná vlastní funkce je

$$v_0(x) = const \neq 0.$$

Pro $\lambda > 0$ jsou všechna řešení omezená, takže jakékoliv kladné číslo λ_+ je vlastním číslem a příslušné vlastní funkce jsou

$$v_+(x) = \cos\frac{\sqrt{\lambda_+}}{|a|}x, \qquad \tilde{v}_+(x) = \sin\frac{\sqrt{\lambda_+}}{|a|}x.$$

■

Tvrzení 9. Označme $M_L \subseteq C^2(\alpha,\beta)$ množinu funkcí splňujících nějaké homogenní okrajové podmínky. Je-li operátor L symetrický na množině M_L a $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou jeho dvě vlastní čísla, pak odpovídající vlastní funkce jsou orthogonální v prostoru $\mathcal{L}^2(\alpha,\beta)$.[1]

Důkaz:

$$\int_\alpha^\beta v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_1}\int_\alpha^\beta \lambda_1 v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_1}\int_\alpha^\beta Lv_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1}\int_\alpha^\beta v_1(x)Lv_2(x)\mathrm{d}x = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\int_\alpha^\beta v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x.$$

Odtud

$$\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\int_\alpha^\beta v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x = 0$$

a poněvadž $\lambda_1 \neq \lambda_2$, musí platit $\int_\alpha^\beta v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x = 0$. □

[1] *Prostor* $\mathcal{L}^2(\alpha,\beta)$:

Množina funkcí definovaných na intervalu (α,β) takových, že $\int_\alpha^\beta \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x < \infty$, tvoří vektorový prostor. Skalární součin funkcí f, g v tomto prostoru definujeme vztahem $\big(f\,\big|\,g\big) = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\mathrm{d}x$ a normu funkce f vztahem $\|f\| = \sqrt{\big(f\,\big|\,f\big)}$. Funkce f a g v tomto prostoru považujeme za ekvivalentní, pokud $\|f-g\|^2 = \int_\alpha^\beta \big(f(x)-g(x)\big)^2\mathrm{d}x = 0$. Pokud ekvivalentní funkce ztotožníme, dostaneme prostor $\mathcal{L}^2(\alpha,\beta)$.

Sturmova-Liouvilleeova úloha

Jedná se o samoadjungovanou rovnici na konečném intervalu s homogenními Robinovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = \lambda y(x), \qquad x \in (0,l),\\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0 = \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l). \end{aligned} \tag{B.2}$$

Věta 3. *Platí následující tvrzení:*

- *Sturmova-Liouvilleeova úloha má nekonečně mnoho vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, pro která platí*

$$\min\{q(x) : x \in [0,l]\} \;\le\; \lambda_1 \;<\; \lambda_2 \;<\; \cdots; \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n \;=\; \infty\,.$$

- *Každému vlastnímu číslu Sturmovy-Liouvilleovy úlohy přísluší právě jedna normovaná vlastní funkce.*

- *Vlastní funkce $v_n = v_n(x)$ odpovídající vlastnímu číslu λ_n má v intervalu $(0,l)$ právě $n-1$ nulových bodů. Mezi každými dvěma sousedními nulovými body vlastní funkce v_n leží právě jeden nulový bod vlastní funkce v_{n+1}. Zejména vlastní funkce v_1 nemění znaménko na intervalu $(0,l)$.*

- *Posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ normovaných vlastních funkcí Sturmovy-Liouvilleovy úlohy tvoří úplnou orthonormální posloupnost na $[0,l]$. Tj. je-li funkce $f \in \mathcal{L}^2(0,l)$, pak Fourierova řada funkce f vzhledem k orthonormální posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci f podle středu (konvergence v prostoru $\mathcal{L}^2(0,l)$). Je-li funkce f navíc spojitá a splňuje homogenní okrajové podmínky, je tato konvergence stejnoměrná.*

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 1995, str. 158–163. Důkaz je tam proveden pro případ $p \equiv 1$. □

Tvrzení věty jsou ilustrována třemi příklady na str. 164–166:
Dirichletova úloha

$$\begin{aligned} -a^2 y'' = \lambda y \qquad 0 < x < l,\\ y(0) = 0 = y(l) \end{aligned}$$

má vlastní čísla

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2, \quad n = 1,2,3,...$$

která evidentně tvoří rostoucí posloupnost s nevlastní limitou ∞, ke každému vlastnímu číslu přísluší právě jedna normovaná vlastní funkce

$$v_n(x) = \frac{2}{l}\sin\frac{n\pi}{l}\,x.$$

Přitom nulové body vlastní funkce v_n uvnitř intervalu $(0,l)$ a nulové body vlastní funkce v_{n+1} uvnitř intervalu $(0,l)$ a jsou

$$x_k = \frac{kl}{n},\ k = 1,2,3,\ldots,n-1, \quad \text{a} \quad x_\kappa = \frac{\kappa l}{n+1},\ \kappa = 1,2,3,\ldots,n$$

a pro tyto hodnoty platí

$$\frac{(q-1)l}{n} < \frac{ql}{n+1} < \frac{ql}{n}, \quad q = 1,2,\ldots,n.$$

Poslední tvrzení věty plyne z teorie trigonometrických Fourierových řad.

Periodická úloha

$$\begin{aligned} -a^2y'' &= \lambda y \qquad x \in \mathbb{R}, \\ y(x) &= y(x+l) \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

má vlastní čísla

$$\lambda_n = \left(\frac{2n\pi a}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

která opět tvoří rostoucí posloupnost s nevlastní limitou ∞. Ovšem ke každému z vlastních čísel λ_n, $n = 1, 2, \dots$ existují dvě nezávislé vlastní funkce

$$\cos\frac{n\pi}{l}x \quad \text{a} \quad \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Předpoklad věty, že homogenní okrajová podmínka je Robinova, tedy nelze zeslabit tak, že by okrajová podmínka mohla být i periodická.

Libovolné reálné číslo je vlasním číslem okrajové úloha s podmínkami ohraničenosti

$$\begin{aligned} -a^2y'' &= \lambda y \qquad x \in (0, \infty), \\ \limsup_{x\to\infty} |y(x)| &< \infty. \end{aligned}$$

Tato vlastní čísla netvoří posloupnost; říkáme, že spektrum operátoru je spojité (není diskrétní).

Vlastní čísla a vlastní funkce některých speciálních (ale důležitých) Sturmových-Liouvilleových úloh tvaru

$$\begin{aligned} -a^2y'' &= \lambda y, \qquad\qquad 0 < x < l, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l) \end{aligned} \tag{B.3}$$

jsou uvedeny v tabulce B.1.

B.3 Nehomogenní rovnice s homogenními okrajovými podmínkami

Budeme hledat řešení nehomogenní rovnice v samoadjungovaném tvaru s homogenními Robinovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} Ly(x) \;\equiv\; -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) &= f(x), \quad x \in (0, l), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0 &= \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l). \end{aligned}$$

Fourierova metoda

- Najdeme posloupnost vlastních čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a orthogonální posloupnost příslušných vlastních funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ Sturmovy-Liouvilleovy úlohy, tj. rostoucí posloupnost čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnost funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, které splňují:

$$Lv_n(x) = \lambda_n v_n(x),$$

$$\alpha_0 v_n(0) + \beta_0 v_n'(0) = 0 = \alpha_1 v_n(l) + \beta_1 v_n'(l).$$

- Funkci f vyjádříme ve tvaru Fourierovy řady vzhledem k orthogonálnímu systému vlastních funkcí

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x), \quad \text{kde} \quad d_n = \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^l f(\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

α_0	β_0	α_1	β_1	λ_n	$v_n(x)$	$\|v_n\|^2$
1	0	1	0	$\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$	$\sin\frac{n\pi}{\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
1	0	0	1	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$	$\sin\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
0	1	1	0	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$	$\cos\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
0	1	0	1	$0, \quad \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$	$1, \quad \cos\frac{n\pi}{\ell}x$	$\ell, \quad \frac{\ell}{2}$
1	0	h	1	kladné kořeny rovnice $\sqrt{\lambda} = -h\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda}\,\ell\right)$	$\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$	$\frac{\ell}{2} + \frac{h}{2(h^2+\lambda_n)}$
0	1	h	1	kladné kořeny rovnice $h = \sqrt{\lambda}\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda}\,\ell\right)$	$\cos\sqrt{\lambda_n}\,x$	$\frac{\ell}{2} + \frac{h}{2(h^2+\lambda_n)}$
$-h$	1	h	1	kladné kořeny rovnice $\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} = 2\operatorname{cotg}\left(\sqrt{\lambda}\,\ell\right)$	$\cos\sqrt{\lambda_n}\,x + \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$	$\frac{\ell}{2} + \frac{h^2\ell+2h}{2\lambda_n}$

Tabulka B.1: **Vlastní hodnoty a vlastní funkce úlohy** (B.3) **pro některé speciální tvary okrajových podmínek.**

- Řešení úlohy hledáme také ve tvaru Fourierovy řady

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x).$$

Musí tedy platit

$$Ly(x) = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n L v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x),$$

takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x).$$

z čehož podle věty o jednoznačnosti Fourierovy řady plyne

$$c_n = \frac{d_n}{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

pokud všechna vlastní čísla jsou nenulová.

Hledané řešení tedy je

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int_0^l f(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_0^l \left(f(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2} \right) \mathrm{d}\xi.$$

Označíme-li

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2},$$

lze řešení zapsat ve tvaru integrálu

$$y(x) = \int_0^l f(\xi) G(x, \xi) \mathrm{d}\xi.$$

Metoda variace konstant

- Najdeme řešení u, v dvou pomocných homogenních úloh s jednou okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} Lu &= -(pu')' + qu = 0, \qquad & \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) &= 0, \\ Lv &= -(pv')' + qv = 0, \qquad & \alpha_1 v(l) + \beta_1 v'(l) &= 0. \end{aligned}$$

  Funkce u, v nejsou určeny jednoznačně. Vezmeme ty, které jsou lineárně nezávislé.

- Pro Wronskián $W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$ funkcí u, v platí $p(x)W(x) \equiv K$, kde K je nenulová konstanta, neboť

$$\begin{aligned} (pW)' = \big(p(uv' - u'v)\big)' &= p'uv' + pu'v' + puv'' - p'u'v - pu''v - pu'v' = \\ &= (pv'' + p'v')u - (pu'' + p'u')v = (pv')'\, u - (pu')'\, v = qvu - quv = 0, \end{aligned}$$

  kdyby $K = 0$, pak by $W \equiv 0$, což by byl spor s lineární nezávislostí.

- Řešení nehomogenní úlohy hledáme metodou variace konstant, tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1(x)u(x) + c_2(x)v(x).$$

  Funkce y má být řešením dané nehomogenní rovnice, takže musí platit

$$\begin{aligned} f &= L(c_1 u + c_2 v) = -\big(p(c_1 u)'\big)' + qc_1 u - \big(p(c_2 v)'\big)' + qc_2 v = \\ &= -p\left(c_1'' u + 2c_1' u' + c_1 u''\right) - p'\left(c_1' u + c_1 u'\right) + qc_1 u - \\ &\qquad - p\left(c_2'' v + 2c_2' v' + c_2 v''\right) - p'\left(c_2' v + c_2 v'\right) + qc_2 v = \\ &= c_1\left(-pu'' - p'u' + qu\right) - pc_1' u' - p\left(c_1'' u + c_1' u'\right) - p' c_1' u + \\ &\qquad c_2\left(-pv'' - p'v' + qv\right) - pc_2' v' - p\left(c_2'' v + c_2' v'\right) - p' c_2' v = \\ &= c_1 Lu - pc_1' u' - \big(p(c_1' u)\big)' + c_2 Lv - pc_2' v' - \big(p(c_2' v)\big)' = \\ &= -p(c_1' u' + c_2' v') - \big(p(c_1' u + c_2' v)\big)'. \end{aligned}$$

  Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když funkce c_1, c_2 splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x)u(x) + c_2'(x)v(x) &= 0, \\ c_1'(x)u'(x) + c_2'(x)v'(x) &= -\frac{f(x)}{p(x)}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

  Platí tedy

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & v(x) \\ -\dfrac{f(x)}{p(x)} & v'(x) \end{vmatrix} = \frac{f(x)v(x)}{K}, \\ c_2'(x) &= \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} u(x) & 0 \\ u'(x) & -\dfrac{f(x)}{p(x)} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)u(x)}{K}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

- Funkce $y(x)$ má splňovat okrajové podmínky, tj.

$$\begin{aligned}\alpha_0\left[c_1(0)u(0)+c_2(0)v(0)\right]+\beta_0\left[c_1'(0)u(0)+c_1(0)u'(0)+c_2'(0)v(0)+c_2(0)v'(0)\right] &= 0\\ \alpha_1\left[c_1(l)u(l)+c_2(l)v(l)\right]+\beta_1\left[c_1'(l)u(l)+c_1(l)u'(l)+c_2'(l)v(l)+c_2(l)v'(l)\right] &= 0,\end{aligned}$$

po úpravě s využitím (B.4)

$$\begin{aligned}c_1(0)\big(\alpha_0u(0)+\beta_0u'(0)\big)+c_2(0)\big(\alpha_0v(0)+\beta_0v'(0)\big) &= 0,\\ c_1(l)\big(\alpha_1u(l)+\beta_1u'(l)\big)+c_2(l)\big(\alpha_1v(l)+\beta_1v'(l)\big) &= 0;\end{aligned}$$

každá z funkcí splňuje jednu okrajovou podmínku, tedy

$$\begin{aligned}c_2(0)\big(\alpha_0v(0)+\beta_0v'(0)\big) &= 0\,,\\ c_1(l)\big(\alpha_1u(l)+\beta_1u'(l)\big) &= 0\,,\end{aligned}$$

takže

$$c_1(l) = 0\,,\quad c_2(0) = 0\,. \tag{B.6}$$

- Funkce $c_1,\ c_2$ jsou řešením rovnic (B.5) s počátečními podmínkami (B.6) a jsou tedy dány výrazy

$$c_1(x) = \frac{1}{K}\int_l^x f(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi\,,\qquad c_2(x) = -\frac{1}{K}\int_0^x f(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

- Řešení úlohy je

$$y(x) = -\frac{u(x)}{K}\int_x^l f(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{v(x)}{K}\int_0^x f(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Označíme-li

$$G(x,\xi) = \begin{cases}-\dfrac{u(x)v(\xi)}{K}, & 0\le x<\xi\le l\\ -\dfrac{v(x)u(\xi)}{K}, & 0\le \xi<x\le l\end{cases},$$

lze řešení zapsat ve tvaru jediného integrálu

$$y(x) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Greenova funkce

Funkci $G:[0,l]\times[0,l]\to\mathbb{R}$ nazveme *Greenovou funkcí homogenní okrajové úlohy*

$$\begin{aligned}&Ly(x)\ \equiv\ -\big(p(x)y'(x)\big)'+q(x)y(x)=0,\quad x\in(0,l),\\ &\alpha_0y(0)+\beta_0y'(0)=0=\alpha_1y(l)+\beta_1y'(l).\end{aligned}$$

kde $p(x)>0$ pro $x\in[0,l]$, jestliže

(i) G je spojitá pro $x\in[0,l]\times[0,l]$,

(ii) G je symetrická, tj. $G(x,\xi)=G(\xi,x)$,

(iii) pro každé $\xi\in[0,l]$ má funkce $G(\cdot,\xi)$ spojité derivace druhého řádu,

(iv) pro každé $\xi\in[0,l]$ je funkce $G(\cdot,\xi)$ řešením uvažované okrajové úlohy,

(v) $\lim\limits_{x\to\xi+} G_x(x,\xi) - \lim\limits_{x\to\xi-} G_x(x,\xi) = -\dfrac{1}{p(\xi)}$ pro $\xi \in (0,l)$.

Věta 4. *Má-li uvažovaná homogenní okrajová úloha jen triviální řešení $y \equiv 0$ a jsou-li funkce $p \in C^1(0,l)$, $q \in C^2(0,l)$, existuje právě jedna její Greenova funkce. Nehomogenní okrajová úloha*

$$\begin{aligned} Ly(x) \;&\equiv\; -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,l),\\ &\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0 = \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l). \end{aligned}$$

má pak jediné řešení tvaru

$$y(x) \;=\; \int_0^l f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Důkaz: Viz I. Kiguradze: *Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic.* MU, Brno 1997, str. 82. Důkaz je proveden pro mnohem obecnější situaci. □

B.4 Úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} Ly(x) \;&\equiv\; -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,l),\\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= \eta_0, \quad \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l) = \eta_1. \end{aligned}$$

Jestliže funkce $w = w(x)$ splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0) = \eta_0, \qquad \alpha_1 w(l) + \beta_1 w'(l) = \eta_1$$

a funkce $u = u(x)$ je řešením úlohy

$$Lu(x) = f(x) - Lw(x)$$

s homogenními okrajovými podmínkami

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = 0 = \alpha_1 u(l) + \beta_1 u'(l),$$

pak funkce

$$y(x) = u(x) + w(x)$$

je řešením uvažované úlohy, jak se snadno přesvědčíme přímým výpočtem.

Funkci w je vhodné volit v co nejjednodušším tvaru, například polynom. Konkrétně lze volit polynom nejvýše druhého stupně ve tvaru

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta_0\eta_1 - \beta_1\eta_0 - \alpha_1\eta_0 l}{\beta_0(\alpha_1 l + 2\beta_1)l}x^2 + \dfrac{\eta_0}{\beta_0}x, & \beta_0(\alpha_1 l + 2\beta_1) \neq 0,\\[2mm] \dfrac{\alpha_0\eta_1 - \alpha_1\eta_0}{\alpha_0(\alpha_1 l + 2\beta_1)l}x^2 + \dfrac{\eta_0}{\alpha_0}, & \beta_0 = 0 \neq \alpha_1 l + 2\beta_1,\\[2mm] \dfrac{\alpha_1\eta_0 - \alpha_0\eta_1}{\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0}x + \dfrac{\beta_1\eta_0 + \beta_0\eta_1}{\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0}, & \alpha_1 l + 2\beta_1 = 0 \neq \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0,\\[2mm] \dfrac{\alpha_1\eta_0 - \alpha_0\eta_1}{\alpha_0\alpha_1 l}x + \dfrac{\eta_1}{\alpha_1}, & \alpha_1 l + 2\beta_1 = 0 = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0,\ \dfrac{\eta_1}{\alpha_1} = \dfrac{\eta_0}{\alpha_0},\\[2mm] \dfrac{\eta_1}{l}x, & \alpha_1 l + 2\beta_1 = 0 = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0,\ \alpha_0\alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Cvičení

Řešte okrajové úlohy

1) $-y'' - \dfrac{2}{x}y' = 0,\ x \in (0,1);\ y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to 0_+$.

2) $-\left(x^2y'\right)' = 0,\ x \in (1,\infty);\ y(1) = y_0,\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0.$

3) $-\left(xy'\right)' = 0,\ x \in (1,\infty);\ y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to \infty$.

4) $-xy'' - y' = 0,\ x \in (1,2);\ y(1) = y_1,\ y(2) = 0.$

5) $-x^2y'' - xy' + k^2y = 0,\ x \in (0,l);\ y(l) = 1$, y je omezená pro $x \to 0_+$; k je parametr.

6) $-xy'' - y' = -x,\ x \in (0,l);\ y(0) = y(l) = 0.$

7) $-y'' = \sin x,\ x \in (0,2\pi);\ y'(0) = y'(2\pi) = 0.$

Najděte vlastní funkce okrajových úloh a vlastní čísla příslušných operátorů

8) $-v'' = \lambda v,\ x \in (0,l);\ v'(0) = v'(l) = 0.$

9) $-v'' = \lambda v,\ x \in \mathbb{R};\ v(x) = v(x + 2\pi).$

10) $-v'' + qv = \lambda v,\ x \in (0,l);\ v'(0) = 0,\ v(l) = 0;\ q$ je parametr.

Řešte okrajové úlohy

11) $-y'' - \omega^2 y = f(x),\ x \in (0,l);\ y(0) = y(l) = 0;\ \omega$ je parametr.

12) $-y'' - 3y = \dfrac{\pi - x}{2},\ x \in (0,\pi);\ y(0) = y(\pi) = 0.$

13) Najděte Greenovu funkci úlohy $-y'' + y = 0,\ y(0) = y(1) = 0.$

14) Ověřte výsledky uvedené v tabulce B.1.

Výsledky:

1) $y(x) = y_0$ **2)** $y(x) = \frac{y_0}{x}$ **3)** $y(x) = y_0$ **4)** $y(x) = y_1\frac{\ln 2 - \ln x}{\ln 2}$ **5)** $y(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{|k|}$ **6)** nemá řešení

7) $y(x) = \sin x - x + C$, C je libovolná konstanta

8) $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ v_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x,\ n = 0,1,2,\dots$

9) $\lambda_n = n^2,\ v_n(x) = C_n\cos nx + D_n \sin nx$, C_n, D_n jsou libovolné konstanty, $C_0 \neq 0,\ n = 0,1,2,\dots$

10) $\lambda_n = q + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2,\ v_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$

11) $y(x) = B\sin\frac{k\pi}{l}x + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}(\xi - x)\mathrm{d}\xi$ pro $\frac{\omega l}{\pi} = k \in \mathbb{N}$ a $\int\limits_0^l f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi = 0,$

B je libovolná konstanta;

$$y(x) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x f(\xi)\sin\omega(\xi - x)\mathrm{d}\xi - \frac{\sin\omega x}{\omega\sin\omega l}\int\limits_0^l f(\xi)\sin\omega(\xi - x)\mathrm{d}\xi = 2l\int\limits_0^x f(\xi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{l}\xi\sin\frac{k\pi}{l}x}{k^2\pi^2 - \omega^2l^2}\mathrm{d}\xi$$

pro $\frac{\omega l}{\pi} \notin \mathbb{N}$

12) $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k^2-3)} = \frac{\pi}{6}\left(\cos\sqrt{3}x - \operatorname{cotg}\sqrt{3}\pi\,\sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{6}(x - \pi)$

13) $G(x,\xi) = \begin{cases}\frac{\sinh(1-x)\sinh\xi}{\sinh 1}, & 0 \le \xi \le x \le 1\\ \frac{\sinh x\sinh(1-\xi)}{\sinh 1}, & 0 \le x < \xi \le 1\end{cases}$

Dodatek C

Některé diferenciální a integrální identity

C.1 Transformace Laplaceova operátoru

Laplaceův operátor je lineární diferenciální operátor druhého řádu definovaný v kartézských souřadnicích předpisem

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

podrobněji

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta_{x_1, x_2, \dots, x_n} u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i^2}.$$

Kartézské souřadnice $x_1, x_2, \dots, x_n$ transformujeme na „křivočaré" souřadnice $q_1, q_2, \dots, q_n$,

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \qquad q_i = q_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Pak je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2}
\end{aligned}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$. Tedy

$$\begin{aligned}
\Delta_{q_1, q_2, \dots, q_n} u &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \right) = \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \right) \frac{\partial u}{\partial q_j}.
\end{aligned}$$

Speciální případy:

Polární souřadnice v rovině

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sgn} x) + 2k\pi$$

V tomto případě je

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = y\frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -x\frac{2y}{x^2+y^2},$$

a dále

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Laplaceův operátor transformovaný do polárních souřadnic tedy je

$$\begin{aligned}\Delta_{r,\varphi} u \;=\; & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right) + \\ & + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.\end{aligned}$$

Tento výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$\Delta_{r,\varphi}\, u \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Cylindrické souřadnice v trojrozměrném prostoru

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sgn} x) + 2k\pi,\ z = z$$

$$\Delta_{r,\varphi,z}\, u \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Sférické souřadnice v trojrozměrném prostoru

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta,\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\ z = r\sin\vartheta,$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sgn} x) + 2k\pi,\ \vartheta = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

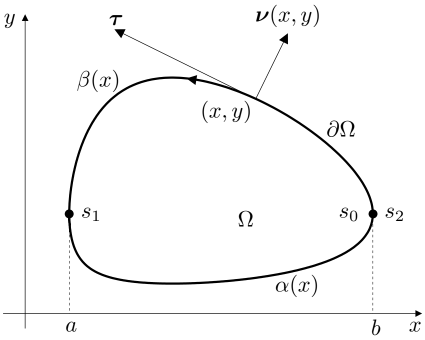
$$\Delta_{r,\varphi,\vartheta}\, u \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)$$

C.2 Integrace per partes a Greenovy vzorce

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$, která je kladně orientovaná, tj. podle „pravidla pravé ruky" — položíme-li na hranici dlaň pravé ruky, tak, aby prsty směřovaly ve směru orientace, pak je vnitřek oblasti na straně palce. Označme $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2) = \big(\nu_1(x, y), \nu_2(x, y)\big)$ jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$.

Uvažujme diferencovatelnou funkci $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Vyjádříme dvojný integrál

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



Výpočet ukážeme za jednoduché situace: Oblast Ω je jednoduše souvislá, její hranice má tvar oválu, tj. existují na ní právě dva body, v nichž je tečna rovnoběžná s osou y a právě dva body, v nichž je tečna rovnoběžná s osou x. Průmět množiny $\overline{\Omega}$ na osu x označíme jako interval $[a, b]$. Vzhledem k oválnému tvaru hranice oblasti Ω můžeme její „dolní" a „horní" oblouk považovat za funkce proměnné x; označíme je $\alpha(x)$ a $\beta(x)$. Předpokládejme, že hranice oblasti $\partial\Omega$ je dána parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s), \\ y &= \psi(s), \qquad s \in [s_0, s_2]. \end{aligned}$$

Předpokládejme dále, že parametrizace hranice je souhlasná s její orientací, platí $\varphi(s_0) = b$, $\big(\varphi(s_0), \psi(s_0)\big) = \big(\varphi(s_2), \psi(s_2)\big)$ a pro hodnotu parametru s_1, $s_0 < s_1 < s_2$ platí $\varphi(s_1) = a$. Za této situace je

$$\alpha(x) = \alpha\big(\varphi(s)\big) = \psi(s),\ s \in [t_1, t_2] \quad \text{a} \quad \beta(x) = \beta\big(\varphi(s)\big) = \psi(s),\ s \in [t_0, t_1].$$

Tečný vektor $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x, y)$ ke hranici $\partial\Omega$ v bodě $(x, y) = \big(\varphi(s), \psi(s)\big)$ má souřadnice

$$\big(\dot{\varphi}(s), \dot{\psi}(s)\big),$$

kde $\dot{}$ označuje obyčejnou derivaci podle parametru. Jednotkový vektor vnější normály $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(x, y)$ ke hranici $\partial\Omega$ v bodě $(x, y) = \big(\varphi(s), \psi(s)\big)$ má souřadnice

$$(\nu_1, \nu_2) = \left(\frac{\dot{\psi}(s)}{\sqrt{\dot{\varphi}(s)^2 + \dot{\psi}(s)^2}}, -\frac{\dot{\varphi}(s)}{\sqrt{\dot{\varphi}(s)^2 + \dot{\psi}(s)^2}} \right).$$

Hledaný integrál rozepíšeme podle Fubiniho věty

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \Big(f\big(x, \beta(x), \big) - f\big(x, \alpha(x)\big) \Big).$$

Poslední integrál přepíšeme jako rozdíl dvou integrálů a zavedeme substituci $x = \varphi(s)$. Pak je $\mathrm{d}x = \dot{\varphi}(s)\mathrm{d}s$ pro $s \in [t_1, t_2]$ a $\mathrm{d}x = -\dot{\varphi}(s)\mathrm{d}s$ pro $s \in [t_0, t_1]$, neboť v tomto oboru parametru (na horním oblouku) je hranice orientována „proti" orientaci osy x. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} &-\int\limits_{s_0}^{s_1} f\big(\varphi(s), \psi(s)\big)\dot{\varphi}(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{s_1}^{s_2} f\big(\varphi(s), \psi(s)\big)\dot{\varphi}(s)\mathrm{d}s = \\ &\qquad = -\int\limits_{s_0}^{s_2} f\big(\varphi(s), \psi(s)\big)\dot{\varphi}(s)\mathrm{d}s = \int\limits_{s_0}^{s_2} f\big(\varphi(s), \psi(s)\big)\nu_2(\varphi(s), \psi(s))\sqrt{\dot{\varphi}(s)^2 + \dot{\psi}(s)^2}\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledek je křivkový integrál přes hranici oblasti Ω. Platí tedy

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_{\partial\Omega} f(x,y)\nu_2(x,y)\mathrm{d}s,$$

nebo stručně

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} f\nu_2\,\mathrm{d}S. \tag{C.1}$$

Pokud by oblast Ω byla nějak „komplikovanější“, bylo by potřebné hranici rozdělit na více částí, výpočty by ale byly v podstatě stejné. Analogicky odvodíme rovnost

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial\Omega} f\nu_1\,\mathrm{d}S.$$

Položíme-li $f = uv$, kde $u,\ v$ jsou diferencovatelné funkce na $\overline{\Omega}$, dostaneme vzorce pro integraci per partes u dvojných integrálů:

$$\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} uv\nu_1\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,\quad \int\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} uv\nu_2\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{C.2}$$

Na místě výrazu v budeme v první z těchto rovností psát $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ a ve druhé $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

$$\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x}\nu_1\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,\quad \int\limits_{\Omega} u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial y}\nu_2\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\nu_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\nu_2\right)\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Výraz $\dfrac{\partial v}{\partial x}\nu_1 + \dfrac{\partial v}{\partial y}\nu_2$ je derivace funkce v ve směru jednotkového vektoru vnější normály. Označíme ho $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ a dostaneme *první Greenův vzorec*

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{C.3}$$

Výměnou funkcí u a v v tomto vzorci dostaneme

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

a odečtením těchto dvou tvarů prvního Greenova vzorce dostaneme *druhý Greenův vzorec*

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S\,. \tag{C.4}$$

Podíváme se na analogie těchto formulí v jednorozměrné oblasti, to je na intervalu (a,b). Hranice této oblasti je dvoubodová, $\partial(a,b) = \{a,b\}$, vektor vnější normály v bodě a míří doleva, v bodě a doprava, tedy $\nu(a) = -1$ a $\nu(b) = 1$. Povrchovým integrálem přes hranici intervalu budeme rozumět součet funkčních hodnot. Analogií formule (C.1) je v jednorozměrném případě

$$\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\{a,b\}} f(x)\nu(x)\mathrm{d}s = -f(a) + f(b) = \big[f(x)\big]_{x=a}^b.$$

To je Newtonova-Leibnizova formule, tedy formule platná. Formule (C.2) má tvar

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_{x=a}^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

což je standardní formule pro integraci per partes. Greenovy vzorce (C.3) a (C.4) mají v jednorozměrném případě tvar

$$\int\limits_a^b u(x)v''(x)\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_{x=a}^b - \int\limits_a^b u'(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

a

$$\int\limits_a^b \left(u(x)v''(x) - u''(x)v(x)\right)\mathrm{d}x = \big[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)\big]_{x=a}^b;$$

tyto vzorce bezprostředně plynou z formule pro integraci per partes.

Odvodili jsme tedy vzorce obsahující „objemový“ a „povrchový“ integrál z funkcí $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které platí pro $n = 1, 2$. Indukcí, naprosto neúplnou, odtud uhodneme správný závěr[1]: Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$, u, v dvakrát diferencovatelné funkce na $\overline{\Omega}$ a $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$. Pak platí:

- Newtonova-Leibnizova formule

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} f\nu_i\mathrm{d}S. \tag{C.5}$$

- Integrace per partes

$$\int\limits_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} uv\,\nu_i\,\mathrm{d}S - \int\limits_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{C.6}$$

- První Greenův vzorec

$$\int\limits_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S - \int\limits_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V\,. \tag{C.7}$$

- Druhý Greenův vzorec

$$\int\limits_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S\,. \tag{C.8}$$

[1] „Odvození“ vzorců samozřejmě není dostatečné. Je ale jednoduché a intuitivní, proto (snad) umožňuje vzorce, jejichž přesný důkaz je technicky náročný, s klidným svědomím přijmout.