Numerické metody – příklady

Obsah

1 Prostá iterační metoda (metoda pevného bodu)

Příklady ze skript

Příklad 1.
Funkce $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ má jediný kořen v intervalu $[1; 1{,}5]$. Uvažujte tyto iterační funkce pro nalezení kořene ($\xi \approx 1{,}365230013$):

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= x - x^3 - 4x^2 + 10 & \qquad g_4(x) &= \left(\frac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
g_2(x) &= \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}} & \qquad g_5(x) &= x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} \\
g_3(x) &= \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Nechť počáteční aproximace $x_0 = 1{,}5$. Ukažte, že funkce g_3, g_4, g_5 jsou vhodné iterační funkce (tj. posloupnost iterací konverguje ke kořenu ξ). Dále ukažte, že volba funkce g_1 vede na divergentní posloupnost a posloupnost $\{x_k\}$, $x_k = g_2(x_{k-1})$, $x_0 = 1{,}5$, není definována (v oboru reálných čísel).

Příklad 2.
Ukažte, že funkce $g(x) = 2^{-x}$ má jediný pevný bod v intervalu $[\frac{1}{3}; 1]$. Najděte tento pevný bod s chybou menší než 10^{-4}. Kolik iterací je třeba k dosažení této přesnosti?
(Řešení: Pro $x_0 = 1$ je třeba 15 iterací.)

Příklad 3.
Je dána rovnice $3x^2 - e^x = 0$. Určete interval, ve kterém leží záporný kořen této rovnice. Najděte vhodnou iterační funkci g, pro kterou iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k)$ bude konvergovat k tomuto kořenu.
Doplňující otázka: Kolik je kladných kořenů a jaké budou vhodné iterační funkce pro konvergenci k nim?

Příklad 4.
Je dána rovnice $3x^3 - x - 1 = 0$. Určete interval, ve kterém leží kladný kořen této rovnice. Najděte vhodnou iterační funkci g, pro kterou iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k)$ bude konvergovat k tomuto kladnému kořenu.

Příklad 5.
Je dána iterační funkce $g(x) = (6 + x)^{1/2}$. Pevný bod je $\xi = 3$. Znázorněte geometricky příslušný iterační proces $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 = 7$. Bude tento iterační proces konvergovat?

Příklad 6.
Ukažte, že iterační funkce
$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$
splňuje podmínky pro výpočet $\sqrt{2}$. Jaký tvar má funkce g pro výpočet $\sqrt{a}$, $a > 0$?

Příklad 7.
Je možné použít prostou iterační metodu v případě, že funkce g zobrazuje interval $I = [a, b]$ do sebe a platí $|g'(x)| \leq 1$, přičemž rovnost nastává pouze v některém z krajních bodů intervalu I? Proč?

Další příklady

Příklad 1.
Je dána iterační funkce $g(x) = \frac{1}{6}(7 - x^3) - \frac{1}{2}(x - x^2)$.

(i) Ukažte, že $x = 1$ je pevný bod funkce g.

(ii) Ukažte, že funkce g je kontrakce na intervalu $[0, 2]$.

(iii) Určete řád konvergence metody pevného bodu dané vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$ na intervalu $[0, 2]$.

Příklad 2.
Ukažte, že iterační funkce

$$g(x) = \frac{A}{2(x+1) - A}, \quad A > 0$$

má jediný kladný pevný bod $\xi = \frac{A}{2}$. Určete, pro jaké hodnoty parametru A je funkce g kotrakce.

2 Newtonova metoda

Příklady ze skript

Příklad 1.
Užitím Newtonovy metody vypočtěte $\sqrt{13}$. Zvolte vhodnou funkci a počáteční aproximaci.

Příklad 2.
Newtonovou metodou nalezněte řešení rovnice $x = \cos x$.

Příklad 3.
Užitím Newtonovy metody s počáteční aproximací $x_0 = 10$ vypočtěte $\sqrt{91}$.

Příklad 4.
Na parabole $y = x^2$ najděte užitím Newtonovy metody bod nejbližší bodu $(1, 3)$.
Návod:

1. Určete druhou mocninu vzdálenosti $d^2(x)$ bodu $X = (x, x^2)$ ležícího na parabole a bodu $(1, 3)$.

2. Řešte rovnici $(d^2(x))' = f(x) = 0$. Za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1,0$.

Příklad 5.
Užijte Newtonovu metodu k nalezení kořenů funkcí

- $x^3 - 2x^2 - 5 = 0, \quad \xi \in [1, 4]$,
- $x - 0{,}8 - 0{,}2 \sin x = 0, \quad \xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
- $3x^2 - e^x = 0, \quad \xi \in [0, 2]$.

Příklad 6.
Je dána rovnice $\frac{4x-7}{x-2} = 0$. Je $x_0 = 3$ vhodná počáteční aproximace pro použití Newtonovy metody?

Příklad 7.
Je dána funkce $f(x) = \cos x$. Newtonovou metodou chceme najít kořen $\xi = \frac{3\pi}{2}$. Můžeme použít počáteční aproximaci $x^0 = 3$? Proč?
Můžeme použít počáteční aproximaci $x_0 = 5$? Proč?

Příklad 8.
Je dána funkce $f(x) = \sqrt{(x-3)}$. Můžeme užít Newtonovu metodu pro nalezení kořene s počáteční aproximací $x_0 = 4$? Proč?
Jaká je vhodná počáteční aproximace?

Další příklady

Příklad 1.
Je dána rovnice $3x^2 = e^x$. Pokuste se najít všechna řešení s pomocí Newtonovy metody.

Příklad 2.
Funkce $f(x) = x \sin x$ má kořen v 0 a $f'(0) = 0$. Ukažte, že Newtonova metoda přesto konverguje k 0 pro $x_0 = 1$.
Dokažte, že řád konvergence je roven 1.

Příklad 3.
Funkce $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ je klesající a konvexní (viz Fourierovy podmínky) na intervalu $[0, 5]$. Je $x_0 = 0$ vhodná počáteční iterace?

Příklad 4.
Funkce $f(x) = e^{x^2+x^3} - 2$ má jediný kladný kořen. Nalezněte interval, v němž kořen leží a na kterém jsou splněny Fourierovy podmínky pro konvergenci Newtonovy metody. Tyto podmínky ověřte. Pak zvolte vhodně počáteční iteraci (a spočtěte další tři iterace pomocí Newtonovy metody).

Příklad 5.
Uvažujme Newtonovu metodu pro funkci $f(x) = xe^{-\frac{1}{|x|}}$. Ukažte, že pro $x_0 = 1$ platí $x_n = \frac{1}{n+1}$.

Příklad 6.
Vyzkoušejte Newtonovu metodu na funkci $f(x) = \sqrt{|x|}$.

3 Metoda sečen a regula falsi

Příklady ze skript

Příklad 1.
Užijte a) metodu sečen, b) metodu regula falsi k nalezení kořenů funkcí

- $x^3 - 2x^2 - 5 = 0, \quad \xi \in [1, 4]$,
- $x - 0{,}8 - 0{,}2 \sin x = 0, \quad \xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
- $3x^2 - e^x = 0, \quad \xi \in [0, 2]$.

Příklad 2.
Je dána rovnice $\frac{4x-7}{x-2} = 0$. Jaké jsou vhodné počáteční aproximace pro metodu regula falsi? Co se stane, pokud zvolíme počáteční iterace nesprávně?

Příklad 3.
Metodou sečen a regula falsi najděte kladný kořen rovnice $x^2 - 7 = 0$.

Další příklady

Příklad 1.
Pokud použijeme metodu sečen pro nalezení $\sqrt{a}$, $a > 0$ (funkce $f(x) = x^2 - a$) a zvolíme počáteční iterace větší než $\sqrt{a}$, je možné, aby metoda nekonvergovala?

Příklad 2.
Newtonova metoda nekonverguje pro funkci $f(x) = \arctan x$, pokud zvolíme příliš velkou počáteční iteraci (větší než 1.4). Jak je to s konvergencí metody sečen a regula falsi? Jak zvolit počáteční iterace? (Lze zkusit i v Matlabu.)

4 Systémy nelineárních rovnic

Příklady ze skript

Příklad 1.
Uvažujme systém nelineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2x_1 - x_1^2 + x_2}{2} \quad \text{(parabola)},\\
x_2 &= \frac{2x_1 - x_1^2 + 8}{9} + \frac{4x_2 - x_2^2}{4} \quad \text{(elipsa)}.
\end{aligned}
$$

Zvolte $\boldsymbol{x}^0 = (1{,}4; 2{,}0)^T$ a vypočtěte 2 iterace

1. iterační metodou $\boldsymbol{x}^k = G(\boldsymbol{x}^{k-1})$,
2. Seidelovou metodou.

Výsledky porovnejte s přesným řešením $\boldsymbol{\xi} \doteq (1{,}4076401; 1{,}9814506)^T$.

Příklad 2.
Je dána soustava nelineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{7x_1^3 - x_2 - 1}{10} &\equiv g_1(x_1, x_2)\\
x_2 &= \frac{8x_2^3 + x_1 - 1}{11} &\equiv g_2(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

Tato soustava má 9 pevných bodů.
Ověřte, že v okolí bodu (0,0) splňuje tato soustava podmínku pro konvergenci iteračního procesu

$$
\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= g_1(x_1^k, x_2^k)\\
x_2^{k+1} &= g_2(x_1^k, x_2^k)
\end{aligned}\;.
$$

Bude tato podmínka splněna v okolí bodu (1,1)?

Příklad 3.
Je dán systém nelineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1^2 - x_2 - 0{,}2 &= 0,\\
x_2^2 - x_1 - 0{,}3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Užitím Newtonovy metody nalezněte kořen ležící v 1. kvadrantu. Počáteční aproximaci určete graficky. ($\boldsymbol{x}^0 = (1{,}2; 1{,}2)^T$)

Další příklady

Příklad 1.
Střelec vystřelí projektil směrem na pohybující se terč, který je v okamžiku výstřelu 50 m daleko a 80 m vysoko a pohybuje se směrem od střelce ve vodorovném směru. Jeho počáteční rychlost je $v_1 = 2\,m/s$ a má zrychlení $a = 1\,m/s^2$. Projektil má počáteční rychlost $v_2 = 100\,m/s$, gravitační zrychlení je $g = 10\,m/s^2$, odpor vzduchu zanedbáme. Pod jakým úhlem θ musí střelec vystřelit směrem k terči, aby ho zasáhl? Použijte Newtonovu metodu pro nalezení obou řešení a určete také čas do zásahu pro jednotlivé případy.
Pohybové rovnice (s – vodorovná vzdálenost, h – výška)
terč: $s_1 = v_1 t + \frac{1}{2}at^2, \quad h_1 = 80$
projektil: $s_2 = v_2 t\cos\theta, \quad h_2 = v_2 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$.
Zásah nastane pro $s_2 = s_1 + 50$, $h_2 = h_1$.

Příklad 2.
Použijte Newtonovu metodou na první dva příklady z předchozí části.

Příklad 3.
Problém zkřížených žebříků
Dva žebříky o délkách 2 a 3 metry jsou opřeny v uličce mezi dvěma zdmi a to tak, že každý z nich stojí u jedné zdi a opírá se o druhou. Žebříky se kříží ve výšce 1 metr. Jaká je šířka uličky?
Návod: Pokud označíme x šířku uličky, y a z výšky, ve kterých se žebříky opírají, získáme z podobnosti trojúhelníků a z Pythagorovy věty systém tři rovnic pro x, y a z, který můžeme vyřešit Newtonovou metodou.

5 Systémy lineárních rovnic – přímé metody

Příklady ze skript

Příklad 1.
Řešte systém GEM a) bez výběru hlavního prvku, b) s částečným výběrem hlavního prvku:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -8\\
2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -20\\
x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}-3x_4} &= -2\\
x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

(Řešení: $x_1 = -7$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$.)

Příklad 2.
Užijte Gaussovu eliminační metodu s částečným výběrem hlavního prvku pro řešení soustavy

$$
\begin{aligned}
x_2 + x_3 &= 0\\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1\;.\\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

Příklad 3.
Ukažte že matici A nelze rozložit na součin horní a dolní trojúhelníkové matice:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 0\\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Řešte nyní systémy $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$, kde $\boldsymbol{b}_1 = (7, 8, 10, 0)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (7, 5, 10, 0)^T$. Užijte GEM a ukažte, že systém $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ má nekonečně mnoho řešení a systém $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ nemá žádné řešení.

Příklad 4.
Přesné řešení systému

$$
\begin{aligned}
1{,}133x_1 + 5{,}281x_2 &= 6{,}414\\
24{,}14x_1 - 1{,}210x_2 &= 22{,}93
\end{aligned}
$$

je $\boldsymbol{x} = (1, 1)^T$. Řešte tento systém se zaokrouhlováním na 4 cifry

1. GEM bez výběru hlavního prvku,

2. GEM s částečným výběrem hlavního prvku.

(1. $x_1 = 0{,}9956$, $x_2 = 1{,}001$; 2. $x_1 = 1{,}000$, $x_2 = 1{,}000$.)

Příklad 5.
Najděte LU rozklad $A = LU$ ($l_{ii} = 1$, $i = 1, 2, 3$)

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(Řešení: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & 0 \\ -0{,}6 & 5{,}5 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0{,}4 & 2{,}8 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$)

Příklad 6.
Nechť A je pozitivně definitní matice. Ukažte, že

1. $a_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$,
2. $\max\limits_{1 \le i \le n} a_{ii} = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Příklad 7.
Je možné provést rozklad $A = LR$, respektive $PA = LR$ pro singulární matici A?

Příklad 8.
Je možné rozložit matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

na součin dolní a horní trojúhelníkové matice?

Příklad 9.
Choleského metodou řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 11 \\ x_1 + 5x_2 + 14x_3 &= 20 \end{aligned} .$$

Příklad 10.
Choleského metodou řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Příklad 11.
Croutovou metodou řešte systém

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 \phantom{{}- x_3} &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ -x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

(Řešení: $\boldsymbol{x}^* = (3, 4, -5)^T$)

Příklad 12.
Nechť A je pozitivně definitní matice. Ukažte, že

1. $a_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$,
2. $\max\limits_{1 \le i \le n} a_{ii} = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Příklad 13.
Lze použít Choleského metodu pro řešení systému s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Další příklady

Příklad 1. (ukázka vlivu špatné podmíněnosti matice)
Řešení systému rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 15 \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 9.001x_3 & = & 24.001 \end{array} .$$

je $[1,1,1]^T$. Určete řešení pro zaokrouhlenou pravou stranu $[6,15,24]^T$.

Příklad 2.
Croutovou metodou najděte rozklad mnatice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6 Polynomiální interpolace

Příklady ze skript

Příklad 1.
Najděte Lagrangeův interpolační polynom, je-li dáno

x_i	0	1	2	5
f_i	2	3	12	147

.

Vyzkoušejte přímý výpočet Lagrangeových fundamentálních polynomů i výpočet s využitím funkce ω_{n+1} a Hornerova schematu. ($P_3(x) = x^3 + x^2 - x + 2$.)

Příklad 2.
S jakou přesností lze vypočítat $\sqrt{115}$ pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu pro funkci $y = \sqrt{x}$, když vybereme za uzly interpolace $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$?
($|E(115)| \leq 1{,}6.10^{-3}$.)

Příklad 3.
Nechť l_i, $i = 0, 1, \dots, n$ jsou Lagrangeovy fundamentální polynomy pro uzly $x_0,\dots,x_n$. Dokažte:

1. Je-li $l_i(0) = c_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, pak

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad j = 0 \\ 0 & \text{pro} \quad j = 1, 2, \dots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \dots x_n & \text{pro} \quad j = n+1 \end{cases}$$

(Návod: Využijte jednoznačnosti interpolačního polynomu. Pro poslední rovnost využijte první příklad z následující části.)

Příklad 4.
Najděte Newtonův interpolační polynom, je-li dáno

x_i	0	2	3	5
f_i	1	3	2	5

($P_3(x) = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1$.)

Další příklady

Příklad 1.
Polynom $Q(x) = x^{n+1}$ můžeme pro uzly $x_0,\ldots,x_n$ vyjádřit jako $Q(x) = \omega_{n+1}(x) + P(x)$, kde stupeň polynomu P je nejvýše roven n. Ukažte, že P je interpolační polynom funkce Q na uzlech $x_0,\ldots,x_n$.

Příklad 2.
Pro přibližný výpočet $\sin 1$ použije interpolační polynom a uzly
a) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$
b) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$
c) 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$
Jaká je maximální chyba v jednotlivých případech?

7 Splajny

Příklady ze skript

Příklad 1.
Nalezněte přirozený kubický interpolační splajn pro $f(x) = \cos^2 x$ a uzly $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3}{4}\pi$.
($S_0(x) = 1 - \frac{10}{3\pi}x + \frac{16}{3\pi^3}x^3$, $S_1(x) = \frac{2}{3\pi}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{8}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{32}{3\pi^3}(x - \frac{\pi}{2})^3$.)

Další příklady

Příklad 1.
Pro uzly $0, 2, 3, 4, 6, 8$, a funkční hodnoty $3, 1, 2, 0, -1, 1$, určete explicitně lineární interpolační splajn.

Příklad 2.
Mějme uzly x_0, x_1, x_2 a nechť body $[x_0, f_0]$, $[x_1, f_1]$ a $[x_2, f_2]$ leží na přímce. Uvažujme přirozený kubický splajn, úplný kubický splajn a splajn s not-a-knot podmínkami. Kdy je některý z těchto splajnů lineární funkcí?

Příklad 3.
Je některý ze splajnů z předchozího příkladu parabolou, pokud neleží body na přímce?

Příklad 4.
Pro uzly $0, 1, 2, 3$ a odpovídající funkční hodnoty $1, -1, -3, 1$ určí matlabovská funkce spline tabulku koeficientů splajnu

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{array}.$$

Ukažte, že ve skutečnosti se jedná o interpolační polynom.

Příklad 5.
Ověřte, že koeficienty přirozeného kubického splajnu pro data z předchozího příkladu jsou

$$\begin{array}{rrrr} -0.4 & 0 & -1.6 & 1 \\ 2 & -1.2 & -2.8 & -1 \\ -1.6 & 4.8 & 0.8 & -3 \end{array}.$$

8 Bernsteinovy polynomy, Bézierovy křivky

Početní příklady

Příklad 1.
Určete Bernsteinovy polynomy stupně 2, 3 a 4 pro funkci $f(x) = x^2$.

Příklad 2.
Funkce f je spojitá, po částech lineární se zlomem v bodě 0.5, $f(0) = 0$, $f(0.5) = 0$, $f(1) = 1$. Určete Bernsteinovy polynomy stupně 2, 3, 4 a 5 pro funkci f.

Příklad 3.
Určete transformace pro výpočet Bernsteinova polynomy na libovolném intervalu $[a, b]$.

Příklad 4.
Kdy je Bézierova křivka rovna Bernsteinovu polynomu?

Příklad 5.
Bézierova křivka pro řídící body $P_0, \ldots, P_n$ je uzavřená, pokud $P_0 = P_n$. Kdy je tato křivka hladká?

Příklad 6.
Jak vypadá Bézierova křivka pro řídící body P_0, P_1, P_2, pokud $P_0 = P_2$?

9 Numerické derivování

Příklady ze skript

Příklad 1.
Pro evidistantní body a funkční hodnoty (x_{-1}, f_{-1}), (x_0, f_0), (x_1, f_1) odovďte formule

$$\begin{aligned} f'(x_{-1}) &\approx \frac{1}{2h}(-3f_{-1} + 4f_0 - f_1) \\ f'(x_1) &\approx \frac{1}{2h}(f_{-1} - 4f_0 + 3f_1) \end{aligned}$$

Příklad 2.
Odvoďte pětibodovou formuli pro ekvidistantní uzly ve tvaru

$$f_0' \approx \frac{1}{12h}(f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2).$$

Příklad 3.
Užitím tříbodových formulí vypočtěte derivace funkce v daných bodech

x_i	$-0{,}3$	$-0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}3$
f_i	$-0{,}20431$	$-0{,}08993$	$0{,}11007$	$0{,}39569$

Pro body $-0{,}1$ a $0{,}1$ použijte centrální i necentrální formule.
($f'(-0{,}3) \approx 0{,}35785$, $f'(-0{,}1) \approx 0{,}78595$, $f'(0{,}1) \approx 1{,}2141$, $f'(0{,}3) \approx 61{,}6422$.)

Příklad 4.

- Nechť $f(x) = 2^x \sin x$. Aproximujte hodnotu $f'(1{,}05)$ užitím $h = 0{,}05$ a $h = 0{,}01$ a tříbodové centrální formule jsou-li dány hodnoty:

x_i	1,0	1,04	1,06	1,10
$f(x_i)$	1,6829420	1,7732994	1,8188014	1,9103448

- Opakujte část a) pro případ, že všechny funkční hodnoty zaokrouhlíte na čtyři desetinná místa. (2,27403, 2,27510.)

Příklad 5.
Užitím tříbodové centrální formule najděte první derivaci funkce $f(x) = 1/(1+x)$ v bodě $x = 0{,}005$. Užijte a) $h = 1{,}0$, b) $h = 0{,}01$ a výsledky porovnejte s přesnou hodnotou. Vysvětlete!

10 Numerické integrování

Příklady ze skript

Příklad 1.
Určete koeficienty A_0, A_1, A_2 tak, aby přesnost kvadraturní formule

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

byla alespoň 2.
($A_0 = \frac{4}{3}$, $A_1 = -\frac{2}{3}$, $A_2 = \frac{4}{3}$.)

Příklad 2.
Určete koeficienty A_0, A_1 a uzel x_0 pro formuli

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(1).$$

($A_0 = \frac{7}{15}$, $A_1 = \frac{1}{5}$, $x_0 = \frac{3}{7}$.)

Příklad 3.
Určete algebraicky neznámé uzly x_0, x_1 a koeficienty A_0, A_1 pro formuli

$$\int_{0}^{\pi} \sin x f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

tak, aby bylo dosaženo maximálního stupně přesnosti.
($A_0 = A_1 = 1$, $x_{0,1} = \dfrac{\pi}{2} \pm \sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - 2}$.)

Příklad 4.
Odvoďte Newtonovu-Cotesovu formuli otevřeného typu pro interval $[-2, 3]$ s krokem $h = 1$.
($\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx \approx \tfrac{5}{24}(11f(-1) + f(0) + f(1) + 11f(2))$)

Příklad 5.
Odvoďte Newtonovu-Cotesovu formuli uzavřeného typu pro interval $[a, b]$ a $n = 3$ (tzv. pravidlo 3/8).

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f(b)\right)$$

Příklad 6.
Aproximujte integrál

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a) obdélníkovým, b) lichoběžníkovým, c) Simpsonovým pravidlem.
(a) 0,30055887, b) 0,27768018, c) 0,29293264.)

Příklad 7.
Následující integrály vypočtěte a) lichoběžníkovým, b) Simpsonovým pravidlem. Výsledky porovnejte s přesnými hodnotami

$$1. \int_1^2 \ln x\,dx, \quad 2. \int_0^{0,1} x^{\frac{1}{3}}\,dx, \quad 3. \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^2\,dx.$$

(a) 1. 0,34657, 2. 0,023208, 3. 0,39270,
b) 1. 0,38583, 2. 0,032296, 3. 0,30543.)

Příklad 8.
Užijte a) složeného lichoběžníkového, b) složeného Simpsonova pravidla pro výpočet integrálů:

$$\begin{aligned}
&1. \quad \int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\,dx, && M=6,\\
&2. \quad \int_0^1 \sin \pi x\,dx, && M=6,\\
&3. \quad \int_0^{2\pi} x\sin x\,dx, && M=8,\\
&4. \quad \int_0^1 x^2e^x\,dx, && M=8.
\end{aligned}$$

Porovnejte získané aproximace s přesnými hodnotami.
(a) 1. 10,3122, 2. 0,62201, 3. $-5{,}9568$, 4. 0,72889,
b) 1. 10,20751, 2. 0,6366357, 3. $-6{,}284027$, 4. 0,7182830.)

11 Metoda nejmenších čtverců

Příklady ze skript

Příklad 1.
Užijte metody nejmenších čtverců k nalezení nejlepší lineární aproximace pro hodnoty

x_i	-1	1	3	5	7
f_i	1	3	4	5	6

Příklad 2.
Pro hodnoty

x_i	0,00	0,25	0,5	0,75	1,00
f_i	1,0000	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183

nalezněte nejlepší aproximaci polynomem 1. a 2: stupně.
(Řešení: $P_1(x) = l,7078x + 0,8997,\ P_2(x) = 0.8435x^2 + 0.8643x + 1.0051$)

Příklad 3.
Pro hodnoty v předchozím příkladě:

1. Užijte tříbodové formule a vypočtěte derivace v bodech 0,25; 0,5; 0,75. V každém případě položte střed formule do toho bodu, v němž počítáte derivaci.
2. Užijte aproximace získané metodou nejmenších čtverců v předchozím příkladě a vypočtěte derivace P_2 v uvedených bodech.
3. Porovnejte výsledky s hodnotami derivace přesné funkce $f(x) = e^x$.

Další příklady

Příklad 1.
Užijte metody nejmenších čtverců k nalezení aproximace hodnot

x_i	0	2	4	6	8	10	12
f_i	1	2	1	-2	4	6	11

lomenou čarou (spojitá po částech lineární funkce), která má zlom v bodě 6.

12 Numerická optimalizace

Příklady

Příklad 1.
Je možné použít metodu půlení intervalu a metodu zlatého řezu pro numerické hledání minima klesající funkce? Pokud ano, co pak můžeme říci o posloupnostech generovaných metodami?

Příklad 2.
Použijte metodu půlení intervalu na nalezení minima funkce $e^x \sin x$ na intervalu $[4, 6)$, spočtěte aspoň 3 iterace.

Příklad 3.
Použijte metodu zlatého řezu na nalezení minima funkce $e^x \sin x$ na intervalu $[4, 6)$, spočtěte aspoň 3 iterace.

Příklad 4.
Použijte metodu kvadratické interpolace na nalezení minima funkce $e^x \sin x$ na intervalu $[4, 6)$, spočtěte aspoň 3 iterace.

Příklad 5.
Použijte Newtonovu metodu na nalezení minima funkce $e^x \sin x$ na intervalu $[4, 6)$, spočtěte aspoň 3 iterace. Je $x_0 = 4$ vhodná počáteční iterace? K čemu konverguje metoda v tomto případě?

Příklad 6.
Jak bude fungovat Newtonova metoda pro nalezení minima funkce pro polynom 2. stupně?