Reakčně-difúzní rce:
(Turingova nestabilita)
KONDO → pomec císařský

$$\dot{u} = f(u) + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

předp. D je konstanta, $x \in R^1$

$$\dot{u} = \underset{\text{vl. číslo}}{\lambda} u + \underbrace{g(u)}_{\text{nelin. část}} + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a hledáme řešení tvaru

$$u = c \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta x}$$

pro linearizaci $\dot{u} = \lambda u + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\alpha u = \lambda u - D \cdot \beta^2 u$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \lambda - D\beta^2$$

a pokud $\lambda < 0 \Rightarrow \alpha < 0$

→ stabilizující difúze

$D^2 x_i$

Δx_{i-1} Δx_i $\quad -1 \;\; 2 \;\; -1$ conv

x_{i-1} x_i x_{i+1} $\quad -1 \;\; 1$ conv

2D Reakčně-difúzní model

$$\dot{A} = D_A \nabla^2 A + f_1(A, B)$$
$$\dot{B} = D_B \nabla^2 B + f_2(A, B)$$

stac. řešení ? $f_1 = 0,\ f_2 = 0$ $[A^*, B^*]$

$$J(A^*, B^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial A} & \frac{\partial f_1}{\partial B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial A} & \frac{\partial f_2}{\partial B} \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{A=A^* \\ B=B^*}} = \begin{pmatrix} f_{1A}^* & f_{1B}^* \\ f_{2A}^* & f_{2B}^* \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\, J^* = f_{1A}^* + f_{2B}^* < 0$$
$$\det J^* = f_{1A}^* \cdot f_{2B}^* - f_{2A}^* \cdot f_{1B}^*$$

linearizace s difúzí ?

$$\dot{A} = f_{1A}^* \cdot (A - A^*) + f_{1B}^* (B - B^*) + D_A \nabla^2 A$$
$$\dot{B} = f_{2A}^* (A - A^*) + f_{2B}^* (B - B^*) + D_B \nabla^2 B$$

$a = A - A^*$, $b = B - B^*$, $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = J^* \cdot u + \underbrace{\begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & D_B \end{pmatrix}}_{D} \nabla^2 u$$

? nalezneme nějaká řešení ?

Podobně jako v 1D zkusíme hledat řešení tvaru

$$u = u_0 e^{\alpha t} e^{i\beta(x+y)} \quad , \; u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

třeba se hodí:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot u = J^* u - \beta^2 D u$$

je to řešení, pokud α je vl. číslo J:
a $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$ stabilita.

$$J = \begin{pmatrix} f_{1A}^* - \beta^2 D_A - \lambda & f_{1B}^* \\ f_{2A}^* & f_{2B}^* - \beta^2 D_B - \lambda \end{pmatrix}$$

umíte napít ✓
super !!!

je řešení $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stabilní?

$(J^* - \beta^2 D)$ má vl. čísla $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$?

$$\mathrm{Tr}(J^* - \beta^2 D) = \mathrm{Tr}\, J^* - \beta^2 (D_A + D_B)$$
< 0 sv.

$$\det(J^* - \beta^2 D) \gtrless 0 \quad ?$$

ověření

$$\det\begin{pmatrix} f_{1A}^{*}-\beta^2 D_A & f_{1B}^{*} \\ f_{2A}^{*} & f_{2B}^{*}-\beta^2 D_B \end{pmatrix} =$$

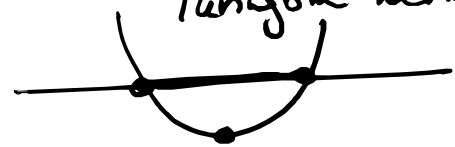
$$= \det J^{*} - \beta^2 D_B \cdot f_{1A}^{*} - \beta^2 D_A f_{2B}^{*} + \beta^4 D_A D_B$$

$$\det J^{*} > 0$$

?

$$\underset{+}{\beta^4 \cdot C_1} - \beta^2 \cdot C_2 + \det J^{*} < 0$$

Turingova nestabilita



β^2

Gray-Scottův model:

$$f_1(A,B) = f(1-A) - kAB^2$$
$$f_2(A,B) = kAB^2 - (f+g)B$$

reakce $A + 2B \xrightarrow{k} 3B$

A vznikají a zanikají rychlostí f

B zaniká vyšší rychlostí $(f+g)$

(vzniká pouze reakcí s A)

$D_A > D_B$