Dynamické systémy

M6868 Spojité deterministické modely II

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

14. května 2024

Semidynamický systém:

- Neprázdná množina X
- Časová množina $J \subseteq [0, \infty)$
  (1) $0 \in J, 1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $s, t \in J,\ s < t, \quad \Rightarrow \quad t - s \in J$
- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$
  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Semidynamický systém:

- Metrický prostor X
- Časová množina $J \subseteq [0, \infty)$

  (1) $0 \in J, 1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $s, t \in J,\ s < t, \quad \Rightarrow \quad t - s \in J$

- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$

  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

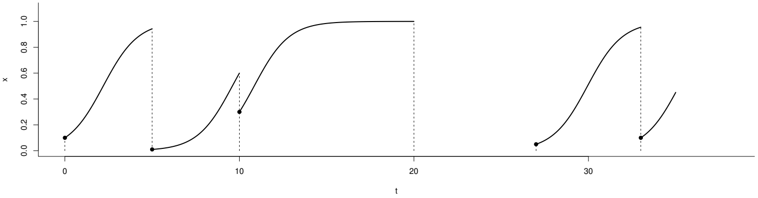
Systém *se spojitými stavy:* $\Phi(t, \cdot\,) : X \to X$ je spojité pro každé $t \in J$
spojitý v čase: $\Phi(\,\cdot\,, x) : J \to X$ je spojitá funkce pro každé $x \in X$
spojitý: Φ je spojité vzhledem k součinové topologii na $J \times X$

Dynamický systém:

- Metrický prostor X
- Časová množina $J \subseteq \mathbb{R}$
  (1) $0 \in J, 1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $(J, +)$ je podgrupa $(\mathbb{R}, +)$
- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$
  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Systém *se spojitými stavy:* $\Phi(t, \cdot\,) : X \to X$ je spojité pro každé $t \in J$
spojitý v čase: $\Phi(\,\cdot\,, x) : J \to X$ je spojitá funkce pro každé $x \in X$
spojitý: Φ je spojité vzhledem k součinové topologii na $J \times X$

Čas



Čas

Vlastnosti času

- A1 Pokud rozlišíme dva okamžiky, rozlišíme také, který byl dříve a který později;
  rozlišujeme minulost a budoucnost;
  přítomný okamžik dělí běh času na minulost a budoucnost;
  není úplně jasné, co to je přítomný okamžik.
- A2 Minulost plynule přechází do budoucnosti;
  při přechodu z minulosti do budoucnosti nelze „vypadnout z času";
  mezi všemi budoucími okamžiky je „ten nejbližší".
- A3 Jsme schopni plynoucí čas jaksi kvantifikovat;
  můžeme rozlišit okamžiky „blízké" a „vzdálené".

Čas

$(\mathcal{T}, \leq, \nu)$ se nazývá *řetězec s mírou* [(strong) measure chain], pokud $\mathcal{T} \neq \emptyset$ a platí:

A1 Relace „$\leq$“ splňuje (pro všechna $r, s, t \in \mathcal{T}$):

(i) $t \leq t$ (reflexivita);
(ii) je-li $r \leq s$ a $s \leq t$, pak $r \leq t$ (tranzitivita);
(iii) je-li $r \leq s$ a $s \leq r$, pak $r = s$ (antisymetrie);
(iv) $r \leq s$ nebo $s \leq r$ (úplnost).

A2 Každá neprázdná podmnožina $\mathcal{T}$, která má v $\mathcal{T}$ horní závoru, má v $\mathcal{T}$ supremum (řetězec $(\mathcal{T}, \leq)$ je podmíněně úplný).

A3 Zobrazení $\nu : \mathcal{T}^2 \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti (pro všechna $r, s, t \in \mathcal{T}$):

(i) $\nu(r, s) + \nu(s, t) = \nu(r, t)$ (kocykličnost);
(ii) je-li $r > s$, pak $\nu(r, s) > 0$ (silná izotonie);
(iii) ν je spojité.

Čas

„Nejbližší budoucnost“ a „nejbližší minulost“: operátory *skoku vpřed* a *vzad*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathcal{T} : s > t\}, \quad \rho(t) = \sup\{s \in \mathcal{T} : s < t\}.$$

Čas někdy plyne spojitě, někdy diskrétně.

Zrnitost času v okamžiku t definujeme jako $\mu(t) = \nu\big(\sigma(t), t\big)$.

Dynamické rovnice

$\mathbb{X}$ Banachův prostor s normou $|\cdot|$, $f : \mathcal{T} \to \mathbb{X}$

f je diferencovatelné v $t \in \mathcal{T}$, pokud existuje $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{X}$, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje okolí U okamžiku t splňující

$$\left|f\big(\sigma(x)\big) - f(s) - f^{\Delta}(t)\nu\big(\sigma(t), s\big)\right| \leq \varepsilon\left|\nu\big(\sigma(t), s\big)\right| \quad \text{pro každé } s \in U.$$

Dynamické rovnice

$\mathbb{X}$ Banachův prostor s normou $|\cdot|$, $f:\mathcal{T}\to\mathbb{X}$

f je diferencovatelné v $t\in\mathcal{T}$, pokud existuje $f^{\Delta}(t)\in\mathbb{X}$, že ke každému $\varepsilon>0$ existuje okolí U okamžiku t splňující

$$\left|f\big(\sigma(x)\big)-f(s)-f^{\Delta}(t)\nu\big(\sigma(t),s\big)\right|\le\varepsilon\left|\nu\big(\sigma(t),s\big)\right|\quad\text{pro každé } s\in U.$$

Zobrazení $\tau:\mathcal{T}\to\mathbb{R}$

$$t_0\in\mathcal{T},\ \tau(t)=\nu(t,t_0)$$

$\mathbb{T}=\{x\in\mathbb{R}:\ \exists(t\in\mathcal{T})\,\tau(t)=x\}$

Dynamické rovnice

Příklady:

- Libovolná uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ – časová škála (time scale)
- $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$:

$\mathcal{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
$\sigma(t)$	t	$t+1$
$\rho(t)$	t	$t-1$
$\nu(r,s)$	$r-s$	$r-s$
$\mu(t)$	0	1
rd-spojitá f	spojitá funkce f	libovolná posloupnost f
$f^{\Delta}(t)$	$f'(t)$	$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$
$\int\limits_r^s f(t)\Delta t$	$\int\limits_r^s f(t)\mathrm{d}t$	$\sum\limits_{t=r}^{s-1} f(t)$

MASARYKOVA
UNIVERZITA