

# Obsah

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>I</b> | <b>Parciální diferenciální rovnice</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1</b> | <b>Rovnice prvního řádu</b>   | <b>3</b>  |
|          | Vývoj věkově strukturované populace . . . . .                                       | 3         |
|          | Model procesu umírání . . . . .   | 3         |
|          | Model procesu rození . . . . .  | 6         |
|          | „Seminumerické“ řešení modelu věkově strukturované populace . . . . .               | 8         |
| 1.1      | Rovnice ve dvou nezávisle proměnných . . . . .                                      | 10        |
| 1.1.1    | Lineární rovnice . . . . .  | 10        |
|          | Řešení rovnice $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$ . . . . .                              | 12        |
| 1.1.2    | Kanonický tvar a řešení rovnice lineární v prvních derivacích . . . . .             | 14        |
| 1.1.3    | Okrajové úlohy . . . . .  | 21        |
|          | Okrajová úloha pro rovnici $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u)$ . . . . .         | 21        |
|          | Okrajová úloha pro obecnou rovnici . . . . .  | 25        |
|          | Quasilineární rovnice a její geometrická interpretace . . . . .                     | 30        |
| 1.2      | Rovnice v $n$ nezávisle proměnných . . . . .  | 33        |
|          | Rovnice lineární v derivacích s nulovou pravou stranou . . . . .                    | 33        |
|          | Quasilineární rovnice . . . . .   | 39        |
|          | Okrajová úloha pro obecnou rovnici . . . . .  | 40        |
| 1.3      | Evoluční rovnice . . . . .  | 41        |
| 1.3.1    | Počáteční úloha pro evoluční lineární rovnici v jedné strukturní proměnné . . . . . | 42        |
|          | Homogenní rovnice . . . . .   | 42        |
|          | Nehomogenní rovnice . . . . .   | 43        |
| 1.3.2    | Okrajové podmínky . . . . .   | 45        |
| 1.3.3    | Autonomní rovnice . . . . .   | 46        |
|          | Cvičení . . . . .   | 48        |
| <b>2</b> | <b>Rovnice druhého řádu</b>   | <b>51</b> |
|          | Jednorozměrná rovnice difúze / vedení tepla . . . . .                               | 51        |
|          | Speciální případy a okrajové podmínky . . . . .                                     | 54        |
|          | Nejjednodušší řešení . . . . .  | 56        |
| 2.1      | Rovnice ve dvou nezávisle proměnných lineární ve druhých derivacích . . . . .       | 58        |
| 2.1.1    | Charakteristiky a kanonický tvar rovnice . . . . .                                  | 59        |
| 2.2      | Lineární parabolická rovnice s konstantními koeficienty . . . . .                   | 63        |
| 2.2.1    | Kanonický tvar . . . . .  | 64        |
| 2.3      | Evoluční rovnice (rovnice difúze, rovnice vedení tepla) . . . . .                   | 65        |
| 2.3.1    | Nehomogenní rovnice . . . . .   | 66        |
| 2.3.2    | Parabolická rovnice na kružnici . . . . .   | 67        |
| 2.3.3    | Parabolická rovnice na přímce . . . . .   | 70        |
|          | Homogenní rovnice s nenulovou počáteční podmínkou . . . . .                         | 70        |
|          | Nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou . . . . .                         | 73        |
|          | Nehomogenní rovnice s nenulovou počáteční podmínkou . . . . .                       | 73        |
|          | Vlastnosti zřídlové funkce . . . . .  | 76        |

|  |   |            |
|--|---|------------|
| 2.3.4  | Parabolická rovnice na polopřímce . . . . .   | 77         |
|  | Úlohy s nulovou okrajovou podmínkou . . . . .                                       | 77         |
|  | Úlohy s nenulovou okrajovou podmínkou . . . . .                                     | 79         |
| 2.3.5  | Parabolická rovnice na úsečce . . . . .   | 81         |
|  | Dirichletova úloha . . . . .  | 81         |
|  | Obecná Robinova úloha . . . . .   | 86         |
| 2.3.6  | Počáteční úlohy pro parabolické rovnice – shrnutí . . . . .                         | 89         |
| 2.3.7  | Úloha bez počátečních podmínek . . . . .  | 90         |
|  | Teplotní vlny . . . . .   | 94         |
| 2.4  | Rovnice reakce-difúze . . . . .   | 96         |
| 2.4.1  | Lineární rovnice . . . . .  | 96         |
|  | A. Rovnice na úsečce . . . . .  | 96         |
|  | B. Rovnice na přímce – putující vlna . . . . .                                      | 100        |
| 2.4.2  | Fisherova-Kolmogorovova rovnice . . . . .   | 101        |
|  | A. Rovnice na úsečce . . . . .  | 101        |
|  | B. Rovnice na přímce – putující vlna . . . . .                                      | 108        |
| 2.4.3  | Systém rovnic reakce-difúze – Turingův jev . . . . .                                | 110        |
|  | A. Rovnice na jednorozměrném prostoru s lineární reakcí . . . . .                   | 110        |
|  | B. Rovnice na jednorozměrném prostoru s nelineární reakcí . . . . .                 | 114        |
| <b>II Diferenciální rovnice se zpožděním</b> |   | <b>117</b> |
| <b>3</b>                                     | <b>Jednočlenná lineární rovnice</b>   | <b>119</b> |
|  | Nejjednodušší model zpětnovazební regulace . . . . .                                | 119        |
| 3.1  | Rovnice s diskrétním zpožděním . . . . .  | 121        |
|  | 1. transformace . . . . .   | 121        |
|  | 2. transformace . . . . .   | 122        |
| 3.1.1  | Řešení metodou kroků . . . . .  | 122        |
| 3.1.2  | Řešení pomocí Laplaceovy transformace . . . . .                                     | 125        |
| 3.1.3  | Charakteristická rovnice . . . . .  | 126        |
| 3.2  | Rovnice s distribuovaným zpožděním . . . . .  | 129        |
| 3.2.1  | Distribuované zpoždění typu $\Gamma$ . . . . .                                      | 131        |
|  | Rovnice s diodistribuovaným zpožděním typu $\Gamma$ v bezrozměrném tvaru . . . . .  | 132        |
|  | Příklad: Řešení rovnice (3.22) s parametrem $p = 1$ . . . . .                       | 133        |
|  | Charakteristická rovnice a nestabilita . . . . .                                    | 134        |
|  | Ekvivalence rovnice (3.22) se systémem obyčejných lineárních rovnic . . . . .       | 135        |
| <b>III Aplikace</b>                          |   | <b>137</b> |
| <b>4</b>                                     | <b>Model věkově strukturované populace</b>  | <b>139</b> |
|  | Řešení úlohy (4.1), (4.2), (4.3) . . . . .  | 139        |
|  | Lotkova rovnice obnovy . . . . .  | 141        |
|  | Specifická míra přežití a specifická úmrtnost . . . . .                             | 143        |
|  | Věkově stabilizované řešení rovnice (4.1) . . . . .                                 | 145        |
|  | Demografické charakteristiky populace . . . . .                                     | 147        |
|  | Omezená adekvátnost modelu . . . . .  | 150        |
| 4.1  | Dvoj-pohlavní populace . . . . .  | 151        |
|  | Dynamika párů . . . . .   | 152        |
|  | Funkce partnerství . . . . .  | 152        |
| 4.2  | Populace s porodností nebo úmrtností závislou na její velikosti . . . . .           | 154        |
| 4.2.1  | Porodnost i úmrtnost závislé pouze na velikosti populace, nikoliv na věku . . . . . | 155        |
|  | Porodnost větší než úmrtnost a vnitrodruhová konkurence . . . . .                   | 155        |

|  |            |
|--|------------|
| Vnitrodruhová konkurence a Alleho efekt                                    | 157        |
| 4.2.2 Úmrtnost závislá pouze na věku, plodnost klesající s věkem           | 157        |
| 4.2.3 Populace složená z jedinců juvenilních a plodných                    | 160        |
| <b>5 Modely prostorově strukturované populace</b>                          | <b>163</b> |
| 5.1 Model biologické invaze  | 166        |
| 5.2 Šíření populace v omezeném prostoru                                    | 168        |
| 5.2.1 Malthusovská populace v jednorozměrném prostoru                      | 168        |
| 5.2.2 Malthusovská populace ve dvojrozměrném prostoru, radiálně symetrická | 169        |
| 5.2.3 Malthusovská populace v nehomogenním prostoru                        | 172        |
| 5.2.4 Verhulstovská populace na prostoru se „smrtící“ hranicí              | 174        |
| Shrnutí:   | 175        |
| 5.3 Prostorové šíření epidemie typu SIR                                    | 175        |
| <b>6 Modely šíření vzruchu v neuronu</b>                                   | <b>181</b> |
| 6.1 Model  | 181        |
| 6.1.1 Redukce modelu   | 183        |
| 6.1.2 Excitace „bodového neuronu“  | 184        |
| <b>A Distribuce</b>  | <b>187</b> |
| A.1 Základní pojmy   | 187        |
| A.2 Konvergence v prostoru distribucí                                      | 191        |
| A.2.1 $\delta$ -vytvorující posloupnosti                                   | 191        |
| A.3 Derivování distribucí  | 192        |
| Cvičení  | 196        |
| <b>B Integrovní transformace</b>   | <b>197</b> |
| B.1 Fourierova transformace a konvoluce                                    | 197        |
| B.2 Laplaceova transformace  | 201        |
| Cvičení  | 201        |
| <b>C Okrajové úlohy pro obyčejné lineární rovnice druhého řádu</b>         | <b>203</b> |
| C.1 Formulace úloh   | 203        |
| Diferenciální operátor   | 203        |
| Okrajové podmínky  | 204        |
| Symetrický diferenciální operátor  | 205        |
| C.2 Homogenní okrajová úloha s parametrem                                  | 206        |
| Sturmova-Liouvilleova úloha  | 209        |
| C.3 Nehomogenní rovnice s homogenními okrajovými podmínkami                | 210        |
| Fourierova metoda  | 210        |
| Metoda variace konstant  | 212        |
| Greenova funkce  | 213        |
| C.4 Úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami                            | 214        |
| Cvičení  | 215        |
| <b>D Speciální funkce</b>  | <b>217</b> |
| D.1 Čebyševovy-Hermiteovy polynomy   | 217        |
| D.1.1 Definice   | 217        |
| D.1.2 Rekurentní vztahy pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy                 | 217        |
| D.1.3 Diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy             | 218        |
| D.1.4 Rekurentní vztahy pro koeficienty Čebyševových-Hermiteových polynomů | 219        |
| D.2 Besselovy funkce   | 219        |
| D.2.1 Řešení rovnice (D.4) Frobeniovou metodou                             | 220        |
| D.2.2 Vlastnosti Besselovy funkce prvního druhu                            | 222        |

Část I

# Parciální diferenciální rovnice



# Kapitola 1

## Rovnice prvního řádu

### Vývoj věkově strukturované populace

Uvažujme nějakou populaci tvořenou jedinci různého věku. Předpokládejme, že známe složení této populace v nějakém čase a zajímá nás, jak se bude vyvíjet její velikost a věkové složení. K vyjádření velikosti populace můžeme používat dvě veličiny. Můžeme ji vyjadřovat jednak jako množství<sup>1</sup> jedinců, kteří mají v čase  $t$  věk v rozmezí od  $a$  do  $a + \tau$ , přesněji jedince, kteří mají v čase  $t$  věk z intervalu  $[a, a + \tau)$ ; tuto veličinu označíme  $N(t, a, \tau)$ . Velikost populace však můžeme vyjádřit také jako tzv. *hustotu populace věku  $a$  v čase  $t$* , kterou označíme symbolem  $u(t, a)$ . Hustota populace  $u$  a velikost populace  $N$  jsou vázány vztahem

$$N(t, a, \tau) = \int_a^{a+\tau} u(t, \xi) d\xi.$$

O hustotě  $u$  budeme předpokládat, že je to spojitě diferencovatelná funkce<sup>2</sup>. Obě funkce  $u$  a  $N$  jsou nezáporné.

Procesy probíhající v populaci jsou rození a umírání.

#### Model procesu umírání

Označme symbolem  $D(t, a, \tau)$  množství jedinců, kteří zemřou během časového intervalu  $(t, t + \tau]$  a v čase  $t$  mají věk v rozmezí  $[a, a + \tau)$ . Jedinci, kteří během časového intervalu délky  $\tau$  nezemřeli, zestárlí o  $\tau$ . Tuto triviální skutečnost (zákon zachování) vyjádříme rovností

$$N(t + \tau, a + \tau, \tau) = N(t, a, \tau) - D(t, a, \tau). \quad (1.1)$$

Vyjádříme levou stranu této rovnosti a upravíme pomocí substituce  $\eta = \xi - \tau$ ,

$$N(t + \tau, a + \tau, \tau) = \int_{a+\tau}^{a+2\tau} u(t + \tau, \xi) d\xi = \int_a^{a+\tau} u(t + \tau, \eta + \tau) d\eta.$$

<sup>1</sup>Slovo „množství“ může označovat počet všech jedinců. Může to však také být počet jedinců vztahený k nějaké ploše, počet nějak „reprezentativně“ vybraných jedinců (např. plodných samic) a podobně.

<sup>2</sup>Tento předpoklad není realistický. Bezprostředně z něho totiž plyne, že funkce  $N$  je spojitá. Přitom ale  $N$  nabývá hodnot celočíselných (pokud vyjadřuje počet jedinců) nebo racionálních (pokud vyjadřuje populační hustotu, tj. počet jedinců vztahených k nějaké ploše). Tato poznámka zdůrazňuje skutečnost, že se nesnažíme přesně popsat skutečnost, ale konstruujeme její idealizovaný (abstraktní, zjednodušený) model.

S využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkce dvou proměnných můžeme psát

$$\begin{aligned} N(t + \tau, a + \tau, \tau) - N(t, a, \tau) &= \\ &= \int_a^{a+\tau} (u(t + \tau, \xi + \tau) - u(t, \xi)) d\xi = \int_a^{a+\tau} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t + \vartheta_1 \tau, \xi + \tau) \tau + \frac{\partial u}{\partial a}(t, \xi + \vartheta_2 \tau) \tau \right) d\xi = \\ &= \tau \int_a^{a+\tau} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t + \vartheta_1 \tau, \xi + \tau) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, \xi + \vartheta_2 \tau) \right) d\xi, \end{aligned} \quad (1.2)$$

kde  $\vartheta_1, \vartheta_2$  jsou nějaká čísla z intervalu  $[0, 1]$ . K vyjádření množství umírajících jedinců budeme předpokládat, že podíl zemřelých jedinců jistého věku za krátký časový interval délky  $\Delta t$  mezi všemi jedinci téhož věku je přímo úměrný trvání  $\Delta t$  procesu umírání,

$$\frac{D(t, a, \Delta t)}{N(t, a, \Delta t)} = \mu(a) \Delta t.$$

O koeficientu úměrnosti  $\mu$  předpokládáme, že závisí pouze na věku  $a$ , nikoliv na čase  $t$ . Uvažujeme tedy vývoj populace v podmínkách, které se v čase nemění. Koeficient  $\mu$  nazýváme *specifická úmrtnost (mortalita) ve věku  $a$* . Výraz na levé straně poslední rovnosti můžeme také interpretovat jako klasickou pravděpodobnost, že jedinec, který má v čase  $t$  věk v rozmezí od  $a$  do  $a + \Delta t$ , zemře v průběhu časového intervalu  $(t, t + \Delta t]$ . Hodnotu  $\mu(a)$  proto můžeme chápat jako pravděpodobnost, že jedinec věku  $a$  zemře během jednotkového časového intervalu<sup>3</sup>. Specifickou úmrtnost budeme považovat za spojitou nezápornou funkci  $\mu$  definovanou na intervalu  $[0, \infty)$ . Typický průběh funkce  $\mu$  je znázorněn na Obrázku 1.1 a): Úmrtnost novorozenců je relativně velká. Pak až do jistého věku (většinou do dospělosti, ukončení individuálního vývoje) klesá. Dále zůstane na nějaké nízké úrovni a po dosažení hranice stáří opět roste; zpočátku lineárně a nakonec jako konvexní funkce.

Z uvedeného předpokladu dostaneme vyjádření množství umírajících jedinců ve tvaru

$$D(t, a, \Delta t) = \mu(a) N(t, a, \Delta t) \Delta t = \Delta t \left( \mu(a) \int_a^{a+\Delta t} u(t, \xi) d\xi \right). \quad (1.3)$$

Položíme  $\tau = \Delta t$  a dosadíme rovnosti (1.2) a (1.3) do relace (1.1). Dostaneme

$$\int_a^{a+\Delta t} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t + \vartheta_1 \Delta t, \xi + \Delta t) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, \xi + \vartheta_2 \Delta t) + \mu(a) u(t, \xi) \right) d\xi = 0.$$

Tato rovnost má platit pro libovolná  $a \geq 0, t \geq 0$  a  $\Delta t > 0$ . To je možné jen tak, že integrovaná funkce (která je podle předpokladu spojitá) je nulová, tj. pro všechna přípustná  $a, t, \Delta t$  platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t + \vartheta_1 \Delta t, a + \Delta t) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, a + \vartheta_2 \Delta t) + \mu(a) u(t, a) = 0$$

a odtud limitním přechodem  $\Delta t \rightarrow 0$  dostaneme *McKendrickovu-von Foersterovu rovnici*

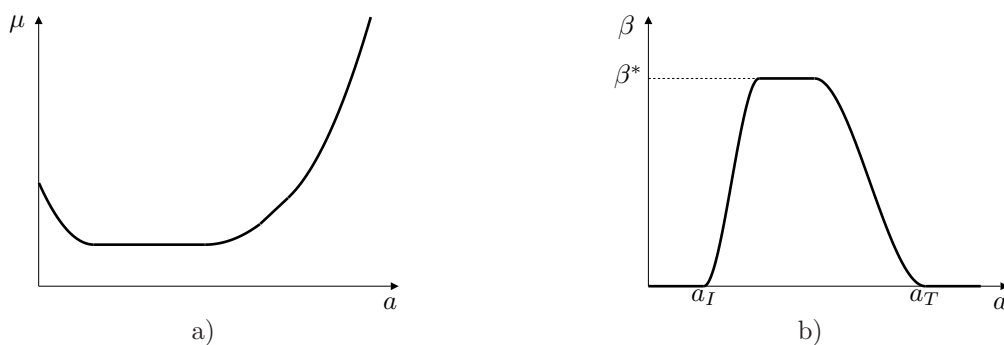
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, a) = -\mu(a) u(t, a). \quad (1.4)$$

Známé složení populace na počátku vyjádříme *počáteční podmínkou*

$$u(0, a) = \varphi(a) \quad (1.5)$$

příslušnou k rovnici (1.4). Funkce  $\varphi$  se nazývá *počáteční funkce*; vyjadřuje hustotu populace v počátečním čase  $t = 0$  a je to podle předpokladu spojitá funkce.

<sup>3</sup>Přesnější vyjádření je „intenzita pravděpodobnosti“. Hodnota  $\mu$  má totiž rozměr převrácené hodnoty času a pravděpodobnost je bezrozměrná; navíc  $\mu$  může být větší než 1.



Obrázek 1.1: Typický průběh a) specifické úmrtnosti  $\mu$  a b) specifické porodnosti  $\beta$  v závislosti na věku. Hodnota  $a_I$  označuje věk počátku plodnosti (dospělosti), hodnota  $a_T$  věk ukončení plodnosti.

Popíšeme, jak se vyvíjí část populace tvořená jedinci, kteří se narodili před časem  $t = 0$ . V takto vymezené části populace má v čase  $t$  každý jedinec věk větší než  $t$ . Zajímá nás tedy hustota  $u$ , jejíž definiční obor je zúžen na množinu

$$A_1 = \{(t, a) \in \mathbb{R}^2 : a > t \geq 0\}. \quad (1.6)$$

Zvolíme libovolné  $a_0 > 0$  a pro  $a \geq a_0$  položíme

$$x(a) = u(a - a_0, a).$$

Pak podle řetězového pravidla pro výpočet derivací složené funkce a podle rovnice (1.4) platí

$$\begin{aligned} x'(a) &= \frac{d}{da} u(a - a_0, a) = \frac{\partial u}{\partial t}(a - a_0, a) \frac{\partial(a - a_0)}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}(a - a_0, a) \frac{\partial a}{\partial a} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(a - a_0, a) + \frac{\partial u}{\partial a}(a - a_0, a) = -\mu(a)u(a - a_0, a) = -\mu(a)x(a). \end{aligned}$$

Z počáteční podmínky (1.5) dostaneme

$$x(a_0) = u(a_0 - a_0, a_0) = u(0, a_0) = \varphi(a_0). \quad (1.7)$$

Funkce  $x$  je tedy řešením obyčejné lineární homogenní rovnice

$$x'(a) = -\mu(a)x(a)$$

s počáteční podmínkou (1.7). To znamená, že

$$x(a) = \varphi(a_0) e^{-\int_{a_0}^a \mu(\xi) d\xi}$$

a poněvadž  $u(t, a) = u(a - (a - t), a)$ , můžeme psát řešení rovnice (1.4) s počáteční podmínkou (1.5) na množině  $A$  dané rovností (1.6) ve tvaru

$$u(t, a) = \varphi(a - t) e^{-\int_{a-t}^a \mu(\xi) d\xi}. \quad (1.8)$$

Ze spojitosti funkce  $u$  dále plyne, že takto definovaná funkce je řešením počáteční úlohy (1.4), (1.5) na množině  $\bar{A}_1 = \{(t, a) \in \mathbb{R}^2 : a \geq t \geq 0\}$ .



## Model procesu rození

Nejprve si uvědomíme, že v populaci nemohou být jedinci neomezeného věku. V časovém okamžiku  $t$  je v populaci nějaký maximální věk  $a_{\max}$ ; hodnota  $a_{\max}$  závisí na čase  $t$ . Pro hustotu  $u$  tedy platí  $u(t, a) = 0$  pro každé  $a > a_{\max}$ . Vezmeme libovolné celé kladné číslo  $n$  a položíme

$$\Delta a = \frac{a_{\max}}{n}, \quad a_i = i\Delta a, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

O jedincích, kteří v čase  $t$  mají věk  $a$  takový, že  $a_{i-1} < a \leq a_i$ , řekneme, že jsou v čase  $t$  v  $i$ -té věkové třídě. Množství jedinců v  $i$ -té věkové třídě je rovno  $N(t, a_{i-1}, \Delta a)$ ; to plyne z předpokládané spojitosti hustoty  $u$ .

Označme  $B_i(t, \tau)$  množství novorozenců, kteří se narodili v časovém intervalu  $(t, t + \tau]$  a jsou potomky jedinců<sup>4</sup>, kteří v čase  $t$  byli v  $i$ -té věkové třídě. K vyjádření množství novorozenců budeme předpokládat, že v krátkém časovém intervalu délky  $\Delta t$  je množství narozených potomků jedinců z nějaké věkové třídy úměrné velikosti této věkové třídy a délce časového intervalu  $\Delta t$ , tj.

$$B_i(t, \Delta t) = \beta_i N(t, a_{i-1}, \Delta a) \Delta t = \beta_i \Delta t \int_{a_{i-1}}^{a_i} u(t, \xi) d\xi,$$

koeficienty úměrnosti  $\beta_i$  jsou nezáporné. Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu existují čísla  $\alpha_i$ ,  $a_{i-1} \leq \alpha_i \leq a_i$ , taková, že

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} u(t, \xi) d\xi = u(t, \alpha_i) \Delta a.$$

Dostáváme tak vyjádření

$$\frac{B_i(t, \Delta t)}{\Delta t} = \beta_i u(t, \alpha_i) \Delta a, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.9)$$

Zavedeme nyní spojitou nezápornou funkci  $\beta$  nezávisle proměnné  $a$ , pro niž platí  $\beta(\alpha_i) = \beta_i$ . Funkční hodnotu  $\beta(a)$  interpretujeme jako očekávaný (typický) počet potomků, které má jedinec věku  $a$  během jednotkového časového intervalu. Funkci  $\beta$  budeme proto nazývat *věkově specifická porodnost*. Typický průběh specifické porodnosti  $\beta$  je znázorněn na Obrázku 1.1 b). Novorození jedinci žádné potomky nemají, mohou je mít až po dosažení jistého věku  $a_I$  (dospělosti). Pak porodnost naroste do jisté maximální hodnoty  $\beta^*$ , po nějaké době začne klesat a ve věku  $a_T$  (po menopauze) vymizí. Většina organismů je plodná až do smrti, přežívání po menopauze se objevuje jen u některých primátů nebo kytovců; hodnota  $a_T$  tedy může být větší než maximální možný věk dosahovaný v populaci.

Pravou stranu rovností (1.9) nyní můžeme psát ve tvaru  $\beta(\alpha_i)u(t, \alpha_i)\Delta a$ ; zřejmě pro ni platí nerovnosti

$$\min_{a_{i-1} \leq \xi \leq a_i} (\beta(\xi)u(t, \xi)) \Delta a \leq \beta(\alpha_i)u(t, \alpha_i) \Delta a \leq \max_{a_{i-1} \leq \xi \leq a_i} (\beta(\xi)u(t, \xi)) \Delta a,$$

takže součet levých stran rovností (1.9) vyhovuje nerovnostem

$$\sum_{i=1}^n \min_{a_{i-1} \leq \xi \leq a_i} (\beta(\xi)u(t, \xi)) \Delta a \leq \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^n B_i(t, \Delta t) \leq \sum_{i=1}^n \max_{a_{i-1} \leq \xi \leq a_i} (\beta(\xi)u(t, \xi)) \Delta a. \quad (1.10)$$

Součet  $\sum_{i=1}^n B_i(t, \Delta t)$  vyjadřuje množství všech novorozenců, kteří se narodili v krátkém časovém intervalu  $(t, t + \Delta t]$ . Jinak řečeno, vyjadřuje množství všech jedinců, kteří v čase  $t + \Delta t$  měli věk

<sup>4</sup>U pohlavně se rozmnožující populace zní vyjádření „potomek jedince“ podivně; každý je potomkem dvou jedinců různého pohlaví, kteří mohou být různého věku. V takovém případě je vhodné za populaci považovat pouze populaci samic.

z intervalu  $[0, \Delta t]$ . To znamená, že

$$\sum_{i=1}^n B_i(t, \Delta t) = N(t + \Delta t, 0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} u(t + \Delta t, \xi) d\xi = u(t + \Delta t, \theta \Delta t) \Delta t,$$

kde  $\theta \in (0, 1)$  je nějaké číslo; poslední rovnost plyne z věty o střední hodnotě integrálního počtu. Uvedené vyjádření dosadíme do nerovností (1.10) a dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \min_{a_{i-1} \leq \xi \leq a_i} (\beta(\xi)u(t, \xi)) \Delta a \leq u(t + \Delta t, \theta \Delta t) \leq \sum_{i=1}^n \max_{a_{i-1} \leq \xi \leq a_i} (\beta(\xi)u(t, \xi)) \Delta a.$$

Výraz na levé straně konverguje pro  $\Delta a \rightarrow 0$  (tj. pro  $n \rightarrow \infty$ ) k dolnímu (Riemannovu) integrálu z funkce  $\beta(\cdot)u(t, \cdot)$  na intervalu  $[0, a_{\max}]$ , výraz na pravé straně k integrálu hornímu. V limitě  $n \rightarrow \infty$  tak dostáváme rovnost

$$u(t + \Delta t, \theta \Delta t) = \int_0^{a_{\max}} \beta(\xi)u(t, \xi) d\xi.$$

Nyní provedeme další limitní přechod  $\Delta t \rightarrow 0$ . Nakonec si ještě uvědomíme, že pro  $\xi > a_{\max}$  je  $\beta(\xi)u(t, \xi) = 0$  při libovolném  $t$ . V horní mezi integrálu tedy můžeme psát  $\infty$ . Dostaneme tak

$$u(t, 0) = \int_0^{\infty} \beta(\xi)u(t, \xi) d\xi; \quad (1.11)$$

to je *okrajová podmínka* pro rovnici (1.4), která bývá také nazývána *podmínka obnovy*.

Popíšeme, jak se vyvíjí část populace tvořená jedinci, kteří se narodili po čase  $t = 0$ . V takto vymezené části populace má v čase  $t$  každý jedinec věk menší než  $t$ . Zajímá nás tedy hustota  $u$ , jejíž definiční obor je zúžen na množinu

$$A_2 = \{(t, a) \in \mathbb{R}^2 : t > a \geq 0\}.$$

Zřejmě je  $A_2 \cup \bar{A}_1 = [0, \infty) \times [0, \infty)$ , takže hledáme řešení rovnice (1.4) na zbytku definičního oboru hustoty  $u$ .

Výraz na pravé straně rovnosti (1.11) závisí pouze na proměnné  $t$ . Proto ho označíme symbolem  $\psi(t)$ . Zvolíme libovolné  $t_0 > 0$  a pro  $a \geq 0$  položíme

$$y(a) = u(a + t_0, a).$$

Pak platí

$$y(0) = \psi(t_0), \quad y'(a) = -\mu(a)y(a),$$

takže funkce  $y$  je řešením této Cauchyovy úlohy pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici, tj.

$$u(a + t_0, a) = y(a) = \psi(t_0) e^{-\int_0^a \mu(\xi) d\xi}.$$

Poněvadž hodnota  $t_0$  byla libovolná a platí  $u(t, a) = u(a + (t - a), a)$ , řešení rovnice (1.4) na množině  $A_2$ , které splňuje okrajovou podmínku (1.11), dostaneme ve tvaru

$$u(t, a) = \psi(t - a) e^{-\int_0^a \mu(\xi) d\xi}, \quad (1.12)$$

kde funkce  $\psi$  je definována integrálem

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} \beta(\xi)u(t, \xi) d\xi. \quad (1.13)$$

## „Seminumerické“ řešení modelu věkově strukturované populace

Model vývoje věkově strukturované populace je dán rovnicí (1.4) spolu s počáteční podmínkou (1.5) a s okrajovou podmínkou (1.11). Zapišeme ho v kompaktnějším tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(a)u, \quad t > 0, a > 0, \quad (1.14)$$

$$u(0, a) = \varphi(a), \quad a > 0, \quad (1.15)$$

$$u(t, 0) = \int_0^\infty \beta(\xi)u(t, \xi)d\xi, \quad t > 0. \quad (1.16)$$

Hledaná funkce  $u = u(t, a)$  vyjadřuje hustotu populace věku  $a$  v čase  $t$ . Poznamenejme, že v rovnici (1.14) nepíšeme explicitně nezávisle proměnné  $t, a$  jako argumenty funkce  $u$ , neboť jsou zapsány v operátorech parciálních derivací. Počáteční funkce  $\varphi = \varphi(a)$  vyjadřuje strukturu populace (tj. její hustotu) v čase  $t = 0$ , funkce  $\beta = \beta(a)$  vyjadřuje věkově specifickou porodnost a funkce  $\mu = \mu(a)$  věkově specifickou úmrtnost.

Z dosud provedených výpočtů, tj. podle (1.8), (1.12) máme řešení úlohy (1.14), (1.15), (1.16) ve tvaru

$$u(t, a) = \begin{cases} \varphi(a-t) e^{-\int_{a-t}^a \mu(\xi)d\xi}, & t \leq a, \\ \psi(t-a) e^{-\int_0^a \mu(\xi)d\xi}, & t > a. \end{cases}$$

Pro zjednodušení zápisu označme

$$\ell(a) = e^{-\int_0^a \mu(\xi)d\xi}.$$

Řešení úlohy (1.14), (1.15), (1.16) pak zapišeme

$$u(t, a) = \begin{cases} \varphi(a-t) \frac{\ell(a)}{\ell(a-t)}, & t \leq a, \\ \psi(t-a)\ell(a), & t > a. \end{cases} \quad (1.17)$$

Problémem tohoto vyjádření je skutečnost, že funkce  $\psi$  není v zadání úlohy; je dána integrálem (1.13), v němž vystupuje hledaná funkce  $u$ . Proto se pokusíme najít alespoň přibližné řešení úlohy na nějaké konečné množině bodů

$$\{(t_i, a_j) : i = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, M\}.$$

Konkrétně: zvolíme časový interval  $\Delta t$ , maximální uvažovaný věk  $a_M$  a čas vývoje populace  $t_N$ ; věk  $a_M$  i čas  $t_N$  volíme jako násobky „časového měřítka“  $\Delta t$ , věk  $a_M$  navíc tak, že  $\beta(a) = 0$  pro  $a \geq a_M$ . Pak položíme

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad a_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Pro libovolné nezáporné celé číslo  $j$  podle (1.17) platí

$$u(t_i, a_{j+i}) = \varphi(a_{j+i} - t_i) \frac{\ell(a_{j+i})}{\ell(a_{j+i} - t_i)} = \varphi(a_j) \frac{\ell(a_{j+i})}{\ell(a_j)}.$$

Pro libovolné kladné  $i$  platí

$$u(t_i, 0) = \psi(t_i)\ell(0) = \psi(t_i),$$

takže pro kladné  $i$  platí

$$u(t_{i+j}, a_j) = \psi(t_{i+j} - a_j)\ell(a_j) = \psi(t_i)\ell(a_j) = u(t_i, 0)\ell(a_j).$$

Hodnotu  $\psi(t_i) = u(t_i, 0)$  budeme aproximovat integrálem (1.13) počítaným numericky pomocí složeného lichoběžníkového pravidla,

$$\begin{aligned} u(t_i, 0) = \psi(t_i) &= \int_0^{\infty} \beta(\xi)u(t_i, \xi)d\xi = \int_0^{a_M} \beta(\xi)u(t_i, \xi)d\xi \approx \\ &\approx \sum_{k=1}^M \frac{1}{2}(\beta(a_{k-1})u(t_i, a_{k-1}) + \beta(a_k)u(t_i, a_k))\Delta t = \\ &= \frac{1}{2} \left( \beta(0)u(t_i, 0) + 2 \sum_{k=1}^{M-1} \beta(a_k)u(t_i, a_k) + \beta(a_M)u(t_i, a_M) \right) \Delta t = \Delta t \sum_{k=1}^{M-1} \beta(a_k)u(t_i, a_k); \end{aligned}$$

využíváme zavedené vlastnosti  $\beta(a_M) = 0$  a přirozeného předpokladu  $\beta(0) = 0$  (novorozenci nejsou plodní).

Řešení úlohy (1.14), (1.15), (1.16) v bodech  $(t_i, a_j)$  budeme aproximovat hodnotami  $u_{i,j}$ , tj.  $u(t_i, a_j) \approx u_{i,j}$ . Ještě označíme  $\varphi_j = \varphi(a_j)$ ,  $\beta_j = \beta(a_j)$ ,  $\ell_j = \ell(a_j)$ . Hodnoty  $u_{i,j}$  můžeme počítat např. podle schématu

$$u_{i,j+i} = \varphi_j \frac{\ell_{j+i}}{\ell_j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \min\{N, M - j\},$$

$$u_{i,0} = \Delta t \sum_{k=1}^{M-1} \beta_k u_{i,k}, \quad u_{i+j,j} = u_{i,0} \ell_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, \min\{M, N - i\}.$$

Toto uspořádání výpočtu kopíruje myšlenkový postup odvození formule (1.17) – nejprve se (analyticky) vypočítá vymírání jednotlivých věkových kategorií počáteční populace, pak se v každém časovém kroku postupně přidávají novorozenci (vypočítání pomocí numerické integrace) a počítá se jejich vymírání.

Výpočet lze ovšem uspořádat i jinak – v jednotlivých časových krocích vypočítat věkové složení celé populace. K tomu si nejprve povšimněme, že pro všechna přípustná  $i$  a  $j$  platí

$$a_j - t_{i+1} = (j - i - 1)\Delta t = a_{j-1} - t_i, \quad t_{i+1} - a_j = (i + 1 - j)\Delta t = t_i - a_{j-1}.$$

Proto podle (1.17) pro  $0 \leq i < j$  platí

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} \approx u(t_{i+1}, a_j) &= \varphi(a_j - t_{i+1}) \frac{\ell(a_j)}{\ell(a_j - t_{i+1})} = \varphi(a_{j-1} - t_i) \frac{\ell(a_j)}{\ell(a_{j-1} - t_i)} = \\ &= \varphi(a_{j-1} - t_i) \frac{\ell(a_{j-1})}{\ell(a_{j-1} - t_i)} \frac{\ell(a_j)}{\ell(a_{j-1})} = u(t_i, a_{j-1}) \frac{\ell(a_j)}{\ell(a_{j-1})} \approx u_{i,j-1} \frac{\ell_j}{\ell_{j-1}}, \end{aligned}$$

pro  $i \geq j > 0$  platí

$$u_{i+1,j} \approx u(t_{i+1}, a_j) = \psi(t_{i+1} - a_j) \ell(a_j) = \psi(t_i - a_{j-1}) \ell(a_{j-1}) \frac{\ell(a_j)}{\ell(a_{j-1})} \approx u_{i,j-1} \frac{\ell_j}{\ell_{j-1}}.$$

Pro libovolné  $i \geq 0$  a  $j > 0$  tedy platí

$$u_{i+1,j} \approx \frac{\ell_j}{\ell_{j-1}} u_{i,j-1}.$$

Dále

$$u_{i+1,0} \approx \Delta t \sum_{k=1}^{M-1} \beta_k u_{i+1,k} \approx \Delta t \sum_{k=1}^{M-1} \beta_k \frac{\ell_k}{\ell_{k-1}} u_{i,k-1} = \Delta t \sum_{k=0}^{M-2} \beta_{k+1} \frac{\ell_{k+1}}{\ell_k} u_{i,k}.$$

Označíme-li nyní

$$P_j = \frac{\ell_{j+1}}{\ell_j}, \quad F_j = \beta_{j+1} \frac{\ell_{j+1}}{\ell_j} \Delta t$$

a povšimneme si, že

$$F_{M-1} = \beta_M \frac{\ell_M}{\ell_{M-1}} \Delta t = 0, \quad F_M = \beta((M+1)\Delta t) \frac{\ell_{M+1}}{\ell_M} \Delta t = 0,$$

můžeme schéma výpočtu zapsat jako

$$u_{0,j} = \varphi_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, \quad u_{i+1,0} = \sum_{j=0}^M F_j u_{i,j},$$

$$u_{i+1,j} = P_{j-1} u_{i,j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} u_{0,0} \\ u_{0,1} \\ \vdots \\ u_{0,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_M \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{i+1,0} \\ u_{i+1,1} \\ u_{i+1,2} \\ \vdots \\ u_{i+1,M-1} \\ u_{i+1,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{M-1} & F_M \\ P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{M-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i,0} \\ u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ u_{i,M-1} \\ u_{i,M} \end{pmatrix}.$$

Tento zápis ukazuje, že počáteční úloha (1.14), (1.15), (1.16) pro McKendrickovu-vonFoersterovu rovnici je analogií Leslieho modelu vývoje věkově strukturované populace. V McKendrickově-vonFoersterově modelu jsou čas i struktura spojité, v Leslieho modelu jsou diskrétní.

## 1.1 Rovnice ve dvou nezávisle proměnných

Jedná se o rovnice tvaru

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (1.18)$$

kde  $F$  je spojitá funkce pěti proměnných definovaná na nějaké množině  $G \subseteq \mathbb{R}^5$  s neprázdným vnitřkem  $G^\circ$ .

*Klasické (silné) řešení rovnice (1.18)* je funkce  $u$  definovaná na množině  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  takové, že  $\bar{\Omega} = \overline{\Omega^\circ}$ , přitom funkce  $u$  je na vnitřku množiny  $\Omega$  diferencovatelná, na uzávěru množiny  $\Omega$  je spojitá a splňuje vztahy

$$\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) \in G \quad \text{a} \quad F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) = 0$$

pro všechny body  $(x, y)$  z vnitřku množiny  $\Omega$ .

Graf řešení rovnice (1.18) se nazývá *integrální plocha* této rovnice.

### 1.1.1 Lineární rovnice

Lineární rovnice je tvaru

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = g(x, y), \quad (1.19)$$

kde  $a, b, c, g$  jsou spojitě funkce dvou proměnných definované na podmnožině  $\Omega$  prostoru  $\mathbb{R}^2$ , která má vlastnost  $\bar{\Omega} = \overline{\Omega^\circ}$ . O funkcích  $a, b$  budeme navíc předpokládat, že jsou v každém bodě  $\Omega^\circ$  nenulové.

Kdyby totiž byla například funkce  $a$  nulová, rovnice by nabyla tvaru

$$b(x, y)u_y + c(x, y)u = g(x, y)$$

a mohli bychom ji považovat za rovnici obyčejnou – proměnnou  $y$  bychom chápali jako nezávisle proměnnou, proměnnou  $x$  bychom považovali za parametr.

Pokud je funkce  $g$  na pravé straně rovnice (1.19) nulová, tj. pokud rovnice je tvaru

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \quad (1.20)$$

řekneme, že tato rovnice je *homogenní*. Množina řešení rovnice (1.20) splňuje *princip superpozice*: Lineární kombinace řešení rovnice (1.20) je opět řešením této rovnice. Podrobněji:

- Je-li funkce  $u$  řešením rovnice (1.20) a  $\alpha$  je libovolné reálné číslo, pak také funkce  $\alpha u$  je řešením této rovnice.

*Důkaz:* Poněvadž

$$\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial(\alpha u)}{\partial y} = \alpha \frac{\partial u}{\partial y},$$

platí

$$a \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} + b \frac{\partial(\alpha u)}{\partial y} + c(\alpha u) = \alpha \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu \right) = 0. \quad \square$$

- Jsou-li funkce  $u_1, u_2$  řešením rovnice (1.20) se stejným definičním oborem, pak také funkce  $u_1 + u_2$  je řešením této rovnice.

*Důkaz:* Poněvadž

$$\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y},$$

platí

$$\begin{aligned} a \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} + b \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial y} + c(u_1 + u_2) &= \\ &= a \frac{\partial u_1}{\partial x} + b \frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1 + a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2 = 0 + 0 = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Protože funkce  $u \equiv 0$  je zřejmě řešením rovnice (1.20), plyne z principu superpozice, že množina všech řešení rovnice (1.20) definovaných na jedné množině  $\Omega$  tvoří reálný vektorový prostor.

Nyní se podíváme na strukturu množiny řešení nehomogenní rovnice (1.19). Pro ni platí:

- Jsou-li funkce  $u_1$  a  $u_2$  řešením nehomogenní rovnice (1.19), pak jejich rozdíl je řešením homogenní rovnice (1.20).

*Důkaz:*

$$\begin{aligned} a \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x} + b \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial y} + c(u_1 - u_2) &= \\ &= a \frac{\partial u_1}{\partial x} + b \frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1 - \left( a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2 \right) = g - g = 0. \end{aligned} \quad \square$$

- Je-li funkce  $u_N$  řešením nehomogenní rovnice (1.19), pak pro každé řešení  $u_H$  homogenní rovnice (1.20) je součet funkcí  $u_N + u_H$  také řešením nehomogenní rovnice (1.19).

*Důkaz:*

$$\begin{aligned} a \frac{\partial(u_N + u_H)}{\partial x} + b \frac{\partial(u_N + u_H)}{\partial y} + c(u_N + u_H) &= \\ &= a \frac{\partial u_N}{\partial x} + b \frac{\partial u_N}{\partial y} + cu_N + a \frac{\partial u_H}{\partial x} + b \frac{\partial u_H}{\partial y} + cu_H = g + 0 = g. \end{aligned} \quad \square$$

Množinu řešení nehomogenní lineární rovnice (1.19) tedy můžeme chápat jako afinní prostor. Přesněji, řešení nehomogenní rovnice (1.19) jsou body afinního prostoru, jehož zaměřením je vektorový prostor všech řešení lineární homogenní rovnice (1.20).

### Řešení rovnice $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$

Tato rovnice je speciálním případem lineární homogenní rovnice. Představme si, že její řešení známe. Nechť tedy funkce  $u = u(x, y)$  je řešením rovnice

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0. \quad (1.21)$$

Tuto funkci dvou proměnných můžeme znázornit pomocí vrstevnic. Nechť vrstevnice funkce  $u$  mají parametrické vyjádření tvaru

$$\begin{aligned} x &= x(s), \\ y &= y(s), \end{aligned} \quad (1.22)$$

kde parametr  $s$  probíhá nějaký reálný interval  $I$ . Poněvadž funkce  $u$  je diferencovatelná, jsou její vrstevnice hladké křivky, tj. funkce  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  jsou diferencovatelné. (Poznamenejme, že pokud má funkce  $u$  ostré lokální extrémy, pak v bodech těchto extrémů vrstevnice degeneruje v jediný bod; tato skutečnost však další úvahy neovlivňuje.) Na vrstevnicích platí

$$u(x(s), y(s)) = \text{const}$$

(pro libovolnou hodnotu parametru  $s \in I$ ). Derivováním této rovnosti podle parametru dostaneme rovnost

$$0 = \frac{d}{ds}u(x(s), y(s)) = \frac{\partial u(x(s), y(s))}{\partial x} \frac{dx(s)}{ds} + \frac{\partial u(x(s), y(s))}{\partial y} \frac{dy(s)}{ds},$$

použili jsme řetězové pravidlo pro derivování složené funkce. Porovnáním s rovnicí (1.21) vidíme, že poslední rovnost bude splněna, pokud

$$x'(s) = \frac{dx(s)}{ds} = a(x(s), y(s)), \quad y'(s) = \frac{dy(s)}{ds} = b(x(s), y(s)).$$

Toto pozorování vede k rozhodnutí, že k parciální diferenciální rovnici (1.21) přiřadíme dvou-rozměrný autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a(x, y), \\ y' &= b(x, y). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Tento systém se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici (1.21)*, jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice (1.21)*. Charakteristiky jsou vrstevnicemi řešení  $u$  rovnice (1.21).

Dělením rovnic charakteristického systému (1.23) dostaneme *charakteristickou rovnici příslušnou k rovnici (1.21)*; charakteristická rovnice má tvar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \quad (1.24)$$

a je to obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu. Budeme předpokládat, že tato rovnice má řešení. Poněvadž se jedná o rovnici prvního řádu, závisí její obecné řešení na jedné konstantě. Tuto konstantu osamostatníme na pravé straně rovnosti vyjadřující řešení charakteristické rovnice (1.24) a dostaneme

$$v(x, y) = \text{const}; \quad (1.25)$$

přitom  $v$  je diferencovatelná funkce definovaná na množině  $\Omega$ . Tuto skutečnost můžeme vyjádřit také jinak: charakteristickou rovnici (1.24) přepíšeme ve tvaru

$$b(x, y)dx - a(x, y)dy = 0; \quad (1.26)$$

funkce  $v$  je tedy kmenovou funkcí diferenciálu na levé straně. Funkce  $v$  se nazývá *první integrál rovnice (1.21)*.

První integrál rovnice (1.21) lze také najít eliminací parametru  $s$  v řešení charakteristického systému (1.23), jinak řečeno převedením parametrické rovnice křivky na rovnici obecnou. Vrstevnice řešení  $u$  parciální diferenciální rovnice (1.21) mají tedy implicitní vyjádření (1.25), konstanta

na pravé straně představuje hodnotu funkce  $u$  na příslušné vrstevnici. Označme tuto hodnotu symbolem  $\Phi(v(x, y))$ .

Provedenými úvahami jsme vlastně našli **algoritmus** hledání řešení parciální diferenciální rovnice (1.21): K rovnici přiřadíme charakteristický systém (1.23) nebo charakteristickou rovnici (1.24), který (nebo kterou) vyřešíme a najdeme první integrál rovnice (1.21) ve tvaru (1.24). Pak vezmeme libovolnou diferencovatelnou funkci  $\Phi$  jedné proměnné a položíme

$$u(x, y) = \Phi(v(x, y)). \quad (1.27)$$

Ještě je potřeba udělat zkoušku, že takto nalezená funkce  $u$  je skutečně řešením parciální rovnice (1.21). Jinak řečeno, dokázat následující:

**Tvrzení 1.** Necht  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je diferencovatelná funkce taková, že rovnost (1.25) je implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (1.23) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení charakteristické rovnice (1.24)). Je-li  $\Phi$  libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné taková, že její definiční obor obsahuje obor hodnot funkce  $v$ , pak funkce  $u$  definovaná vztahem (1.27) je řešením rovnice (1.21).

*Důkaz:* Pro řešení  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  charakteristického systému platí

$$v(x(s), y(s)) = \text{const.}$$

Derivováním této rovnosti podle parametru  $s$  dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}v(x(s), y(s)) = \frac{\partial v(x(s), y(s))}{\partial x} \frac{dx(s)}{ds} + \frac{\partial v(x(s), y(s))}{\partial y} \frac{dy(s)}{ds} = \\ &= \frac{\partial v(x(s), y(s))}{\partial x} a(x(s), y(s)) + \frac{\partial v(x(s), y(s))}{\partial y} b(x(s), y(s)), \end{aligned}$$

stručně

$$a(x, y)v_x(x, y) + b(x, y)v_y(x, y) = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(v(x, y))}{\partial x} = \Phi'(v(x, y))v_x(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \Phi'(v(x, y))v_y(x, y),$$

takže

$$a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = (a(x, y)v_x(x, y) + b(x, y)v_y(x, y))\Phi'(v(x, y)) = 0.$$

□

Dostali jsme množinu řešení rovnice (1.21) ve tvaru (1.27). Prvky této množiny závisí na diferencovatelných funkcích, nikoliv na konstantách, jak tomu je v případě obyčejných diferenciálních rovnic. Odtud plyne, že (vektorový) prostor řešení lineární homogenní parciální diferenciální rovnice nemůže mít konečnou dimenzi. Navíc zatím nevíme, zda rovnice (1.21) nemá nějaké další řešení, které není uvedeného tvaru.

**Příklad.**

$$u_x - 6x^2u_y = 0.$$

Charakteristická rovnice je  $\frac{dy}{dx} = -6x^2$  a její řešení je bezprostředně dáno integrací pravé strany,  $y = -2x^3 + \text{const.}$  První integrál dané rovnice tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$2x^3 + y = \text{const}$$



a její řešení je dáno rovností

$$u(x, y) = \Phi(2x^3 + y),$$

kde  $\Phi$  je libovolná diferencovatelná funkce.

Zkouška:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(2x^3 + y) = \Phi'(2x^3 + y) \cdot 6x^2, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \Phi(2x^3 + y) = \Phi'(2x^3 + y)$$

takže

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - 6x^2 \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 6x^2 \Phi'(2x^3 + y) - 6x^2 \Phi'(2x^3 + y) = 0. \quad \blacksquare$$

### 1.1.2 Kanonický tvar a řešení rovnice lineární v prvních derivacích

Uvažujme parciální diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u). \quad (1.28)$$

Budeme hledat nějakou transformaci nezávisle proměnných, která tuto rovnici nějak zjednoduší. Současně budeme chtít, aby tato transformace nebyla příliš komplikovaná. Ponecháme tedy první souřadnici (nezávisle proměnnou  $x$ ) beze změny a transformujeme pouze souřadnici druhou (nezávisle proměnnou  $y$ ). Jinými slovy, původní souřadnice  $x, y$  transformujeme na nové souřadnice  $\xi, \eta$  tak, že

$$\xi = x, \quad \eta = v(x, y), \quad (1.29)$$

Přitom  $v$  je diferencovatelná funkce dvou proměnných. Aby se jednalo skutečně o transformaci prostoru  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$ , musí být zobrazení  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definované vztahem

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ v(x, y) \end{pmatrix},$$

regulární (invertovatelné). Existuje tedy inverzní zobrazení  $\phi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ; jeho druhou složku označíme  $\chi$ , je to diferencovatelná funkce dvou proměnných. Přitom funkce  $v$  a  $\chi$  splňují rovnosti  $\chi(\xi, \eta) = y$ ,  $v(x, y) = \eta$ , podrobněji

$$\chi(x, v(x, y)) = y, \quad v(\xi, \chi(\xi, \eta)) = \eta. \quad (1.30)$$

Poznamenejme, že k tomu, aby zobrazení  $\phi$  bylo regulární, stačí, aby funkce  $v$  měla nenulovou parciální derivaci podle druhé proměnné, tj.  $v_y \neq 0$ .

Nyní budeme rovnici (1.28) transformovat do nových nezávisle proměnných pomocí transformace (1.29). Parciální derivace hledané funkce  $u$  podle původních proměnných vyjádříme v nových proměnných pomocí „řetězového pravidla“ pro derivování složených funkcí:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi + u_\eta v_x, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\eta v_y.$$

Po dosazení do levé strany řešené rovnice (1.28) tedy dostaneme

$$au_x + bu_y = au_\xi + (av_x + bv_y)u_\eta.$$

Pokud funkce  $v$  bude taková, že výraz v závorce vymizí, daná rovnice se transformuje na rovnici, v níž vystupuje pouze jedna parciální derivace. Požadujeme tedy  $av_x + bv_y = 0$ , tj.

$$\frac{b}{a} = -\frac{v_x}{v_y}.$$

Výraz  $-\frac{v_x}{v_y}$  ovšem vyjadřuje obyčejnou derivaci funkce  $y = y(x)$  zadané implicitně rovnicí

$$v(x, y) = \text{const.}$$

Funkce  $y = y(x)$  zadaná touto rovnicí tedy má derivaci tvaru

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}.$$

Porovnáním s (1.24) vidíme, že transformační funkce  $v$  současně implicitně vyjadřuje charakteristiky rovnice (1.21).

Transformovaná rovnice má tvar  $au_\xi = f$ . Funkce  $a$  je podle předpokladu nenulová, proto můžeme rovnici dále upravit, vyjádřit parciální derivaci  $u_\xi$ :

$$u_\xi = \frac{f}{a}u.$$

Dostáváme tak první závěr: Transformace nezávisle proměnných (1.29), kde funkce  $v$  představuje implicitní zápis (1.25) charakteristik rovnice (1.21), převádí rovnici (1.28) na rovnici

$$u_\xi = F(\xi, \eta, u); \tag{1.31}$$

přitom

$$F(\xi, \eta, u) = \frac{f(\xi, \chi(\xi, \eta), u)}{a(\xi, \chi(\xi, \eta))},$$

kde funkce  $\chi$  je definována rovnostmi (1.30). Rovnice (1.31) se nazývá *kanonický tvar rovnice* (1.28).

V rovnici (1.31) není derivace hledané funkce  $u$  podle proměnné  $\eta$ . Hledanou funkci tedy můžeme chápat jako funkci jedné nezávisle proměnné  $\xi$  a její parciální derivaci  $u_\xi$  chápat jako derivaci obyčejnou. V tomto pojetí bude nezávisle proměnná  $\eta$  mít roli parametru. Hledáme tedy řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu s parametrem  $\eta$

$$\frac{du}{d\xi} = F(\xi, \eta, u).$$

Pokud se nám podaří tuto rovnici vyřešit, tj. najít funkci  $u = u(\xi, \eta)$ , která ji splňuje, dostaneme zpětnou substitucí nezávisle proměnných řešení původní rovnice (1.28). Přitom je potřeba mít na paměti, že integrační konstanta objevující se při řešení obyčejné rovnice, bude záviset na parametru  $\eta$ . Ve vyjádření řešení rovnice (1.28) se tedy bude vyskytovat nějaká neurčená funkce proměnné  $\eta$ , tj. v původních nezávisle proměnných nějaká funkce argumentu  $v(x, y)$ . To je v souladu s výsledky uvedenými v 1.1.1.

### Příklad

Hledejme řešení rovnice  $yu_x + xu_y = u^2 + 1$  v kladném kvadrantu.

Příslušná charakteristická rovnice je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

a její řešení je implicitně dáno rovností  $x^2 - y^2 = \text{const.}$  Transformace

$$\xi = x, \quad \eta = x^2 - y^2$$

převeďe danou rovnici na kanonický tvar

$$\sqrt{\xi^2 - \eta} u_\xi = u^2 + 1.$$

Tuto rovnici budeme považovat za obyčejnou. Upravíme ji na tvar explicitní obyčejné diferenciální rovnice s parametrem  $\eta$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{u^2 + 1}{\sqrt{\xi^2 - \eta}}$$

a vidíme, že se jedná o rovnici se separovanými proměnnými. Její řešení je implicitně dáno rovností

$$\int \frac{du}{u^2 + 1} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \eta}}.$$

Integrací dostaneme implicitní tvar řešení rovnice

$$\operatorname{arctg} u = \ln \left| \xi + \sqrt{\xi^2 - \eta} \right| + C(\eta),$$

kde  $C$  je integrační konstanta, která závisí na parametru  $\eta$ . V tomto případě můžeme funkci  $u$  vyjádřit explicitně,

$$u(\xi, \eta) = \operatorname{tg} \left( C(\eta) + \ln \left| \xi + \sqrt{\xi^2 - \eta} \right| \right).$$

Návratem k původním proměnným  $x, y$  dostaneme řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x, y) = \operatorname{tg} (C(x^2 - y^2) + \ln(x + y)),$$

kde  $C$  je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné.

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že se skutečně jedná o řešení dané rovnice. Parciální derivace nalezené funkce  $u$  jsou<sup>5</sup>

$$u_x(x, y) = \frac{1}{\cos^2 (C(x^2 - y^2) + \ln(x + y))} \left( 2xC'(x^2 - y^2) + \frac{1}{x + y} \right),$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\cos^2 (C(x^2 - y^2) + \ln(x + y))} \left( -2yC'(x^2 - y^2) + \frac{1}{x + y} \right),$$

takže platí

$$\begin{aligned} yu_x(x, y) + xu_y(x, y) &= \frac{1}{\cos^2 (C(x^2 - y^2) + \ln(x + y))} = \\ &= \frac{\sin^2 (C(x^2 - y^2) + \ln(x + y)) + \cos^2 (C(x^2 - y^2) + \ln(x + y))}{\cos^2 (C(x^2 - y^2) + \ln(x + y))} = \\ &= \operatorname{tg}^2 (C(x^2 - y^2) + \ln(x + y)) + 1 = u^2 + 1 \end{aligned}$$

a rovnice je splněna. ■

Řešení  $u = u(\xi, \eta)$  rovnice (1.31) v kanonickém tvaru obecně nelze explicitně vyjádřit. V některých případech, např. jedná-li se o rovnici se separovatelnými proměnnými nebo o rovnici exaktní, můžeme její řešení vyjádřit alespoň implicitně. Takové řešení závisí na integrační konstantě  $\Phi$ , která ovšem sama závisí na parametru  $\eta$ . Řešení rovnice (1.31) tak zapíšeme ve tvaru

$$\psi(\xi, \eta, u) = \Phi(\eta);$$

přitom  $\psi$  je diferencovatelná funkce tří proměnných,  $\Phi$  je diferencovatelná funkce jedné proměnné. Návratem k původním nezávisle proměnným  $x, y$  dostaneme implicitní tvar řešení rovnice (1.28)

$$\psi(x, v(x, y), u) = \Phi(v(x, y)).$$

<sup>5</sup>Poznamenejme, že zápis  $\sin^2 \alpha$  označuje druhou mocninu funkční hodnoty goniometrické funkce sinus v bodě  $\alpha$ , nikoliv dvakrát iterovanou funkci sinus; podobně pro funkce cosinus a tangens.

Nejjednodušší je situace v případě lineární rovnice. Kanonický tvar rovnice (1.19) je

$$u_\xi = P(\xi, \eta)u + Q(\xi, \eta); \quad (1.32)$$

přítom

$$P(\xi, \eta) = -\frac{c(\xi, \chi(\xi, \eta))}{a(\xi, \chi(\xi, \eta))}, \quad Q(\xi, \eta) = \frac{g(\xi, \chi(\xi, \eta))}{a(\xi, \chi(\xi, \eta))},$$

kde funkce  $\chi$  je definována rovnostmi (1.30). Hledáme tedy řešení obyčejné lineární diferenciální rovnice prvního řádu s nezávisle proměnnou  $\xi$  a parametrem  $\eta$ :

$$\frac{du}{d\xi} = P(\xi, \eta)u + Q(\xi, \eta).$$

Její řešení je tvaru

$$u(\xi, \eta) = \text{const} \cdot \exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} P(\sigma, \eta) d\sigma\right) + \int_{\xi_0}^{\xi} Q(s, \eta) \exp\left(\int_s^{\xi} P(\sigma, \eta) d\sigma\right) ds.$$

Integrační konstanta samozřejmě může záviset na parametru  $\eta$ , proto ji zapíšeme jako  $\Phi(\eta)$ . Řešení lineární parciální diferenciální rovnice v kanonickém tvaru (1.32) je tedy dáno formulí

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\eta) \exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi} P(\sigma, \eta) d\sigma\right) + \int_{\xi_0}^{\xi} Q(s, \eta) \exp\left(\int_s^{\xi} P(\sigma, \eta) d\sigma\right) ds, \quad (1.33)$$

kde  $\Phi$  je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné,  $\xi_0$  je nějaké reálné číslo; ve většině případů lze položit  $\xi_0 = 0$ .

Řešení lineární rovnice (1.19) dostaneme z formule (1.33) návratem k původním nezávisle proměnným  $x, y$  pomocí rovností (1.30). Výsledek nyní můžeme zformulovat ve tvaru věty:

**Věta 1.** *Nechť  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je diferencovatelná funkce taková, že rovnost (1.25) je implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (1.23) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení charakteristické rovnice (1.24)) a  $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce taková, že jsou splněny podmínky (1.30). Označme*

$$p(x, y, s) = -\frac{c(s, \chi(s, v(x, y)))}{a(s, \chi(s, v(x, y)))}, \quad q(x, y, s) = \frac{g(s, \chi(s, v(x, y)))}{a(s, \chi(s, v(x, y)))}.$$

*Je-li  $\Phi$  diferencovatelná funkce jedné proměnné, jejíž definiční obor obsahuje obor hodnot funkce  $v$ , pak funkce  $u$  definovaná rovností*

$$u(x, y) = \Phi(v(x, y)) \exp\left(\int_{x_0}^x p(x, y, \sigma) d\sigma\right) + \int_{x_0}^x q(x, y, s) \exp\left(\int_s^x p(x, y, \sigma) d\sigma\right) ds$$

*je řešením rovnice (1.19); číslo  $x_0$  je libovolné takové, že integrály na pravé straně jsou konečné pro všechny dvojice  $(x, y) \in \Omega$ .*

*Důkaz* není potřeba provádět, věta plyne z předchozích výpočtů. Lze ji ovšem také dokázat přímým výpočtem. Je to pěkné cvičení na derivování vícenásobně složených funkcí více proměnných.  $\square$

Výpočty provedené před Větou 1 ukazují, že z existence řešení charakteristické rovnice (1.24) plyne existence řešení lineární parciální rovnice (1.19) a toto řešení má tvar uvedený ve Větě 1. Existence řešení lineární parciální rovnice v tomto tvaru je tedy důsledkem existence řešení příslušné charakteristické rovnice, tj. obyčejné diferenciální rovnice.

**Důsledek 1.** Lineární nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty u prvních derivací, tedy rovnice

$$au_x + bu_y + c(x, y)u = g(x, y)$$

má řešení definované rovností

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \Phi(ay - bx) e^{-\frac{1}{a} \int_0^x c(x-\sigma, y-(b/a)\sigma) d\sigma} + \frac{1}{a} \int_0^x g\left(x-s, y-\frac{b}{a}s\right) e^{-\frac{1}{a} \int_0^s c(x-\sigma, y-(b/a)\sigma) d\sigma} ds = \\ &= \left( \Phi(ay - bx) + \frac{1}{a} \int_0^x g\left(x-s, y-\frac{b}{a}s\right) e^{\frac{1}{a} \int_s^x c(x-\sigma, y-(b/a)\sigma) d\sigma} ds \right) e^{-\frac{1}{a} \int_0^x c(x-\sigma, y-(b/a)\sigma) d\sigma}, \end{aligned}$$

kde  $\Phi$  je libovolná diferencovatelná funkce.

*Důkaz.* V tomto případě je charakteristická rovnice tvaru

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

a její řešení v implicitním tvaru je  $ay - bx = \text{const}$ . Tedy  $v(x, y) = ay - bx$ ,  $\chi(\xi, \eta) = \frac{1}{a}(b\xi + \eta)$ , takže

$$c(s, \chi(s, v(x, y))) = c\left(s, \frac{1}{a}(bs + ay - bx)\right) = c\left(s, y - \frac{b}{a}(x - s)\right),$$

a

$$g(s, \chi(s, v(x, y))) = g\left(s, y - \frac{b}{a}(x - s)\right).$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \int_0^x c\left(\sigma, y - \frac{b}{a}(x - \sigma)\right) d\sigma &= \int_0^x c\left(x - \sigma, y - \frac{b}{a}\sigma\right) d\sigma, \\ \int_0^x g\left(s, y - \frac{b}{a}(x - s)\right) e^{-\frac{1}{a} \int_s^x c(\sigma, y-(b/a)\sigma) d\sigma} ds &= \\ &= \int_0^x g\left(x - s, y - \frac{b}{a}s\right) e^{-\frac{1}{a} \int_{x-s}^x c(\sigma, y-(b/a)(x-\sigma)) d\sigma} ds = \\ &= \int_0^x g\left(x - s, y - \frac{b}{a}s\right) e^{-\frac{1}{a} \int_0^s c(x-\sigma, y-(b/a)\sigma) d\sigma} ds. \end{aligned}$$

□

Při řešení konkrétní lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných s nekonstantními koeficienty u prvních derivací bývá přehlednější rovnicí transformovat na kanonický tvar, rovnici v kanonickém tvaru vyřešit a zpětně transformovat nezávisle proměnné, než používat vzorec z Věty 1.

**Příklad.**

$$yu_x - xu_y = x^2 + y^2$$

Rovnici budeme uvažovat na množině  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ , na jejímž vnitřku jsou oba koeficienty  $a(x, y) = y$ ,  $b(x, y) = -x$  nenulové. Příslušná charakteristická rovnice je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Je to obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými a její řešení je implicitně dáno rovností  $x^2 + y^2 = \text{const.}$  Zavedeme tedy transformaci

$$\xi = x, \quad \eta = x^2 + y^2.$$

Pak na množině  $G$  je

$$y = \sqrt{\eta - \xi^2}, \quad \xi_x = 1, \quad \xi_y = 0, \quad \eta_x = 2x = 2\xi, \quad \eta_y = 2y = 2\sqrt{\eta - \xi^2},$$

takže

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + 2\xi u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 2\sqrt{\eta - \xi^2} u_\eta.$$

Po dosazení do řešené rovnice dostaneme

$$\sqrt{\eta - \xi^2} (u_\xi + 2\xi u_\eta) - 2\xi \sqrt{\eta - \xi^2} u_\eta = \xi^2 + \eta - \xi^2$$

a odtud snadnou úpravou získáme kanonický tvar

$$u_\xi = \frac{\eta}{\sqrt{\eta - \xi^2}}.$$

Tuto jednoduchou obyčejnou rovnici řešíme integrací podle proměnné  $\xi$ ,

$$u = \int \frac{\eta}{\sqrt{\eta - \xi^2}} d\xi = \eta \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} + \text{const.}$$

Integrační konstanta závisí na parametru  $\eta$ , řešení rovnice v kanonickém tvaru je

$$u(\xi, \eta) = \eta \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} + \Phi(\eta),$$

kde  $\eta$  je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Návratem k původním proměnným dostaneme řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \Phi(x^2 + y^2).$$

Ještě můžeme využít skutečnosti, že pro  $x > 0$ ,  $y > 0$  je

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{arctg} \frac{x}{y},$$

a výsledek zapsat v trochu kratším tvaru

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \text{arctg} \frac{x}{y} + \Phi(x^2 + y^2).$$

Ukážeme ještě řešení dané rovnice přímým dosazováním do formulí ve Větě 1. Máme

$$a(x, y) = y, \quad b(x, y) = -x, \quad c(x, y) = 0, \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Implicitní zápis řešení charakteristické rovnice je  $x^2 + y^2 = const$  a tedy

$$v(x, y) = x^2 + y^2.$$

Tvar funkce  $\chi$  dostaneme ze druhé rovnosti (1.30). Má platit

$$\eta = v(\xi, \chi(\xi, \eta)) = \xi^2 + \chi(\xi, \eta)^2,$$

takže  $\chi(\xi, \eta) = \sqrt{\eta - \xi^2}$ . Dále  $p(x, y, s) = 0$  a

$$q(x, y, s) = \frac{g(s, \chi(s, v(x, y)))}{a(s, \chi(s, v(x, y)))} = \frac{s^2 + \chi(s, v(x, y))^2}{\chi(s, v(x, y))} = \frac{s^2 + (v(x, y) - s^2)}{\sqrt{v(x, y) - s^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - s^2}}.$$

Zvolíme  $x_0 = 0$  a řešení dané rovnice rovnice dostaneme podle Věty 1 ve tvaru

$$u(x, y) = \Phi(x^2 + y^2) + \int_0^x \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - s^2}} ds = \Phi(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

tedy až na pořadí sčítanců ve stejném, jako při předchozím způsobu řešení rovnice. ■

Rovnici (1.28) jsme transformovali do nových nezávisle proměnných tak, že jsme ponechali první souřadnici nezměněnu a za druhou jsme vzali funkci vyjadřující charakteristiku rovnice. To není jediná možnost, jak parciální rovnici (1.28) transformovat na kanonický tvar, tj. na obyčejnou rovnici s parametrem. Stejně dobře můžeme ponechat druhou souřadnici a první nahradit charakteristikou.

### Příklad.

$$2u_x + 3u_y - xu = 0$$

Charakteristická rovnice je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2},$$

její řešení  $y = \frac{3}{2}x + const$  můžeme přepsat ve tvaru

$$3x - 2y = const;$$

to je zápis charakteristiky. Zavedeme transformaci

$$\xi = 3x - 2y, \quad \eta = y.$$

Pak  $u_x = 3u_\xi$ ,  $u_y = -2u_\xi + u_\eta$ ,  $x = \frac{1}{3}(\xi + 2\eta)$ . Levá strana dané rovnice se tedy transformuje na tvar

$$2u_x + 3u_y - xu = 6u_\xi - 6u_\xi + 3u_\eta - \frac{1}{3}(\xi + 2\eta)u = 3(u_\eta - \frac{1}{9}(\xi + 2\eta)u).$$

Kanonický tvar dané rovnice je

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{9}(\xi + 2\eta)u.$$

Tato rovnice má řešení

$$\int \frac{du}{u} = \frac{1}{9} \int (\xi + 2\eta) d\eta, \quad \text{tj. } \ln u = \frac{1}{9}(\xi\eta + \eta^2) + const, \quad \text{neboli } u = const \cdot e^{\frac{1}{9}(\xi\eta + \eta^2)}.$$

Řešení rovnice v kanonickém tvaru je tedy  $u = \Psi(\xi)e^{\frac{1}{9}\eta(\xi + \eta)}$  a návratem k původním proměnným dostaneme řešení dané rovnice

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \Psi(3x - 2y)e^{\frac{1}{9}y(3x - 2y + y)} = \Psi(3x - 2y)\sqrt[9]{e^{3xy - y^2}} = \\ &= \Psi(3x - 2y)e^{-\frac{1}{9}((y - \frac{3}{2}x)^2 - \frac{9}{4}x^2)} = \Psi(3x - 2y)e^{-\frac{1}{36}(2y - 3x)^2} e^{\frac{1}{4}x^2}. \end{aligned}$$

Podle Důsledku 1 Věty 1 je řešení dané rovnice dáno formulí

$$u(x, y) = \Phi(2y - 3x)e^{\frac{1}{2} \int_0^x \sigma d\sigma} = \Phi(2y - 3x)e^{\frac{1}{4}x^2}.$$

Vidíme, že se obě vyjádření shodují,  $\Phi(\xi) = \Psi(-\xi)e^{-\frac{1}{36}\xi^2}$ . ■

### 1.1.3 Okrajové úlohy

Řešení rovnice (1.28), které lze najít pomocí transformace nezávisle proměnných, je vyjádřeno pomocí nějaké diferencovatelné funkce  $\Phi$  jedné proměnné. Jedná se tedy o množinu řešení dané rovnice. Někaký prvek z této množiny, *partikulární řešení*, dostaneme konkrétní volbou funkce  $\Phi$ . V této části budeme hledat řešení, které splňuje nějakou předem danou podmínku.

**Okrajová úloha pro rovnici**  $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u)$

Uvažujme parciální diferenciální rovnici (1.28) lineární v prvních derivacích a jednu konkrétní charakteristiku rovnice (1.21) s nulovou pravou stranou; tato charakteristika má parametrické vyjádření (1.22) a je partikulárním řešením autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic (1.23), které splňuje podmínky

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Nechť funkce  $u$  je řešením rovnice (1.28). Pak na uvažované charakteristice platí

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}u(x(s), y(s)) &= u_x(x(s), y(s))\frac{dx(s)}{ds} + u_y(x(s), y(s))\frac{dy(s)}{ds} = \\ &= a(x(s), y(s))u_x(x(s), y(s)) + b(x(s), y(s))u_y(x(s), y(s)) = f(x(s), y(s), u(x(s), y(s))). \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že prostorová křivka, jejíž parametrické vyjádření je řešením autonomního systému

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{ds} &= b(x, y), \\ \frac{du}{ds} &= f(x, y, u) \end{aligned} \tag{1.34}$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad u(0) = u_0 = u(x_0, y_0), \tag{1.35}$$

je incidentní s grafem řešení rovnice (1.28), tj. leží na grafu funkce  $u$ .

Zadáme-li tedy hodnotu  $u_0$  řešení  $u$  rovnice (1.28) v nějakém bodě  $(x_0, y_0)$  charakteristiky, máme hodnoty řešení  $u$  rovnice (1.28) ve všech bodech této charakteristiky jako řešení autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic (1.34) s počátečními podmínkami (1.35). Systém (1.34) charakterizuje řešení rovnice (1.19), proto se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici (1.19)*, jeho trajektorie můžeme nazvat *charakteristické křivky rovnice (1.28)*.

Jedno konkrétní řešení (partikulární řešení) rovnice (1.28) získáme tak, že na každé charakteristice zadáme právě jednu funkční hodnotu. Jinak řečeno, zadáme hodnoty řešení na nějaké rovinné křivce, která protíná každou charakteristiku právě jednou. Takové křivce říkáme *okraj pro rovnici (1.28)*.

Okraj může být zadán parametricky rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= X(\sigma), \\ y &= Y(\sigma), \end{aligned}$$



kde parametr  $\sigma$  probíhá nějaký interval  $J$ . Pro každou hodnotu parametru  $\sigma \in J$  zadáme hodnotu řešení  $u = g(\sigma)$ . Rovnosti

$$x = X(\sigma), \quad y = Y(\sigma), \quad u = g(\sigma), \quad \sigma \in J \quad (1.36)$$

lze interpretovat jako parametrické vyjádření prostorové křivky, která má ležet na grafu řešení  $u$  rovnice (1.28). Tyto rovnosti nazýváme *okrajová podmínka pro rovnici (1.28)*.

*Okrajová úloha pro rovnici (1.28)* je úloha najít řešení  $u = u(x, y)$  rovnice (1.28), které splňuje okrajovou podmínku (1.36), tj. řešení, pro které platí

$$u(X(\sigma), Y(\sigma)) = g(\sigma)$$

pro každou hodnotu parametru  $\sigma \in J$ .

Okrajovou úlohu můžeme řešit tak, že metodami popsanými v 1.1.2 najdeme řešení rovnice závislé na obecné funkci  $\Phi$  a dosadíme do něho okrajovou podmínku. Dostaneme tak funkcionální rovnici pro neznámou funkci  $\Phi$ ; tuto funkci lze v některých případech z příslušné rovnice uhodnout.

### Příklad

Hledejme řešení rovnice

$$2u_x + 3u_y = xu,$$

které splňuje podmínku

$$u(x, 0) = x^2$$

pro každé  $x \in \mathbb{R}$ . Zadáváme tedy hodnoty řešení na ose  $x$ . Okrajovou podmínku můžeme parametricky zapsat jako

$$x = \sigma, \quad y = 0, \quad u = \sigma^2, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Řešení dané rovnice jsme našli v příkladu na str. 20 ve tvaru

$$u(x, y) = \Psi(3x - 2y) \sqrt[9]{e^{3xy - y^2}}.$$

Aby toto řešení splnilo okrajovou podmínku, musí platit

$$x^2 = u(x, 0) = \Psi(3x) \sqrt[9]{e^0} = \Psi(3x).$$

Funkce  $\Psi$  je tedy řešením jednoduché funkcionální rovnice  $\Psi(3x) = x^2$  a snadno uhodneme, že funkci  $\Psi$  můžeme zadat předpisem  $\Psi(\xi) = \left(\frac{1}{3}\xi\right)^2 = \frac{1}{9}\xi^2$ . Pro řešení dané okrajové úlohy tak dostáváme formulu

$$u(x, y) = \frac{1}{9}(3x - 2y)^2 \sqrt[9]{e^{3xy - y^2}}. \quad \blacksquare$$

Řešení funkcionální rovnice však obecně není snadná úloha. Proto může být výhodné při řešení okrajové úlohy (1.28), (1.36) postupovat jinak.

Najdeme konkrétní charakteristiku, která protíná okraj v bodě daném konkrétní hodnotou parametru  $\sigma$ . To znamená, že rovnosti v (1.36) chápeme jako počáteční podmínky pro autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic (1.34), tj. najdeme řešení systému rovnic

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y), \quad \frac{du}{ds} = f(x, y, u)$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = X(\sigma), \quad y(0) = Y(\sigma), \quad u(0) = g(\sigma).$$

Takové řešení počáteční úlohy pro autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic tedy závisí na nezávisle proměnné  $s$  a na parametru  $\sigma$ , je obecně tvaru

$$x = x(s, \sigma), \quad y = y(s, \sigma), \quad u = u(s, \sigma).$$

Pro řešení okrajové úlohy představuje parametr  $\sigma$  i nezávisle proměnná  $s$  pouze pomocné parametry, které je potřeba eliminovat. Proto budeme první dvě rovnosti chápat jako dvě rovnice pro dvě neznámé  $s$  a  $\sigma$ ; tyto neznámé vyjádříme pomocí proměnných  $x, y$ , tj. najdeme  $s = s(x, y)$ ,  $\sigma = \sigma(x, y)$ , a dosadíme je do třetí rovnosti. Dostaneme tak řešení okrajové úlohy ve tvaru

$$u(x, y) = u(s(x, y), \sigma(x, y)).$$

### Příklad

Hledejme řešení rovnice

$$yu_x - xu_y = x^2 + y^2,$$

(což je lineární rovnice řešená v příkladu na str. 19) s okrajovou podmínkou

$$u(x, 0) = x^2, \quad x \geq 0.$$

Zadááme tedy hodnoty řešení na kladné poloose  $x$ . Všechny funkce, které se objevují v dané rovnici, jsou definovány na celém prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Budeme hledat řešení, které je definované na co největší podmnožině  $\mathbb{R}^2$ , nikoliv pouze v prvním kvadrantu jako v zmíněném příkladu.

Parametrické vyjádření okrajové podmínky je

$$x = \sigma, \quad y = 0, \quad u = \sigma^2, \quad \sigma \geq 0.$$

Řešíme charakteristický systém

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= y, \\ \frac{dy}{ds} &= -x, \\ \frac{du}{ds} &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = \sigma, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = \sigma^2.$$

První dvě rovnice představují lineární systém obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé funkce  $x$  a  $y$ . Tento systém vyřešíme a řešení dosadíme do třetí rovnice, kterou pak vyřešíme prostou integrací. Dostaneme tak řešení charakteristického systému ve tvaru

$$x = \sigma \sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right), \quad y = \sigma \cos\left(s + \frac{\pi}{2}\right), \quad u = (s + 1)\sigma^2. \quad (1.37)$$

První dvě rovnosti nejprve umocníme na druhou a sečteme, dostaneme

$$\sigma^2 = x^2 + y^2,$$

poté je vydělíme a dostaneme

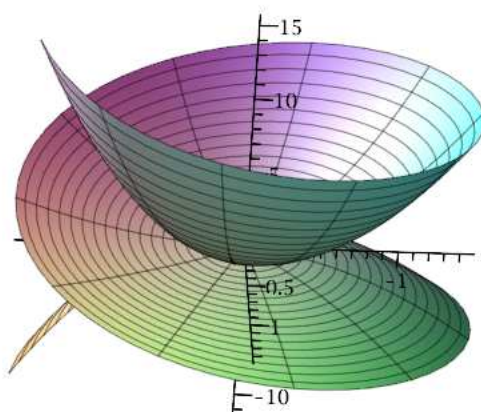
$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(s + \frac{\pi}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(s + \frac{\pi}{2}\right).$$

Tato jednoduchá goniometrická rovnice pro neznámou  $s + \frac{\pi}{2}$  má řešení

$$s + \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + k\pi, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z},$$

tedy  $s = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + (2k - 1)\frac{\pi}{2}$ . Dosazením do pravé strany třetí rovnosti v (1.37) dostaneme

$$(x^2 + y^2) \left(1 + (2k - 1)\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right).$$



Obrázek 1.2: Řešení rovnice  $yu_x - xu_y = x^2 + y^2$  s okrajovou podmínkou  $u(x, 0) = x^2$ ,  $x \geq 0$ . Řešení je dáno parametricky rovnostmi (1.37), hodnoty parametrů na obrázku jsou  $s \in [-6, 6]$ ,  $\sigma \in [0, \frac{3}{2}]$ .

V tomto vyjádření však zůstává neurčený parametr  $k$  a navíc tato formule je pro  $y = 0$  nedefinovaná, dokonce ani nemá limitu pro  $y \rightarrow 0$ . Pro  $x > 0$  totiž platí

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = -\frac{\pi}{2}.$$

Aby byla splněna okrajová podmínka, mělo by pro  $x > 0$  platit

$$x^2 = \lim_{y \rightarrow 0^+} (x^2 + y^2) \left( 1 + (2k - 1) \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) = x^2 \left( 1 + (2k - 1) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = x^2(1 + k\pi),$$

tedy  $k = 0$ , a současně

$$x^2 = \lim_{y \rightarrow 0^-} (x^2 + y^2) \left( 1 + (2k - 1) \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) = x^2(1 + (k - 1)\pi),$$

tedy  $k = 1$ . Jinak řečeno, na množině  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$  je řešení dané okrajové úlohy tvaru

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \left( 1 - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)$$

a na množině  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\}$  tvaru

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \left( 1 + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right).$$

Tato vyjádření lze jednoduše zapsat formulí

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \left( 1 + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y \right).$$

Takto definovaná funkce je řešením dané okrajové úlohy na množině  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x < 0\}$ .

Podívejme se ještě jednou na parametrické vyjádření řešení dané úlohy. Rovnosti (1.37) jsou parametrickým vyjádřením plochy v prostoru, která může připomínat šroubovou plochu s osou šroubování  $u$  (při fixované hodnotě  $\sigma$  se jedná o šroubovici, tj. prostorovou křivku, která „obíhá“ osu  $u$ , celou ji oběhne při nárůstu parametru  $s$  o hodnotu  $2\pi$  a po jedné „otočce“ vystoupá o hodnotu  $\sigma^2$ ). Plocha je znázorněna na Obrázku 1.2

Řešení charakteristického systému s počátečními podmínkami tedy vyjadřuje diferencovatelnou varietu, která je lokálně grafem řešení rovnice, křivka vyjadřující okrajovou podmínku přitom na této varietě leží. ■

### Okrajová úloha pro obecnou rovnici

Budeme hledat řešení rovnice (1.18) s okrajovou podmínkou (1.36). Abychom zjednodušili zápis, zavedeme označení

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.38)$$

a rovnici zapíšeme jako

$$F(x, y, u, p, q) = 0. \quad (1.39)$$

Pro řešení rovnic lineárních v prvních derivacích se ukázal jako užitečný pojem charakteristiky. Je to rovinná křivka s parametrickým vyjádřením

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s \in I,$$

která je řešením charakteristického systému, tj. autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y).$$

V případě rovnice (1.21) je na charakteristice řešení konstantní. V případě rovnice (1.28) s nenulovou pravou stranou jsme zavedli charakteristickou křivku v prostoru. Je to křivka, která leží na grafu řešení rovnice (1.28) a její průmět do roviny souřadnic  $x, y$  je charakteristikou. Jinak řečeno, charakteristická křivka určuje v každém bodě  $(x(s), y(s))$  charakteristiky funkční hodnotu  $u(x(s), y(s))$  řešení rovnice (1.28). Charakteristická křivka je trajektorií autonomního systému

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y), \quad \frac{du}{ds} = f(x, y, u).$$

Rovnici (1.28) lineární v derivacích přepíšeme s použitím označení (1.38) ve tvaru

$$a(x, y)p + b(x, y)q - f(x, y, u) = 0.$$

V případě této rovnice je tedy  $F(x, y, u, p, q) = a(x, y)p + b(x, y)q - f(x, y, u)$  a platí

$$a(x, y) = \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, u, p, q), \quad b(x, y) = \frac{\partial F}{\partial q}(x, y, u, p, q),$$

z čehož dále plyne

$$f(x, y, u) = p \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, u, p, q) + q \frac{\partial F}{\partial q}(x, y, u, p, q),$$

neboť je splněna rovnice (1.28). Charakteristický systém příslušný k rovnici (1.28) tedy můžeme stručně zapsat

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \quad \frac{dy}{ds} = F_q, \quad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q. \quad (1.40)$$

Tyto výsledky zobecníme pro rovnici (1.18).

Řešení obecné rovnice vyjádříme tak, že každému bodu charakteristiky přiřadíme hodnotu řešení  $u$  a hodnoty obou parciálních derivací  $p$  a  $q$ . Dostaneme tak křivku v pětirozměrném prostoru, která má parametrické vyjádření

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad u = u(s), \quad p = p(s), \quad q = q(s), \quad s \in I; \quad (1.41)$$

nazýváme ji *charakteristický pruh rovnice* (1.18). Ten samozřejmě splňuje rovnici (1.39), tj.

$$F(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)) = 0, \quad (1.42)$$

a budeme požadovat, aby funkce  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $u = u(s)$  také splňovaly systém obyčejných diferenciálních rovnic (1.40). Derivováním rovnosti (1.42) podle parametru  $s$  dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} F(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)) = F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_u \frac{du}{ds} + F_p \frac{dp}{ds} + F_q \frac{dq}{ds} = \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_u (pF_p + qF_q) + F_p \frac{dp}{ds} + F_q \frac{dq}{ds} = \\ &= \left( F_x + pF_u + \frac{dp}{ds} \right) F_p + \left( F_y + qF_u + \frac{dq}{ds} \right) F_q. \end{aligned}$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když

$$\frac{dp}{ds} = -(F_x + pF_u), \quad \frac{dq}{ds} = -(F_y + qF_u). \quad (1.43)$$

Provedené úvahy naznačují, že za *charakteristický systém příslušný k rovnici (1.39)* můžeme považovat systém obyčejných diferenciálních rovnic (1.40), (1.43).

Ještě určíme počáteční podmínky tak, aby řešení charakteristického systému vyjadřovalo řešení počáteční úlohy (1.18), (1.36). Stejně, jako v případě rovnice lineární v derivacích položíme

$$x(0) = x_0 = X(\sigma), \quad y(0) = y_0 = Y(\sigma), \quad u(0) = u_0 = g(\sigma).$$

Počáteční hodnota charakteristického pruhu musí splňovat rovnici (1.39), tj.

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0. \quad (1.44)$$

Dále pro počáteční hodnoty souřadnic  $p$  a  $q$  charakteristického pruhu platí

$$p_0 = u_x(x_0, y_0) = u_x(X(\sigma), Y(\sigma)), \quad q_0 = u_y(x_0, y_0) = u_y(X(\sigma), Y(\sigma)).$$

Nyní přepíšeme třetí rovnost z okrajové podmínky (1.36) ve tvaru  $g(\sigma) = u(X(\sigma), Y(\sigma))$  a zderivujeme podle parametru  $\sigma$ . Dostaneme

$$g'(\sigma) = p_0 X'(\sigma) + q_0 Y'(\sigma). \quad (1.45)$$

Dosažené výsledky můžeme shrnout jako **algoritmus** pro hledání řešení okrajové úlohy (1.18), (1.36): Rovnici přepíšeme do tvaru (1.39) a přiřadíme jí charakteristický systém obyčejných autonomních rovnic (1.40), (1.43) s počátečními podmínkami

$$x(0) = x_0 = X(\sigma), \quad y(0) = y_0 = Y(\sigma), \quad u(0) = u_0 = g(\sigma), \quad p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0,$$

kde hodnoty  $p_0$  a  $q_0$  jsou řešením soustavy rovnic (1.44), (1.45). První tři složky

$$x = x(s, \sigma), \quad y = y(s, \sigma), \quad u = u(s, \sigma) \quad (1.46)$$

řešení počáteční úlohy pro charakteristický systém vyjadřují parametrické vyjádření (grafu) řešení  $u$  dané okrajové úlohy. Pokud lze z prvních dvou rovností (1.46) vyjádřit parametry  $s, \sigma$  pomocí souřadnic  $x, y$ , tj. vyjádřit  $s = s(x, y)$ ,  $\sigma = \sigma(x, y)$ , dosadíme tyto výrazy do třetí rovnosti (1.46) a dostaneme tak explicitní vyjádření řešení dané okrajové úlohy.

## Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$u_x^2 - u_y^2 = 4u,$$

které splňuje okrajovou podmínku

$$u(\cos \sigma, \sin \sigma) = \cos 2\sigma$$

V tomto případě je

$$F(x, y, u, p, q) = p^2 - q^2 - 4u,$$

takže

$$\begin{aligned} F_x = F_y = 0, \quad F_u = -4, \quad F_p = 2p, \quad F_q = -2q, \\ pF_p + qF_q = 2p^2 - 2q^2, \quad F_x + pF_u = -4p, \quad F_y + qF_u = -4q. \end{aligned}$$

To znamená, že charakteristický systém je

$$\frac{dx}{ds} = 2p, \quad \frac{dy}{ds} = -2q, \quad \frac{du}{ds} = 2(p^2 - q^2), \quad \frac{dp}{ds} = 4p, \quad \frac{dq}{ds} = 4q.$$

Dvě poslední rovnice jsou obyčejné lineární homogenní rovnice s konstantním koeficientem. Jejich řešení s obecnými počátečními podmínkami tedy je

$$p = p(s) = p_0 e^{4s}, \quad q = q(s) = q_0 e^{4s}.$$

Tyto výrazy dosadíme do prvních tří rovnic charakteristického systému. Dostaneme

$$\frac{dx}{ds} = 2p_0 e^{4s}, \quad \frac{dy}{ds} = -2q_0 e^{4s}, \quad \frac{du}{ds} = 2(p_0^2 - q_0^2) e^{8s}$$

a po integraci

$$x = x_0 + \frac{1}{2} p_0 (e^{4s} - 1), \quad y = y_0 - \frac{1}{2} q_0 (e^{4s} - 1), \quad u = u_0 + \frac{1}{4} (p_0^2 - q_0^2) (e^{8s} - 1). \quad (1.47)$$

Parametrické vyjádření počátečních podmínek je  $X(\sigma) = \cos \sigma$ ,  $Y(\sigma) = \sin \sigma$ ,  $g(\sigma) = \cos 2\sigma$ , takže počáteční hodnoty  $x_0$ ,  $y_0$  a  $u_0$  jsou dány rovnostmi

$$x_0 = \cos \sigma, \quad y_0 = \sin \sigma, \quad u_0 = \cos 2\sigma \quad (1.48)$$

a počáteční hodnoty  $p_0$  a  $q_0$  splňují rovnice (1.44), (1.45), konkrétně

$$4 \cos 2\sigma = p_0^2 - q_0^2, \quad 2 \sin 2\sigma = p_0 \sin \sigma - q_0 \cos \sigma. \quad (1.49)$$

Bezprostředním dosazením ze třetí rovnosti (1.48) a první rovnosti (1.49) do třetí rovnosti (1.47) dostaneme

$$u = e^{8s} \cos 2\sigma. \quad (1.50)$$

Soustava rovnic (1.49) je tvořena jednou lineární a jednou kvadratickou rovnicí pro dvě neznámé  $p_0$  a  $q_0$ . Má tedy dvě řešení.

První řešení soustavy (1.49) je  $p_0 = 2 \cos \sigma$ ,  $q_0 = -2 \sin \sigma$ . Dosazením do prvních dvou rovností (1.47) dostaneme

$$x = e^{4s} \cos \sigma, \quad y = e^{4s} \sin \sigma.$$

Umocněním těchto rovností na druhou a jejich odečtením dostaneme

$$x^2 - y^2 = e^{8s} \cos 2\sigma.$$

Porovnáním se vztahem (1.50) vidíme, že jedno řešení dané okrajové úlohy je dáno výrazem

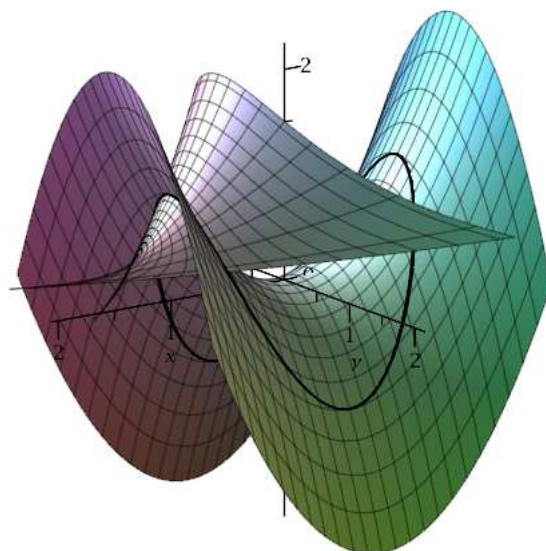
$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Druhé řešení soustavy algebraicko-goniometrických rovnic (1.49) je

$$p_0 = -\frac{2 \cos \sigma (1 + 2 \sin^2 \sigma)}{\cos 2\sigma}, \quad q_0 = -\frac{2 \sin \sigma (1 + 2 \cos^2 \sigma)}{\cos 2\sigma}.$$

Po dosazení těchto výrazů a výrazů (1.48) do rovností (1.47) dostaneme

$$x = \cos \sigma \left( 1 - \frac{1 + 2 \sin^2 \sigma}{\cos 2\sigma} (e^{4s} - 1) \right) = \frac{\cos \sigma}{\cos 2\sigma} (2 - (1 + 2 \sin^2 \sigma) e^{4s}),$$



Obrázek 1.3: Řešení rovnice  $u_x^2 - u_y^2 = 4u$  s okrajovou podmínkou  $u(\cos \sigma, \sin \sigma) = \cos 2\sigma$ . Okrajová podmínka je vyznačena černou křivkou na „sedle“, tj. na grafu řešení daného rovností  $u = x^2 - y^2$ .

$$y = \sin \sigma \left( 1 + \frac{1 + 2 \cos^2 \sigma}{\cos 2\sigma} (e^{4s} - 1) \right) = \frac{\sin \sigma}{\cos 2\sigma} (-2 + (1 + 2 \cos^2 \sigma)e^{4s}).$$

Spolu s rovností (1.50) tak máme vyjádřeno druhé řešení dané úlohy v parametrickém tvaru. Vzhledem k tomu, že ve jmenovateli zlomků je výraz  $\cos 2\sigma$ , omezíme se na hodnoty parametru  $\sigma$  z intervalu  $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ .

Obě řešení dané úlohy jsou znázorněny na Obrázku 1.3. Tento příklad také ukazuje, že okrajová úloha nemusí být jednoznačně řešitelná. ■

### Příklad (geometrická aplikace obecné rovnice)

Najdeme plochu, která prochází přímkou zadanou obecnými rovnicemi

$$x + y = 1, \quad z = 1,$$

a která má vlastnost: průsečík roviny souřadnic  $xy$  a normály k této ploše v nějakém bodě  $M$  a průmět bodu  $M$  do roviny  $xy$  má konstantní vzdálenost  $a$ .

Hledanou plochou bude graf funkce  $z = z(x, y)$ , pro kterou platí

$$z(x, 1 - x) = 1. \tag{1.51}$$

Z geometrie víme, že směrový vektor normály v bodě  $M = (x, y, z(x, y))$  má souřadnice

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right),$$

takže parametrická rovnice normály v bodě  $M$  je dána parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{\partial z}{\partial x} t, \\ Y &= y + \frac{\partial z}{\partial y} t, \\ Z &= z - t, \end{aligned}$$

kde  $t$  je parametr. Průsečík normály s rovinou  $xy$  je bod této přímky, kde  $Z = 0$ , tj.  $t = z$ . Průmět bodu  $M$  do roviny  $xy$  má souřadnice  $(x, y, 0)$ . Pro euklidovskou vzdálenost těchto bodů ma platit

$$\left(z \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(z \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = a^2. \quad (1.52)$$

To už je parciální diferenciální rovnice pro hledanou funkci  $z = z(x, y)$ . Příslušná okrajová podmínka je (1.51). Řešení této úlohy je však poněkud obtížné, proto zavedeme novou neznámou funkci  $u = u(x, y) = z(x, y)^2$ . Pak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2z \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2z \frac{\partial z}{\partial y}$$

a úloha (1.52), (1.51) se transformuje na tvar

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4a^2, \quad u(x, 1-x) = 1.$$

Máme tedy

$$F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 - 4a^2, \quad F_x = F_y = F_u = 0, \quad F_p = 2p, \quad F_q = 2q,$$

charakteristický systém s počátečními podmínkami je

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 2p, & x(0) &= \sigma \\ \frac{dy}{ds} &= 2q, & y(0) &= 1 - \sigma \\ \frac{du}{ds} &= 2p^2 + 2q^2, & u(0) &= 1 \\ \frac{dp}{ds} &= 0, & p(0) &= p_0 \\ \frac{dq}{ds} &= 0, & q(0) &= q_0; \end{aligned}$$

přítom  $p_0^2 + q_0^2 = 4a^2$ ,  $p_0 - q_0 = 0$ , tedy  $p_0 = q_0 = \pm\sqrt{2}a$ . Odtud a z posledních dvou rovnic dostaneme  $p(s) = q(s) = \pm\sqrt{2}a$  a dále

$$\begin{aligned} x &= \sigma \pm 2\sqrt{2}as, \\ y &= 1 - \sigma \pm 2\sqrt{2}as, \\ u &= 1 + 8a^2s. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovností vyjádříme

$$x + y = 1 \pm 4\sqrt{2}as, \quad \text{tj. } s = \pm \frac{x + y - 1}{4a\sqrt{2}}$$

a dosazením do poslední rovnosti dostaneme

$$u = 1 \pm a\sqrt{2}(x + y - 1).$$

Vrátíme se k původní proměnné  $z$ , připomeneme si, že  $z(x, 1-x) = 1 > 0$  a dostaneme, že hledaná plocha je dána jednou ze dvou rovností

$$z = \sqrt{1 \pm a\sqrt{2}(x + y - 1)}.$$

■



## Quasilineární rovnice a její geometrická interpretace

Významným speciálním případem obecné rovnice (1.18) je rovnice tvaru

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u), \quad (1.53)$$

kde  $a, b$  jsou spojité funkce tří proměnných. Koeficienty  $a, b$  u prvních parciálních derivací hledané funkce na této funkci závisí. Proto výraz na pravé straně rovnice (1.53) nevyjadřuje lineární operátor na množině diferencovatelných funkcí dvou proměnných, ale je pouze „lineárnímu podobný“ nebo „jakoby lineární“. Proto se rovnice (1.53) nazývá *quasilineární*.

V případě quasilineární rovnice (1.53) je

$$F(x, y, u, p, q) = a(x, y, u)p + b(x, y, u)q - f(x, y, u),$$

takže  $F_p = a(x, y, u)$ ,  $F_q = b(x, y, u)$ ,  $pF_p + qF_q = f(x, y, u)$ . První tři rovnice charakteristického systému (1.40) příslušného k rovnici (1.53) jsou proto tvaru

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u), \quad \frac{du}{ds} = f(x, y, u). \quad (1.54)$$

Tyto rovnice nezávisí na (pomocných) souřadnicích  $p, q$  charakteristického pruhu. Pro řešení quasilineární rovnice (1.53) tedy nepotřebujeme rovnice (1.43). Řešení rovnice (1.53) s okrajovou podmínkou (1.36) v parametrickém tvaru tedy dostaneme jako řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (1.54) s počátečními podmínkami

$$x(0) = X(\sigma), \quad y(0) = Y(\sigma), \quad u(0) = g(\sigma).$$

### Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$(y + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (u + x) \frac{\partial u}{\partial y} = x + y,$$

které splňuje okrajovou podmínku

$$u(x, -x) = 2x.$$

Charakteristický systém řešené rovnice je tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= y + u, \\ \frac{dy}{ds} &= x + u, \\ \frac{du}{ds} &= x + y. \end{aligned}$$

Jedná se tedy o systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantní maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Její vlastní čísla a příslušné vlastní vektory jsou

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = 2, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že obecné řešení charakteristického systému je

$$\begin{aligned}x(s) &= Ae^{2s} + Be^{-s}, \\y(s) &= Ae^{2s} + Ce^{-s}, \\u(s) &= Ae^{2s} - (B + C)e^{-s}.\end{aligned}$$

Okrajovou podmínku přepíšeme do tvaru  $x = \sigma$ ,  $y = -\sigma$ ,  $u = 2\sigma$ , ze kterého dostaneme počáteční podmínky pro charakteristický systém

$$x(0) = \sigma, \quad y(0) = -\sigma, \quad u(0) = 2\sigma.$$

Řešení charakteristického systému s těmito počátečními podmínkami je

$$\begin{aligned}x(s) &= \frac{2}{3}\sigma e^{2s} + \frac{1}{3}\sigma e^{-s} = \frac{1}{3}\sigma e^{-s} (2e^{3s} + 1), \\y(s) &= \frac{2}{3}\sigma e^{2s} - \frac{5}{3}\sigma e^{-s} = \frac{1}{3}\sigma e^{-s} (2e^{3s} - 5), \\u(s) &= \frac{2}{3}\sigma e^{2s} + \frac{4}{3}\sigma e^{-s} = \frac{1}{3}\sigma e^{-s} (2e^{3s} + 4).\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovností postupně vyjádříme

$$2e^{3s} = \frac{5x + y}{x - y}, \quad \frac{1}{3}\sigma e^{-s} = \frac{x - y}{6}$$

a dosadíme do rovnosti třetí. Po úpravě pak dostaneme řešení dané úlohy

$$u(x, y) = \frac{3x - y}{2}. \quad \blacksquare$$

Nechť  $G$  je diferencovatelná funkce tří proměnných taková, že v každém bodě definičního oboru je aspoň jedna z jejích parciálních derivací nenulová. Z věty o implicitní funkci pak plyne, že rovnost

$$G(x, y, z) = c \tag{1.55}$$

vyjadřuje soustavu ploch v prostoru. Normálový vektor k některé z těchto ploch v jejím libovolném bodě  $(x_0, y_0, z_0)$  má souřadnice

$$\boldsymbol{\nu}_1^\top = \left( \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right).$$

Uvažujme nyní další plochu danou rovností

$$z = g(x, y), \tag{1.56}$$

tj. graf funkce  $g$  dvou proměnných, která také prochází bodem  $(x_0, y_0, z_0)$ . Normálový vektor k této ploše má souřadnice

$$\boldsymbol{\nu}_2^\top = \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

Pokud  $\boldsymbol{\nu}_1^\top \boldsymbol{\nu}_2 = 0$ , pak plocha (1.56) protíná plochu ze soustavy (1.55) kolmo. Pokud tedy v každém přípustném bodě  $(x, y)$  platí

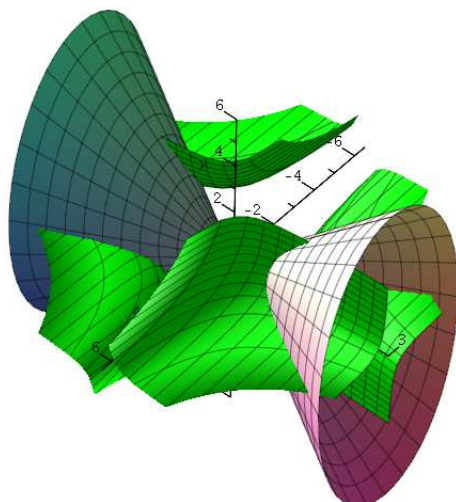
$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, g(x, y)),$$

pak plocha (1.56) protíná každou plochu ze soustavy (1.55) kolmo.

Jinak řečeno: Integrální plocha quasilineární rovnice

$$G_x(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + G_y(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = G_u(x, y, u)$$

protíná kolmo soustavu ploch (1.55).



Obrázek 1.4: Plocha ortogonální k soustavě ploch  $xyz = c$  procházející přímkou o parametrických rovnicích  $x = \sigma$ ,  $y = 2\sigma$ ,  $z = 0$ . Zeleně je zobrazena plocha odpovídající  $c = 1$ .

### Příklad

Najdeme plochu, která kolmo protíná plochy soustavy

$$xyz = c$$

a prochází přímkou  $y = 2x$ ,  $z = 0$ .

Podle předchozího je hledaná plocha integrální plochou quasilineární rovnice

$$yu \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

s okrajovou podmínkou  $u(x, 2x) = 0$ . Příslušný charakteristický systém s počátečními podmínkami je

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= yu, & \frac{dy}{ds} &= xu, & \frac{du}{ds} &= xy, \\ x(0) &= \sigma, & y(0) &= 2\sigma, & u(0) &= 0. \end{aligned}$$

Vydělením prvních dvou rovnic se zahrnutím počátečních podmínek dostaneme počáteční úlohu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad y(\sigma) = 2\sigma.$$

Její řešení je implicitně dáno rovností

$$y^2 - x^2 = 3\sigma^2. \tag{1.57}$$

Podobně ze druhé a třetí rovnice s počátečními podmínkami dostaneme úlohu

$$\frac{du}{dy} = \frac{y}{u}, \quad u(2\sigma) = 0$$

s řešením

$$u^2 - y^2 = -4\sigma^2. \tag{1.58}$$

Vydělením rovností (1.57) a (1.58) dostaneme implicitní vyjádření hledané plochy ve tvaru

$$\frac{u^2 - y^2}{y^2 - x^2} = -\frac{4}{3}, \text{ neboli } u^2 = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2$$

a z něho dvě explicitní vyjádření

$$u(x, y) = \pm \sqrt{\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2}.$$

Řešení dané úlohy je znázorněno na Obrázku 1.4. ■

## 1.2 Rovnice v $n$ nezávisle proměnných

Budeme se zabývat rovnicí

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (1.59)$$

kde  $F$  je spojitá funkce  $2n + 1$  proměnných definovaná na nějaké množině  $G \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ , která má neprázdný vnitřek. Při označení vektoru nezávisle proměnných<sup>6</sup>  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$  a gradientu

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^\top$$

můžeme rovnici (1.59) zapsat úsporněji

$$F(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0. \quad (1.60)$$

*Klasické (silné) řešení rovnice (1.59)* je spojitě diferencovatelná funkce  $u$  definovaná na množině  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  takové, že  $\Omega = \overline{\Omega^\circ}$ , přitom funkce  $u$  je na vnitřku  $\Omega^\circ$  množiny  $\Omega$  diferencovatelná, na uzávěru  $\overline{\Omega}$  množiny  $\Omega$  spojitá a pro všechny body  $\mathbf{x} \in \Omega$  platí

$$(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) \in G \quad \text{a} \quad F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) = 0.$$

### Rovnice lineární v derivacích s nulovou pravou stranou

Rovnice

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

stručněji

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (1.61)$$

nebo ve vektorovém zápisu

$$\mathbf{a}(\mathbf{x})^\top \nabla u = 0$$

je nejjednodušším speciálním případem obecné rovnice (1.59). Jedná se o bezprostřední zobecnění rovnice (1.21) do vícerozměrného prostoru. Proto budeme její řešení hledat způsobem, který je analogií metody charakteristik popsané v 1.1.1. Rovnici (1.61) přiřadíme autonomní systém  $n$  obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.62)$$

Tento systém se nazývá *charakteristický systém příslušný k rovnici (1.61)* a jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice (1.61)*. Charakteristika je hladká křivka v  $n$ -rozměrném prostoru, lze ji zapsat parametrickými rovnicemi

$$x_i = x_i(s), \quad s \in I, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.63)$$

<sup>6</sup>Pokud budeme  $n$ -tici reálných čísel považovat za vektor, vždy půjde o vektor sloupcový.

kde  $I$  je nějaký reálný interval. Nechť funkce  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je řešením rovnice (1.62). Pro derivaci funkce  $u$  na charakteristice (1.63) podle parametru  $s$  platí

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}u(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(\mathbf{x}(s))}{\partial x_i} a_i(\mathbf{x}(s)) = 0. \end{aligned}$$

To znamená, že na charakteristikách je řešení rovnice (1.61) konstantní. Odtud plyne, že řešení rovnice (1.61) můžeme získat tak, že na každé charakteristice zadáme hodnotu funkce  $u$ .

Charakteristika rovnice (1.61) je hladkou křivkou v  $n$ -rozměrném prostoru. Takovou křivku můžeme zapsat buď parametricky rovnostmi (1.63) nebo obecně jako průnik  $n - 1$  nadploch (tj.  $(n - 1)$ -rozměrných diferencovatelných variet) v  $n$ -rozměrném prostoru, tedy rovnostmi

$$v_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (1.64)$$

kde  $v_i$  jsou diferencovatelné funkce  $n$  proměnných. Rovnosti (1.64) někdy můžeme získat z parametrického vyjádření (1.63) charakteristik eliminací parametru  $s$ .

Jiná možnost, jak získat obecné vyjádření (1.64) charakteristik rovnice (1.61) spočívá ve vydělení rovnic charakteristického systému (1.62); dostaneme tak  $n - 1$  obyčejných diferenciálních rovnic, např.

$$\frac{dx_{i+1}}{dx_i} = \frac{a_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad n = 1, 2, \dots, n - 1,$$

nebo

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad n = 2, 3, \dots, n.$$

Obecné řešení těchto systémů rovnic, které závisí na  $n - 1$  konstantách, zapíšeme v implicitním tvaru (1.64). Předchozí obyčejné diferenciální rovnice můžeme také jednotně zapsat ve tvaru rovností diferenciálů

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (1.65)$$

Hodnotu funkce  $u$ , která je řešením lineární rovnice (1.61), vyjádříme na charakteristikách pomocí diferencovatelné funkce  $\Phi$ , která je funkcí  $n - 1$  proměnných. Řešení rovnice (1.61) tedy píšeme ve tvaru

$$u(\mathbf{x}) = \Phi(v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_{n-1}(\mathbf{x})). \quad (1.66)$$

Provedené úvahy ukazují, že pro rovnici (1.61) lze zformulovat výsledek, který je bezprostředním zobecněním Tvrzení 1 platného pro rovnice ve dvou nezávisle proměnných.

**Tvrzení 2.** Nechť funkce  $v_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , jsou diferencovatelné funkce takové, že rovnosti (1.64) jsou implicitním zápisem trajektorií charakteristického systému (1.62) příslušného k rovnici (1.61) (nebo ekvivalentně: implicitním zápisem řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (1.65)). Je-li  $\Phi$  libovolná diferencovatelná funkce  $n - 1$  proměnných taková, že její definiční obor obsahuje kartézský součin oborů hodnot funkcí  $v_i$ , pak funkce  $u$  definovaná rovností (1.66) je řešením rovnice (1.61).

*Důkaz:* Na řešení (1.63) charakteristického systému (1.62) jsou splněny rovnosti (1.64). Tedy pro každý index  $j$  platí

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}v_j(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_j(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))}{\partial x_i} \frac{dx_i(s)}{ds} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_j(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))}{\partial x_i} a_i(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)), \end{aligned}$$

stručně

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} a_i(\mathbf{x}) = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_{n-1}(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi(v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_{n-1}(\mathbf{x}))}{\partial v_j} \frac{\partial v_j(\mathbf{x})}{\partial x_i},$$

takže

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi(v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_{n-1}(\mathbf{x}))}{\partial v_j} \frac{\partial v_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi(v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \dots, v_{n-1}(\mathbf{x}))}{\partial v_j} \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial v_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0. \end{aligned}$$

□

Povšimněme si, že na levé straně rovnice (1.61) je skalární součin vektoru  $\mathbf{a}$  s gradientem hledané funkce  $u$ . Gradient je lineární zobrazení, skalární součin také. Složení lineárních zobrazení je lineární. Odtud plyne, že rovnice (1.61) také splňuje *princip superpozice*: Jsou-li  $u_1, u_2, \dots, u_k$  řešení rovnice (1.61), pak také jejich libovolná lineární kombinace je řešením této rovnice. Jinak řečeno, množina všech řešení rovnice (1.61) tvoří reálný vektorový prostor.

### Příklad

$$(y - 2x - 2z) \frac{\partial u}{\partial x} + (x - 2y + 2z) \frac{\partial u}{\partial y} + (x - y + y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Průslušný charakteristický systém

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -2x + y - 2z, \\ \frac{dy}{ds} &= x - 2y + 2z, \\ \frac{dz}{ds} &= x - y + z \end{aligned}$$

je lineární homogenní systém obyčejných diferenciálních rovnic s konstantní maticí. Můžeme tedy explicitně napsat jeho řešení

$$\begin{aligned} x &= (2As + 2B)e^{-s}, \\ y &= (-2As + 2C)e^{-s}, \\ z &= (-2As + C - B - A)e^{-s}; \end{aligned}$$

přitom  $A, B, C$  jsou integrační konstanty. Druhou rovnost vydělíme rovností první a dostaneme

$$\frac{y}{x} = \frac{-As + C}{As + B}, \quad \text{tj.} \quad \frac{x + y}{x} = \frac{B + C}{As + B},$$

třetí rovnost vydělíme první a dostaneme

$$\frac{z}{x} = \frac{-2As + C - B - A}{As + B}, \quad \text{tj.} \quad \frac{x + z}{x} = \frac{C + B - A}{2(As + B)},$$

tyto rovnosti navzájem vydělíme a dostaneme

$$\frac{x + y}{x + z} = \text{const.}$$

Analogicky (první a třetí rovnost tentokrát dělíme druhou) dostaneme

$$\frac{x+y}{z-y} = \text{const.}$$

Řešení je tedy tvaru  $u(x, y) = \Phi\left(\frac{x+y}{x+z}, \frac{x+y}{z-y}\right)$ , kde  $\Phi$  je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. ■

Na charakteristikách je řešení rovnice (1.61) konstantní. Proto konkrétní řešení (partikulární řešení) této rovnice můžeme získat tak, že na „začátku“ každé charakteristiky určíme funkční hodnotu řešení. „Začátky“ charakteristik lze určit tak, že v prostoru zavedeme nějakou nadplochu ( $(n-1)$ -rozměrnou varietu), která protíná každou charakteristiku právě jednou; průsečík této nadplochy s charakteristikou budeme považovat za „začátek charakteristiky“. Nadplocha s uvedenou vlastností se nazývá *okraj pro rovnici* (1.61).

Okraj může být zadán parametrickými rovnicemi; poněvadž se jedná o  $(n-1)$ -rozměrnou nadplochu, závisí na  $n-1$  parametrech. Parametrické rovnice okraje tedy jsou

$$x_i = X_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kde parametry  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  jsou z nějaké podmnožiny prostoru  $\mathbb{R}^{n-1}$ , která má neprázdný vnitřek. Průsečík konkrétní charakteristiky s okrajem je určen konkrétní sadou parametrů. Hodnoty řešení  $u$  rovnice (1.61) tedy zadáváme pro tuto sadu parametrů. Jinak řečeno, zadáváme *okrajovou podmínku* ve tvaru

$$u(X_1(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), X_2(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, X_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}). \quad (1.67)$$

*Okrajovou úlohu*, tj. rovnici (1.61) s podmínkou (1.67), řešíme tak, že k charakteristickému systému (1.62) přidáme počáteční podmínky

$$x_i(0) = X_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.68)$$

Jednotlivé složky řešení Cauchyovy úlohy (1.62) závisí na nezávisle proměnné  $s$  a na parametrech  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ , tj.

$$x_i = x_i(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}). \quad (1.69)$$

Rovnosti (1.69) a rovnost (1.67) přepsaná do tvaru  $u = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$  představují parametrické vyjádření (grafu) řešení okrajové úlohy (1.61), (1.67).

Na rovnosti (1.69) se také můžeme dívat jako na systém  $n$  rovnic pro  $n$  neznámých, kterými jsou parametry  $s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ . Pokud se z něho podaří explicitně vyjádřit parametry okraje  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  v závislosti na souřadnicích  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tj.

$$\sigma_j = \sigma_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

pak je lze dosadit do okrajové podmínky (1.67). Takovým způsobem dostaneme řešení okrajové úlohy (1.61), (1.67) ve tvaru

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_{n-1}(x_1, \dots, x_n)).$$

### Příklad

Budeme hledat řešení rovnice

$$(z+y-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x-y)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

s okrajovou podmínkou

$$u(x, y, a) = 4a^4xy,$$

kde  $a$  je nějaká reálná konstanta.

Charakteristický systém (1.62) je v tomto případě tvaru

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= -x+y+z, \\ \frac{dy}{ds} &= x-y+z, \\ \frac{dz}{ds} &= z.\end{aligned}$$

Jedná se o lineární homogenní systém obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, jeho obecné řešení je tvaru

$$\begin{aligned}x &= Ae^s + Be^{-2s} + C, \\ y &= Ae^s - Be^{-2s} + C, \\ z &= Ae^s.\end{aligned}$$

Počáteční podmínky (1.68) odpovídající dané okrajové podmínce jsou

$$x(0) = \sigma_1, \quad y(0) = \sigma_2, \quad z(0) = a.$$

Pro integrační konstanty  $A, B, C$  tak dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}A+B+C &= \sigma_1, \\ A-B+C &= \sigma_2, \\ A &= a,\end{aligned}$$

která má řešení  $A = a$ ,  $B = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ ,  $C = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a$ . Řešení (1.69) Cauchyovy úlohy pro charakteristický systém je

$$\begin{aligned}x &= ae^s + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2s} + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a, \\ y &= ae^s - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2s} + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - a, \\ z &= ae^s.\end{aligned}$$

Bezprostředně vidíme  $ae^s = z$  a tedy  $e^{-2s} = a^2/z^2$ . Po dosazení do prvních dvou rovností dostaneme systém rovnic pro parametry  $\sigma_1, \sigma_2$  ve tvaru

$$\begin{aligned}x &= z + \frac{a^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{2z^2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - a, \\ y &= z - \frac{a^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{2z^2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - a,\end{aligned}$$

nebo po úpravě

$$\begin{aligned}(z^2 + a^2)\sigma_1 + (z^2 - a^2)\sigma_2 &= 2z^2(x - z + a), \\ (z^2 - a^2)\sigma_1 + (z^2 + a^2)\sigma_2 &= 2z^2(y - z + a).\end{aligned}$$

Determinant této soustavy lineárních rovnic je roven  $4a^2z^2$ , takže pro  $a \neq 0$  dostaneme

$$\sigma_1 = \frac{1}{2a^2}((x + y - 2z + 2a)a^2 + (x - y)z^2), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2a^2}((x + y - 2z + 2a)a^2 - (x - y)z^2).$$

Parametrické vyjádření okrajové podmínky (1.67) je

$$u(\sigma_1, \sigma_2, a) = 4a^4\sigma_1\sigma_2.$$

Do této rovnosti dosadíme vypočítané hodnoty parametrů  $\sigma_1, \sigma_2$  a dostaneme řešení dané úlohy ve tvaru

$$u(x, y, z) = a^4(x + y - 2z + 2a)^2 - (x - y)^2z^4.$$

Tato funkce je řešením úlohy pro nenulovou hodnotu parametru  $a$ . V případě  $a = 0$  je řešením nulová funkce,  $u \equiv 0$ . ■



## Příklad

Najdeme obecné řešení rovnice

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (1.70)$$

Charakteristický systém je v tomto případě

$$\frac{dx_i}{ds} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

To vlastně není systém, ale  $n$  nezávislých rovnic. Jeho řešení je  $x_i(s) = C_i e^s$ . Z toho vidíme, že pro každé  $i = 2, 3, \dots, n$  platí

$$\frac{x_{i-1}(s)}{x_i(s)} = \frac{C_{i-1}}{C_i} = \text{const},$$

takže obecné řešení dané rovnice je tvaru

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi \left( \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right),$$

kde  $\Phi$  je nějaká diferencovatelná funkce  $n - 1$  proměnných.

To ovšem není jediné možné vyjádření řešení dané parciální rovnice. Stejně snadno můžeme z řešení charakteristického systému odvodit, že pro libovolnou hodnotu  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  a každý index  $i = 1, 2, \dots, j - 1, j + 1, j + 2, \dots, n$  platí

$$\frac{x_i(s)}{x_j(s)} = \frac{C_i}{C_j} = \text{const},$$

takže řešení dané parciální diferenciální rovnice je tvaru

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Psi \left( \frac{x_1}{x_j}, \frac{x_2}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right),$$

kde  $\Psi$  je opět nějaká diferencovatelná funkce  $n - 1$  proměnných.

Nyní můžeme k rovnici (1.70) přidat okrajovou podmínku

$$u(1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_2 x_3 \cdots x_n. \quad (1.71)$$

Dosadíme-li tuto rovnost do druhého vyjádření řešení rovnice (1.70), v němž zvolíme  $j = 1$ , dostaneme

$$x_2 x_3 \cdots x_n = \Psi(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Z toho snadno vidíme, že za funkci  $\Psi$  můžeme vzít funkci danou předpisem

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{n-1}$$

a řešení úlohy (1.70), (1.71) dostaneme ve tvaru

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_2 x_3 \cdots x_n}{x_1^{n-1}}.$$

Z prvního uvedeného řešení rovnice (1.70) není řešení okrajové úlohy vidět. ■

## Quasilineární rovnice

Řešení rovnice

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u),$$

neboli

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f(\mathbf{x}, u) \quad (1.72)$$

případně ve vektorovém zápisu

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, u)^\top \nabla u = f(\mathbf{x}, u),$$

budeme hledat v implicitním tvaru

$$V(\mathbf{x}, u) = 0, \quad (1.73)$$

kde  $V$  je nějaká diferencovatelná funkce  $n + 1$  proměnných.

Budeme si představovat, že řešení známe. Nechť tedy  $u = u(\mathbf{x})$  je řešení rovnice (1.72), které je implicitně popsáno rovností (1.73). Pak platí

$$V(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = 0.$$

Tuto rovnost parciálně zderivujeme podle každé z proměnných  $x_i$ . Dostaneme

$$\frac{\partial V(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))}{\partial x_i} + \frac{\partial V(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))}{\partial u} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dále vynásobíme  $i$ -tou rovnost výrazem  $a_i(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$  a výsledné rovnosti sečteme. Výsledkem je rovnost

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \frac{\partial V(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))}{\partial x_i} + \left( \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))}{\partial u} = 0$$

a poněvadž funkce  $u$  je řešením rovnice (1.72), můžeme tuto rovnost upravit na tvar

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \frac{\partial V(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))}{\partial x_i} + f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \frac{\partial V(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))}{\partial u} = 0.$$

Vidíme, že funkce  $V$  je řešením rovnice v  $n + 1$  nezávisle proměnných, která je lineární v derivacích a má nulovou pravou stranu. Stručně: funkce  $V$ , která rovností (1.73) implicitně popisuje řešení quasilineární rovnice (1.72), je řešením parciální diferenciální rovnice

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) \frac{\partial V}{\partial x_i} + f(\mathbf{x}, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

To je rovnice, kterou jsme se zabývali v předchozí části. Máme tedy následující **algoritmus** pro hledání řešení quasilineární rovnice (1.72).

K rovnici (1.72) přiřadíme *charakteristický systém* obyčejných autonomních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= a_i(x_1, \dots, x_n, u), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{du}{ds} &= f(x_1, \dots, x_n, u). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Jeho trajektorie vyjádříme v obecném tvaru jako průnik  $n$  nadploch

$$v_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Řešení rovnice (1.72) je pak implicitně dáno rovností

$$\Phi(v_1(x_1, \dots, x_n, u), v_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0,$$

kde  $\Phi$  je libovolná diferencovatelná funkce  $n$  proměnných.

Rovnici (1.72) s okrajovou podmínkou (1.67) řešíme tak, že najdeme řešení charakteristického systému (1.74) s počátečními podmínkami (1.68) doplněnými o podmínku

$$u(0) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}).$$

Toto řešení závisí na nezávisle proměnné  $s$  a parametrech  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ , tj.

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ u &= u(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n). \end{aligned}$$

Těmito rovnostmi je parametricky zadáno řešení okrajové úlohy (1.72), (1.67). V některých jednoduchých případech lze parametry  $s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  eliminovat a řešení úlohy vyjádřit explicitně.

Povšimněme si, že algoritmus řešení okrajové úlohy (1.72), (1.67) je bezprostředním zobecněním postupu při řešení úlohy (1.53), (1.36) pro funkci ve dvou nezávisle proměnných.

### Okrajová úloha pro obecnou rovnici

Dosud provedené úvahy napovídají, že řešení obecné rovnice (1.59) pro funkci  $u$  v  $n$  nezávisle proměnných s okrajovou podmínkou (1.67) by bylo možné hledat stejným postupem, jako řešení úlohy (1.39), (1.36).

Pro zjednodušení zápisu zavedeme označení

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^\top = \nabla u,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})^\top, \quad \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) = (X_1(\boldsymbol{\sigma}), X_2(\boldsymbol{\sigma}), \dots, X_n(\boldsymbol{\sigma}))^\top.$$

Rovnice (1.59), nebo ekvivalentní rovnice (1.60), s okrajovou podmínkou (1.67) je pak tvaru

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 0, \quad u(\mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma})) = g(\boldsymbol{\sigma}). \quad (1.75)$$

K rovnici přiřadíme *charakteristický systém* obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= F_{p_i}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), & i &= 1, 2, \dots, n, \\ \frac{du}{ds} &= \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), \\ \frac{dp_i}{ds} &= -F_{x_i}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) - p_i F_u(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}), & i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.76)$$

**Věta 2.** *Nechť  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, \boldsymbol{\sigma})$ ,  $u = u(s, \boldsymbol{\sigma})$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s, \boldsymbol{\sigma})$  je řešení charakteristického systému (1.76) splňující počáteční podmínky*

$$\begin{aligned} x_i(0) &= X_i(\boldsymbol{\sigma}), & i &= 1, 2, \dots, n, \\ u(0) &= g(\mathbf{X}_i(\boldsymbol{\sigma})), \\ p_i(0) &= p_{0i}, & i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.77)$$

kde hodnoty  $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}$  jsou řešením soustavy rovnic

$$F(\mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}), g(\boldsymbol{\sigma}), p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_j}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i=1}^n p_{0i} \frac{\partial X_i}{\partial \sigma_j}(\boldsymbol{\sigma}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.78)$$

Dále necht' funkce  $F$  je spojitě diferencovatelná a funkce  $g$  je spojitá. Pak prvních  $n+1$  složek řešení počáteční úlohy (1.76), (1.77) je parametrickým vyjádřením řešení okrajové úlohy (1.75) v okolí okraje.

*Důkaz:* Necht' řešení uvedené počáteční úlohy (1.76), (1.77) s parametry  $\sigma$  je definováno na intervalu  $[0, \delta)$ . Položme

$$\Omega = \{\mathbf{x}(s, \sigma) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq s < \delta\}.$$

Tato množina má zřejmě vlastnost  $\bar{\Omega} = \overline{\Omega^\circ}$  požadovanou pro definičním obor řešení rovnice (1.59).

Ze spojitosti pravých stran systému (1.76) plyne, že všechny složky řešení tohoto systému (jakožto funkce proměnné  $s$ ) jsou spojitě diferencovatelné a z toho dále plyne, že funkce  $u$  je na množině  $\bar{\Omega}$  spojitá a uvnitř této množiny diferencovatelná.

Z počáteční podmínky (1.77) a z první rovnosti (1.78) plyne, že

$$F(\mathbf{x}(0, \sigma), u(0, \sigma), \mathbf{p}(0, \sigma)) = 0$$

a dále z (1.76) dostaneme

$$\frac{d}{ds}F = \sum_{i=1}^n F_{x_i} \frac{dx_i}{ds} + F_u \frac{du}{ds} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{dp_i}{ds} = \sum_{i=1}^n F_{x_i} F_{p_i} + F_u \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} - \sum_{i=1}^n F_{p_i} (F_{x_i} + p_i F_u) = 0.$$

To znamená, že  $F(\mathbf{x}(s, \sigma), u(s, \sigma), \mathbf{p}(s, \sigma)) = 0$  pro všechny přípustné hodnoty proměnné  $s$ .  $\square$

Prvních  $n + 1$  složek řešení počáteční úlohy (1.76), (1.77) jsou funkce jedné proměnné  $s$  a  $n - 1$  parametrů  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ . Jako parametrické vyjádření řešení okrajové úlohy (1.75) však tyto funkce považujeme za funkce  $n$  proměnných,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \\ x_2 &= x_2(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \\ u &= u(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}). \end{aligned}$$

### 1.3 Evoluční rovnice

Za evoluční rovnice považujeme takové parciální diferenciální rovnice, u nichž jednu z nezávisle proměnných hledané funkce interpretujeme jako čas; tuto proměnnou budeme považovat za první a značit ji symbolem  $t$ . Evoluční rovnice prvního řádu jsou tedy obecně rovnice tvaru

$$F\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Reálné proměnné  $x_1, x_2, \dots, x_n$  budeme nazývat *strukturní*; obecně se totiž nemusí jednat o prostorové souřadnice, ale o nějaké jiné veličiny. V případě McKendrickovy–von Foersterovy rovnice se jednalo o věk.

Pro zjednodušení zápisu opět označíme vektor strukturních proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_n$  symbolem  $\mathbf{x}$  a vektor parciálních derivací hledané funkce podle strukturních proměnných označíme jako gradient  $\nabla u$ . Předchozí rovnici tedy stručněji zapíšeme ve tvaru

$$F\left(t, \mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \nabla u\right) = 0.$$

Dále budeme předpokládat, že derivaci hledané funkce podle času můžeme z této rovnice vyjádřit. Budeme se tedy zabývat rovnicemi tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(t, \mathbf{x}, u, \nabla u). \quad (1.79)$$

(Klasické) řešení rovnice (1.79) je diferencovatelná funkce  $u : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , která pro všechna  $(t, \mathbf{x}) \in J \times \Omega$  splňuje rovnost

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}), \nabla u(t, \mathbf{x}));$$

přítom  $J \subseteq \mathbb{R}$  je interval a  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je množina s neprázdným vnitřkem.

Počáteční podmínka pro rovnici (1.79) je tvaru

$$u(t_0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

kde  $t_0 \in J$ .

### 1.3.1 Počáteční úloha pro evoluční lineární rovnici v jedné strukturní proměnné

Lineární rovnice byly již obecně zavedeny v 1.1.1. Tam byly také uvedeny jejich základní vlastnosti. Uvažujme nyní speciálně lineární evoluční rovnici, tj. rovnici tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(t, x)u + f(t, x), \quad (1.80)$$

kde  $a, b, f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tuto obecně nehomogenní rovnici lze řešit transformací na kanonický tvar, sr. 1.1.2. Tento standardní postup použijeme pouze pro rovnici homogenní. Pro řešení rovnice nehomogenní ukážeme alternativní způsob řešení, který umožňuje interpretovat některé rysy procesu, který je rovnicí modelován. Nakonec využijeme skutečnosti, že množina řešení nehomogenní rovnice tvoří afinní prostor, tj. že řešení nehomogenní rovnice lze zapsat jako řešení homogenní rovnice s obecnou počáteční podmínkou a řešení nehomogenní rovnice s nějakou speciální počáteční podmínkou.

#### Homogenní rovnice

Nejprve tedy budeme řešit homogenní rovnici s obecnou počáteční podmínkou, tj. úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(t, x)u, \quad \text{pro } t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.81)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \quad (1.82)$$

Charakteristická rovnice příslušná k uvažované parciální diferenciální rovnici je

$$\frac{dx}{dt} = -a(t, x).$$

Řešení této obyčejné diferenciální rovnice vyjádříme v implicitním tvaru

$$v(t, x) = \text{const.}$$

Transformace  $\xi = v(t, x)$  převede rovnici (1.81) na její kanonický tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(t, \chi(t, \xi))u,$$

kde funkce  $\chi(t, \cdot)$  je inverzní k funkci  $v(t, \cdot)$  pro každé  $t > 0$ . Řešení této rovnice (což je v podstatě obyčejná lineární homogenní rovnice závislá na jednom parametru  $\xi$ ) je dáno rovností

$$u(\tau, \xi) = u(0, \xi) \exp \left\{ \int_0^\tau b(s, \chi(s, \xi)) ds \right\}.$$

Podle podmínky (1.82) je  $u(0, \xi) = \varphi(\xi)$ . Řešení počáteční úlohy (1.81), (1.82) v původních nezávisle proměnných tedy je

$$u(t, x) = \varphi(v(t, x)) \exp \left\{ \int_0^t b(s, \chi(s, v(t, x))) ds \right\}. \quad (1.83)$$

Integrál v exponentu je vlastně křivkovým integrálem z funkce  $b$  přes úsek charakteristiky spojující body  $(t, x)$  a  $(0, v(t, x))$ .

Povšimněme si ještě speciálního případu rovnice (1.81), kdy funkce  $a$  je konstantní. Charakteristická rovnice

$$\frac{dx}{dt} = -a$$

má obecné řešení  $x(t) = -at + \text{const}$ , tedy  $v(t, x) = x + at$  a  $\chi(t, \xi) = \xi - at$ . Úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b(t, x)u, \quad \text{pro } t > 0, x \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

má proto řešení

$$u(t, x) = \varphi(x + at) e^{\int_0^t b(s, x+at-as) ds} = \varphi(x + at) e^{\int_0^t b(t-s, x+as) ds}$$

Pokud je také funkce  $b$  konstantní, rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + bu$$

s počáteční podmínkou (1.82) má řešení

$$u(t, x) = \varphi(x + at) e^{bt}.$$

Hodnotu  $x + at$  můžeme interpretovat jako polohu bodu na prostorové ose, který má v čase  $t = 0$  souřadnici  $x$  a pohybuje se rovnoměrně rychlostí  $a$ . Výraz  $\varphi(x + at)$  si tedy můžeme představit jako graf funkce  $\varphi$  pohybující se rovnoměrně nad vodorovnou osou. Výraz  $e^{bt}$  tento graf deformuje ve svislém směru. Pro  $b < 0$  je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$$

pro každé  $x$  a každou ohraničenou počáteční funkci  $\varphi$ . Řešení počáteční úlohy pro lineární homogenní rovnici s konstantními koeficienty tedy v tomto případě modeluje postupující a postupně mizející vlnu; tato vlna postupuje při  $a > 0$  v záporném směru osy  $x$  (tj. doleva), při  $a < 0$  doprava. Pro  $b > 0$  rovnice naopak představuje rostoucí postupující vlnu,

Snadno ověříme, že řešení počáteční úlohy pro homogenní rovnici s počáteční podmínkou v obecném okamžiku  $t = \sigma$ , tj. řešení úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(t, x)u, \quad \text{pro } t > \sigma, x \in \mathbb{R}, \quad (1.84)$$

$$u(\sigma, x) = \varphi(x), \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}, \quad (1.85)$$

je tvaru

$$u(t, x) = \varphi(v(t - \sigma, x)) \exp \left\{ \int_0^{t-\sigma} b(s, \chi(s, v(t - \sigma, x))) ds \right\};$$

jedná se o posun časové proměnné o hodnotu  $\sigma$  v řešení (1.83) úlohy (1.81), (1.82).

### Nehomogenní rovnice

Nyní vyřešíme nehomogenní rovnici s nulovou počáteční podmínkou, tj. úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(t, x)u + f(t, x), \quad \text{pro } t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1.86)$$

$$u(0, x) = 0, \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \quad (1.87)$$

Můžeme si představovat, že počáteční nulový stav veličiny  $u$ , jejíž vývoj by se řídil homogenní rovnicí, je v průběhu času narušován nějakým vlivem, který je popsán nehomogenní  $f$ . Tyto vlivy se postupně nasčítají (integrují) do veličiny  $u$ . Přesněji řečeno, očekáváme, že řešení počáteční úlohy (1.86), (1.87) je tvaru

$$u(t, x) = \int_0^t w(t, x, \sigma) d\sigma, \quad (1.88)$$

kde  $w$  je zatím neznámá funkce; budeme předpokládat, že  $w$  je diferencovatelná. Tato myšlenka se nazývá *Duhamelův princip*.

Funkce  $u$  definovaná rovností (1.88) splňuje počáteční podmínku (1.87) pro libovolnou funkci  $w$ . Funkci  $w$  budeme hledat tak, aby funkce  $u$  splnila také rovnici (1.86).

Podle věty o derivaci integrálu podle parametru platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = w(t, x, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t, x, \sigma) d\sigma, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial x}(t, x, \sigma) d\sigma,$$

takže po dosazení do rovnice (1.86) dostaneme

$$\int_0^t \left( \frac{\partial w}{\partial t}(t, x, \sigma) - a(t, x) \frac{\partial w}{\partial x}(t, x, \sigma) - b(t, x) w(t, x, \sigma) \right) d\sigma = f(t, x) - w(t, x, t). \quad (1.89)$$

Na výraz  $w(t, x, \sigma)$  se můžeme dívat jako na funkci dvou proměnných  $t$  a  $x$  s parametrem  $\sigma$ . Pokud tato funkce splní pro každou kladnou hodnotu  $\sigma$  podmínky

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(t, x, \sigma)}{\partial t} &= a(t, x) \frac{\partial w(t, x, \sigma)}{\partial x} + b(t, x) w(t, x, \sigma), & \text{pro } t > \sigma, \quad x \in \mathbb{R}, \\ w(\sigma, x, \sigma) &= f(\sigma, x), & \text{pro } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

pak splní také rovnost (1.89). Funkce  $w$  tedy může být zvolena jako řešení počáteční úlohy pro homogenní lineární rovnici s počáteční podmínkou v okamžiku  $t = \sigma$ . To je stejná úloha jako (1.84), (1.85). Z provedených úvah plyne, že funkci  $w$  lze vyjádřit ve tvaru

$$w(t, x, \sigma) = f(\sigma, v(t - \sigma, x)) \exp \left\{ \int_0^{t-\sigma} b(s, \chi(s, v(t - \sigma, x))) ds \right\}.$$

Dosazením do rovnosti (1.88) dostaneme řešení úlohy (1.86), (1.87)

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t f(\sigma, v(t - \sigma, x)) \exp \left\{ \int_0^{t-\sigma} b(s, \chi(s, v(t - \sigma, x))) ds \right\} d\sigma = \\ &= \int_0^t f(t - \sigma, v(\sigma, x)) \exp \left\{ \int_0^{\sigma} b(s, \chi(s, v(\sigma, x))) ds \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

Řešení nehomogenní rovnice s obecnou počáteční podmínkou je nyní součtem řešení úlohy pro homogenní rovnici s obecnou počáteční podmínkou a řešení úlohy pro nehomogenní rovnici s nulovou počáteční podmínkou.

Dostáváme tak závěr: řešení počáteční úlohy (1.80), (1.82) je dáno předpisem

$$u(t, x) = \varphi(v(t, x)) \exp \left\{ \int_0^t b(s, \chi(s, v(t, x))) ds \right\} + \int_0^t f(t - \sigma, v(\sigma, x)) \exp \left\{ \int_0^\sigma b(s, \chi(s, v(\sigma, x))) ds \right\} d\sigma,$$

kde  $v = v(t, x)$  je kmenovou funkcí diferenciálu  $a(t, x)dt + dx$  (neboli prvním integrálem rovnice (1.80)) a funkce  $\chi(t, \cdot)$  je inverzní funkcí k funkci  $v(t, \cdot)$ .

Ve speciálním případě – konstantním koeficientu u prostorové derivace – můžeme tento výsledek zjednodušit:

$$u(t, x) = \varphi(x + at) e^{\int_0^t b(t-s, x+as) ds} + \int_0^t f(t - \sigma, x + a\sigma) e^{\int_0^\sigma b(\sigma-s, x+as) ds} d\sigma.$$

Pokud je také funkce  $b$  konstantní, dostaneme

$$\varphi(x + at) e^{bt} + \int_0^t f(t - \sigma, x + a\sigma) e^{b\sigma} d\sigma = \left( \varphi(x + at) + \int_0^t f(t - \sigma, x + a\sigma) e^{b(\sigma-t)} d\sigma \right) e^{bt}.$$

### 1.3.2 Okrajové podmínky

Přirozeným okrajem oboru  $\Omega$  strukturálních proměnných  $\mathbf{x}$  je jeho hranice  $\partial\Omega$ . Obecněji budeme však okrajem  $\Gamma$  rozumět  $(n-1)$ -rozměrnou nadplochu v  $\Omega$ , kterou můžeme popsat parametrickými rovnicemi

$$\Gamma : x_i = X_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Parametry  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  jsou z nějaké podmnožiny prostoru  $\mathbb{R}^{n-1}$  s neprázdným vnitřkem. *Okrajová podmínka* v užším smyslu pro rovnici (1.79) obvykle určuje hodnoty hledané funkce na uvažovaném okraji. V takovém případě je tvaru

$$u(t, X_1(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \dots, X_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})) = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}), \quad t \in J. \quad (1.90)$$

Obecnějším typem okrajové podmínky je relace, která nějakým způsobem váže hodnoty hledané funkce. Formálně zapsáno

$$\Psi(u(t, \cdot)) = c, \quad t \in J, \quad (1.91)$$

kde  $\Psi$  je zobrazení z množiny diferencovatelných funkcí definovaných na množině  $\Omega$  do množiny reálných čísel, tj.  $\Psi : C^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcionál.

Promyslete si, že podmínka ve tvaru (1.90) je speciálním případem podmínky (1.91) s  $c = 0$ .

#### Příklad.

Nechť  $\Omega = (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\beta : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je integrovatelná funkce, a nechť zobrazení  $\Psi$  přiřazuje každé diferencovatelné funkci  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  hodnotu

$$\Psi(v) = v(0) - \int_0^\infty \beta(s)v(s) ds.$$

Okrajová podmínka (1.11) v úvodním modelu vývoje věkově strukturované populace je tedy podmínkou tvaru  $\Psi(u(t, \cdot)) = 0$ . ■



Množina diferencovatelných funkcí definovaných na oboru  $\Omega$  tvoří vektorový prostor nad polem reálných čísel. Pokud také množina  $B$  všech funkcí  $u : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , které splňují okrajovou podmínku tvoří vektorový prostor, řekneme, že okrajová podmínka je *homogenní*. Podrobněji: okrajová podmínka (1.90), resp. (1.91), je homogenní, pokud ji splňuje nulová funkce  $u \equiv 0$  a dále

1. jestliže funkce  $u$  splňuje podmínku (1.90), resp. (1.91), pak také funkce  $\alpha u$  splňuje tutéž podmínku pro libovolné  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
2. jestliže funkce  $u, v$  splňují podmínku (1.90), resp. (1.91), pak také funkce  $u + v$  splňuje tutéž podmínku.

Pokud je funkcionál  $\Psi$  v podmínce (1.91) lineárním zobrazením a  $c = 0$ , pak je okrajová podmínka (1.91) homogenní. Je-li funkce  $\psi$  v podmínce (1.90) nulová,  $\psi \equiv 0$ , pak je také okrajová podmínka (1.90) homogenní. To jsou obvyklé případy homogenní okrajové podmínky.

### 1.3.3 Autonomní rovnice

Pokud pravá strana rovnice (1.79) nezávisí explicitně na čase  $t$ , tj. pokud  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , pak řekneme, že tato rovnice je *autonomní*. Autonomní evoluční parciální diferenciální rovnice prvního řádu je tedy rovnice tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(\mathbf{x}, u, \nabla u). \quad (1.92)$$

Autonomní rovnice popisují procesy, které jsou invariantní vzhledem k posunutí v čase. Tuto vlastnost přesněji vyjadřuje následující:

**Tvrzení 3.** Nechť funkce  $u = u(t, \mathbf{x})$  je řešením autonomní rovnice (1.92) a  $t_0 \in \mathbb{R}$  je libovolné. Pak funkce  $v$  definovaná rovností  $v(t, \mathbf{x}) = u(t + t_0, \mathbf{x})$  je také řešením rovnice (1.92), pro které platí  $v(0, \mathbf{x}) = u(t_0, \mathbf{x})$ .

*Důkaz:* Nejprve si povšimněme, že pro libovolné  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  je

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(t + t_0, \mathbf{x})$$

a tedy  $\nabla v(t, \mathbf{x}) = \nabla u(t + t_0, \mathbf{x})$ . Dále, poněvadž funkce  $u$  je řešením rovnice (1.92), platí

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial t}(t + t_0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, u(t + t_0, \mathbf{x}), \nabla u(t + t_0, \mathbf{x})) = g(\mathbf{x}, v(t, \mathbf{x}), \nabla v(t, \mathbf{x})),$$

takže funkce  $v$  je také řešením rovnice (1.92). □

Z uvedeného tvrzení plyne, že počáteční podmínku pro autonomní rovnici (1.92) lze bez újmy na obecnosti vždy uvažovat ve tvaru

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.93)$$

Okrajová podmínka pro autonomní rovnici (1.92) je opět tvaru (1.90) nebo obecněji (1.91).

*Stacionární* (nebo *rovnovážné*) řešení autonomní evoluční rovnice je takové, které nezávisí na čase. Pro stacionární řešení tedy platí  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , což vzhledem k (1.92) znamená, že stacionární řešení rovnice (1.92) je funkce  $u = u(\mathbf{x})$  definovaná na množině  $\Omega$ , která je současně řešením implicitní diferenciální rovnice

$$g(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0.$$

*Strukturně* (nebo *prostorově*) *stabilizované* řešení autonomní evoluční rovnice je takové, které v průběhu času nemění tvar. Přesněji řečeno, je to takové řešení  $u = u(t, \mathbf{x})$ , pro které jsou grafy

funkcí  $u(t_1, \cdot)$ ,  $u(t_2, \cdot)$  podobné geometrické útvary pro každá dvě  $t_1, t_2 \in J$ . Ještě jinak řečeno, strukturně stabilizované řešení rovnice (1.92) je řešení tvaru

$$u(t, \mathbf{x}) = T(t)X(\mathbf{x}),$$

kde  $T : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jsou diferencovatelné funkce. Stacionární řešení autonomní evoluční rovnice je pak strukturně stabilizovaným řešením s konstantní časovou složkou  $T$ .

Uvažujme nyní speciálně rovnici (1.92) takovou, že její pravá strana je homogenní funkce ve druhé a třetí proměnné; to znamená, že pro všechna  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  a  $\beta \in \mathbb{R}^n$  platí

$$g(\mathbf{x}, \kappa\alpha, \kappa\beta) = \kappa g(\mathbf{x}, \alpha, \beta).$$

Prostorově stabilizované řešení  $u = TX$  dosadíme do rovnice (1.92) a upravíme její pravou stranu,

$$T'X = g(\mathbf{x}, TX, \nabla TX) = Tg(\mathbf{x}, X, \nabla X);$$

přítom  $'$  označuje obyčejnou derivaci podle proměnné  $t$ . Předchozí rovnost vydělíme součinem  $TX$  a dostaneme

$$\frac{T'}{T} = \frac{g(\mathbf{x}, X, \nabla X)}{X}.$$

Výraz na levé straně této rovnosti závisí pouze na nezávisle proměnné  $t$ , nikoliv na  $\mathbf{x}$ , výraz na pravé straně rovnosti závisí pouze na proměnných  $\mathbf{x}$ , nikoliv na  $t$ . Na obou stranách rovnosti je tedy nějaká konstanta; označme ji  $\lambda$ . Pro prostorovou složku  $X$  řešení  $u$  v uvažovaném případě platí

$$g(\mathbf{x}, X, \nabla X) = \lambda X. \quad (1.94)$$

Pokud tedy existuje konstanta  $\lambda$ , že rovnice (1.94) má řešení  $X_\lambda$ , pak existuje strukturně stabilizované řešení rovnice (1.92). Přítom časová složka  $T$  splňuje rovnici

$$\frac{T'}{T} = \lambda.$$

Řešením této obyčejné lineární homogenní rovnice je funkce daná předpisem  $T(t) = e^{\lambda t}$ . Strukturně stabilizované řešení je proto tvaru

$$u(t, \mathbf{x}) = e^{\lambda t} X_\lambda(\mathbf{x}). \quad (1.95)$$

Pokud  $\lambda = 0$  a příslušná funkce  $X_0$  vyhovují rovnosti (1.94), pak stacionární řešení je dáno vztahem  $u(t, \mathbf{x}) = X_0(\mathbf{x})$ .

### Příklad.

Uvažujme lineární homogenní autonomní rovnici ve dvou nezávisle proměnných s konstantním koeficientem u derivace podle strukturní proměnné

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b(x)u \quad (1.96)$$

definovanou pro  $x \in \mathbb{R}$   $t > 0$ . Tato rovnice má vždy nulové řešení, které je řešením stacionárním. Navíc pro každé reálné číslo  $\lambda$  má obyčejná lineární homogenní rovnice

$$aX' + b(x)X = \lambda X, \quad \text{tj. } X' = -\frac{\lambda - b(x)}{a}X$$

(nyní  $'$  označuje obyčejnou derivaci podle proměnné  $x$ ) řešení

$$X(x) = \text{const} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{a} \left( \lambda x - \int_0^x b(\xi) d\xi \right) \right\},$$

tedy rovnice (1.96) má strukturně stabilizovaná řešení

$$u(t, x) = Ce^{\lambda t} \exp \left\{ -\frac{1}{a} \left( \lambda x - \int_0^x b(\xi) d\xi \right) \right\},$$

kde  $C = u(0, 0)$ . Pro  $\lambda = 0$  je toto řešení stacionární. ■

Uvažujme nyní rovnici (1.92) s okrajovou podmínkou (1.90) nebo (1.91). Strukturně stabilizované řešení této počáteční úlohy definujeme jako strukturně stabilizované řešení rovnice (1.92), které navíc pro každé  $t$  splňuje příslušnou okrajovou podmínku. V případě homogenní okrajové podmínky tvaru (1.91) s  $c = 0$  a lineárním funkcioálem  $\Psi$  platí

$$0 = \Psi(T(t)X(\cdot)) = T(t)\Psi(X).$$

Strukturní složka  $X$  strukturně stabilizovaného řešení tedy splňuje okrajovou podmínku

$$\Psi(X) = 0. \tag{1.97}$$

Pokud existuje číslo  $\lambda$  a k němu existuje nenulová funkce  $X_\lambda$  takové, že splňují homogenní podmínku (1.97) a rovnici (1.94) s funkcí  $h$  homogenní v proměnných  $u$  a  $\nabla u$ , pak má okrajová úloha (1.92), (1.79) prostorově stabilizované nenulové řešení tvaru (1.95).

Podívejme se na tento výsledek z obecnějšího hlediska. Množina diferencovatelných funkcí definovaných na množině  $\Omega$ , které splňují homogenní okrajovou podmínku (1.91) tvoří vektorový prostor (podprostor prostoru  $C^1(\Omega)$  diferencovatelných funkcí). Dále máme zobrazení  $\mathcal{A}$  z tohoto prostoru do prostoru spojitých funkcí definované vztahem

$$\mathcal{A}(w)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, w(\mathbf{x}), \nabla w(\mathbf{x}));$$

přitom funkce  $g$  je homogenní ve druhé a třetí proměnné. S tímto označením můžeme rovnici (1.94) přepsat do tvaru

$$\mathcal{A}(w) = \lambda w.$$

Okrajová úloha (1.94), (1.97) je tak vlastně úlohou najít vlastní číslo a příslušný vlastní vektor operátoru  $\mathcal{A}$  ve vektorovém prostoru funkcí splňujících okrajovou podmínku.

## Cvičení

V úlohách 1–6 najděte obecné řešení rovnice.

1.  $x^2 u_x + y^2 u_y = 0$
2.  $(1 + x^2) u_x + xy u_y = 0$
3.  $\frac{z}{x-y} u_x + \frac{z}{y-x} u_y + z^2 u_z = 0$
4.  $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3^3 \frac{\partial u}{\partial x_3} + \dots + x_n^n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$
5.  $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$
6.  $xuu_x + yuu_y + xy = 0$

V úlohách 7–12 najděte řešení okrajové úlohy.

7.  $2u_x + 3u_y = 0, u(0, y) = 4y$
8.  $(z - y)u_x + (x - z)u_y + (y - x)u_z = 0, u(0, y, z) = yz$

9.  $u(x+u)u_x - y(y+u)u_y = 0, u(1, y) = \sqrt{y}$
10.  $(x+u)u_x + yu_y = u + y^2, u(x, 1) = x$
11.  $u_x^2 - u_y^2 = u, u(1, y) = 1$
12.  $u_t = -(u_x)^2, u(0, x) = ax$

**Výsledky:**

1.  $u(x, y) = \Phi\left(\frac{x-y}{xy}\right)$
2.  $u(x, y) = \Phi\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)$
3.  $u(x, y, z) = \Phi(x+y, (x-y)^2 - \ln z^4)$
4.  $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi\left(\frac{1}{x_2} + \ln x_1, \frac{1}{2x_3^2} - \frac{1}{x_2}, \frac{1}{3x_4^3} - \frac{1}{2x_3^2}, \dots, \frac{1}{(n-1)x_n^{n-1}} - \frac{1}{(n-2)x_{n-1}^{n-2}}\right)$
5.  $u(x, y) = xy + \Phi(x^2 + y^2)$
6.  $\Phi\left(\frac{x}{y}, xy + u^2\right) = 0$  (implicitní popis)
7.  $u(x, y) = 4y - 6x$
8.  $u(x, y, z) = xy + yz + zx$
9.  $u(x, y) = \sqrt{xy}$
10.  $u(x, y) = \frac{x + y^2 \ln y}{1 + \ln y}$
11.  $(4u - (x-3)^2)(4u - (x-1)^2) = 0$  (implicitní popis)
12.  $u(t, x) = ax - a^2t$



## Kapitola 2

# Rovnice druhého řádu

### Jednorozměrná rovnice difúze / vedení tepla

Uvažujme tenký dlouhý válec, v němž proudí kapalina. Poloměr válce je vzhledem k jeho výšce (délce) tak malý, že válec s kapalinou můžeme považovat za jednorozměrný objekt a jeho jediný rozměr (délku) za nekonečný. Osu válce ztotožníme se souřadnou osou  $x$ . Představme si, že v proudící kapalině je nějaká látka, která je jednak unášena proudem, jednak v kapalině difunduje. Navíc může probíhat i nějaká chemická reakce – látka se může v kapalině rozkládat nebo tvořit.

Množství látky vyjádříme její hustotou (koncentrací); za hustotu budeme považovat hmotnost látky vztahenou k délce úseku válce, na kterém se nachází. Přesněji: označíme-li symbolem  $u(t, x)$  hustotu látky v čase  $t$  a v bodě  $x$  a symbolem  $m(t, \alpha, \beta)$  množství látky v úseku válce mezi souřadnicemi  $\alpha$  a  $\beta$ , pak budou tyto veličiny vázány vztahy

$$m(t, \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} u(t, x) dx, \quad u(t, x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(t, x, x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Probíhající chemické reakce budeme charakterizovat nějakou veličinou  $f$ , kterou můžeme nazvat intenzita reakce a charakterizovat jako množství látky, které se příslušnou reakcí vytvoří (nebo rozloží) za jednotku času v části válce o jednotkové délce. Pokud látka vzniká, je intenzita kladná,  $f > 0$ , pokud se rozkládá, je  $f < 0$ . Intenzita reakce ovšem může záviset na množství (tj. koncentraci) látky a být v každém bodě a v každém čase jiná, tedy  $f = f(t, x, u)$ . Pak množství látky, které vznikne (nebo se rozloží) za časový interval  $[t, t + \Delta t]$  v úseku válce mezi souřadnicemi  $\alpha$  a  $\beta$  je dáno výrazem

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\alpha}^{\beta} f(s, x, u(s, x)) dx ds; \quad (2.1)$$

znaménko tohoto výrazu určuje, zda se jedná o tvorbu nebo rozklad látky.

Difúzi vyjádříme veličinou  $g = g(t, x)$ , kterou nazveme *difúzní tok*. Můžeme si ho představit jako rychlost difundující částice. Přesněji ho definujeme tak, že množství látky (tj. hmotnost), které se dostane difúzí přes bod o souřadnici  $x$  za časový interval  $[t, t + \Delta t]$ , je rovno

$$\int_t^{t+\Delta t} g(s, x) ds;$$

je-li tato veličina kladná, jedná se o pohyb zleva doprava, je-li záporná, pak o pohyb zprava doleva. Do úseku válce, jehož levý krajní bod má souřadnici  $\alpha$  a pravý krajní bod souřadnici  $\beta$ , se tedy

za časový interval  $[t, t + \Delta t]$  difúzí dostane přes levý okraj množství látky o hmotnosti

$$\int_t^{t+\Delta t} g(s, \alpha) ds$$

a přes pravý okraj se z něho dostane množství látky o hmotnosti

$$\int_t^{t+\Delta t} g(s, \beta) ds.$$

Tato interpretace předpokládá, že  $g(t, \alpha) > 0$ ,  $g(t, \beta) > 0$ ; kdyby tyto nerovnosti nebyly splněny, odpovídajícím způsobem bychom vyměnili slova „do úseku“ za „z úseku“ a naopak. Celková změna hmotnosti látky v úseku válce od  $\alpha$  do  $\beta$  způsobená difúzí za časový interval  $[t, t + \Delta t]$  tedy je

$$\int_t^{t+\Delta t} g(s, \alpha) ds - \int_t^{t+\Delta t} g(s, \beta) ds = \int_t^{t+\Delta t} (g(s, \alpha) - g(s, \beta)) ds. \quad (2.2)$$

Celkovou změnu hmotnosti drogy v úseku žíly od bodu  $\alpha$  do bodu  $\beta$  způsobenou reakcí a difúzí během časového intervalu  $[t, t + \Delta t]$  můžeme nyní vyjádřit jako součet výrazů (2.1) a (2.2). S využitím Newtonovy-Leibnizovy formule a první věty o střední hodnotě integrálního počtu ji upravíme na tvar

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_\alpha^\beta f(s, x, u(s, x)) dx ds + \int_t^{t+\Delta t} (g(s, \alpha) - g(s, \beta)) ds = \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_\alpha^\beta f(s, x, u(s, x)) dx - \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x} g(s, x) dx \right) ds = \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_\alpha^\beta \left( f(s, x, u(s, x)) - \frac{\partial}{\partial x} g(s, x) \right) dx \right) ds = \\ &= \int_\alpha^\beta \left[ \left( f(t + \vartheta_1 \Delta t, x, u(t + \vartheta_1 \Delta t, x)) - \frac{\partial}{\partial x} g(t + \vartheta_1 \Delta t, x) \right) \Delta t \right] dx, \quad (2.3) \end{aligned}$$

kde  $\vartheta_1 \in (0, 1)$  je číslo, jehož existence je zaručena první větou o střední hodnotě integrálního počtu.

Nyní se budeme zabývat změnou hmotnosti látky ve válci vlivem jejího proudění; tento proces nazýváme *advekce*. Předpokládejme na okamžik, že délková hustota  $u$  unášené látky a rychlost  $v$  proudění kapaliny jsou konstantní. V takovém případě je vzdálenost, kterou urazí částice látky od nějakého bodu za časový interval délky  $\Delta t$ , rovna  $v\Delta t$  a celková hmotnost látky, která za tento čas proteče přes uvažovaný bod, je rovna  $uv\Delta t$ . V realističtějších případech, kdy hustota  $u$  i rychlost proudění  $v$  závisí na čase a na místě, je celkové množství látky, které proteče přes bod  $x$ , dáno stejným součinem, ovšem funkce  $u$  a  $v$  vyčíslíme v nějaké „mezihodnotě“ dvojrozměrného intervalu  $[t, t + \Delta t] \times [x, x + \Delta x]$ , kde  $\Delta x = v\Delta t$ . Toto množství (hmotnost) je tedy dáno výrazem

$$u(t + h_1 \Delta t, x + h_2 \Delta x) v(t + h_1 \Delta t, x + h_2 \Delta x) \Delta t,$$

kde  $h_1, h_2 \in [0, 1]$ . Avšak podle věty o střední hodnotě platí

$$u(t + h_1 \Delta t, x + h_2 \Delta x) v(t + h_1 \Delta t, x + h_2 \Delta x) = u(t, x) v(t, x) + h_3 \Delta t,$$

kde  $h_3$  je nějaká konstanta<sup>1</sup>. Celková hmotnost látky, která proteče přes levý krajní bod  $\alpha$  uvažovaného úseku válce během časového intervalu  $[t, t + \Delta t]$  je tedy dána výrazem

$$u(t, \alpha)v(t, \alpha)\Delta t + \vartheta_2(\Delta t)^2, \quad (2.4)$$

kde  $\vartheta_2$  je nějaká konstanta. Analogicky, hmotnost látky, která proteče během uvažovaného časového intervalu přes pravý krajní bod  $\beta$ , je dána výrazem

$$u(t, \beta)v(t, \beta)\Delta t + \vartheta_3(\Delta t)^2. \quad (2.5)$$

Pokud je rychlost  $v$  proudění kladná, tj. kapalina proudí zleva doprava, přiteče do úseku s krajními body  $\alpha, \beta$  přes levý krajní bod celková hmotnost látky (2.4) a odečte z něho přes pravý krajní bod látka o hmotnosti (2.5); pokud by rychlost byla záporná, tj. kapalina by proudila zprava doleva, zaměníme slova „přiteče“ za „odečte“ a naopak. Změna hmotnosti látky za časový interval  $[t, t + \Delta t]$  v úseku válce od bodu o souřadnici  $\alpha$  po bod o souřadnici  $\beta$  způsobená advekcí je rovna rozdílu

$$\begin{aligned} u(t, \alpha)v(t, \alpha)\Delta t + \vartheta_2(\Delta t)^2 - (u(t, \beta)v(t, \beta)\Delta t + \vartheta_3(\Delta t)^2) = \\ = (u(t, \alpha)v(t, \alpha) - u(t, \beta)v(t, \beta))\Delta t + \vartheta_4(\Delta t)^2, \end{aligned}$$

kde  $\vartheta_4 = \vartheta_2 - \vartheta_3$ . Tento rozdíl můžeme pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule vyjádřit ve tvaru

$$\left( - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} u(t, x)v(t, x) dx \right) \Delta t + \vartheta_4(\Delta t)^2. \quad (2.6)$$

Celková změna hmotnosti drogy v uvažovaném úseku žíly za čas od  $t$  do  $t + \Delta t$  je součtem výrazů (2.3) a (2.6),

$$\begin{aligned} \delta(t, \alpha, \beta, \Delta t) = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \left( f(t + \vartheta_1 \Delta t, x, u(t + \vartheta_1 \Delta t, x)) - \frac{\partial}{\partial x} (g(t + \vartheta_1 \Delta t, x) - u(t, x)v(t, x)) \right) \Delta t \right] dx + \\ + \vartheta_4(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Ze zákona zachování hmoty nyní můžeme vyjádřit celkovou hmotnost látky v úseku válce od  $\alpha$  po  $\beta$  za časový interval délky  $\Delta t$

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(t + \Delta t, x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} u(t, x) dx + \delta(t, \alpha, \beta, \Delta t).$$

Po dosazení a zřejmé úpravě dostaneme

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x} (g(t + \vartheta_1 \Delta t, x) + u(t, x)v(t, x)) - \right. \\ \left. - f(t + \vartheta_1 \Delta t, x, u(t + \vartheta_1 \Delta t, x)) \right) dx = \vartheta_4 \Delta t$$

---

<sup>1</sup>Tuto konstantu lze podrobněji vyjádřit výrazem  $h_3 = \frac{\partial}{\partial t} uv + v \frac{\partial}{\partial x} uv$ , kde hodnoty funkcí  $u, v$  jsou vyčísleny v nějakém bodu dvojrozměrného intervalu  $[t, t + \Delta t] \times [x, x + \Delta x]$ .



a limitním přechodem  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} g(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) v(t, x) - f(t, x, u(t, x)) \right) dx = 0.$$

Úsek válce od souřadnice  $\alpha$  do souřadnice  $\beta$  byl vybrán libovolně, stejně tak i časový okamžik  $t$ . To znamená, že pro všechna  $x$  a všechna  $t$  musí platit

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x} g(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) u(t, x) + f(t, x, u(t, x)). \quad (2.7)$$

Tato relace váže neznámou funkci  $u$  (hustotu) a neznámou funkci  $g$  (difúzní tok), intenzita  $f$  probíhající chemické reakce je dána charakterem reakce. Potřebujeme tedy ještě nějak funkci  $g$  určit. Předpokládejme tedy, že difúzi se částice přesunuje z místa s větší koncentrací na místo s koncentrací menší (to je předpoklad celkem přirozený) a že rychlost difundující částice je přímo úměrná rozdílu koncentrací (přesněji gradientu, tj. derivaci koncentrace). Tento předpoklad bývá nazýván *Fickův zákon*. Tedy

$$g(t, x) = -D \frac{\partial}{\partial x} u(t, x).$$

Kladný koeficient úměrnosti  $D$  se nazývá *difuzivita*; může se měnit s časem i s místem, tedy  $D = D(t, x)$ . Dosazením do rovnosti (2.7) dostaneme *rovnici reakce-advekce-difúze*

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u \right) - \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) u + f(t, x, u). \quad (2.8)$$

Tato rovnice má být splněna pro každý čas  $t > 0$  a každý bod  $x \in \mathbb{R}$ . K rovnici přidáme *počáteční podmínku* vyjadřující koncentraci difundující látky v počátečním čase  $t = 0$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (2.9)$$

která má platit pro každé  $x \in \mathbb{R}$ .

## Speciální případy a okrajové podmínky

Budeme nyní předpokládat, že uvažovaná látka v kapalině nereaguje, tj.  $f \equiv 0$ , kapalina je homogenní, v čase se nemění, tj.  $D(t, x) \equiv a^2 = \text{const}$ , a proudí konstantní rychlostí  $v(t, x) \equiv \text{const}$ . Obecnou rovnici reakce-advekce-difúze (2.8) tak můžeme zjednodušit na *rovnici advekce-difúze* s konstantními koeficienty

$$\frac{\partial}{\partial t} u = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - v \frac{\partial}{\partial x} u. \quad (2.10)$$

V tomto případě můžeme prostorovou souřadnici transformovat – zavést novou souřadnou soustavu, která je „unášena rychlostí  $v$ “. Zavedeme tedy novou prostorovou souřadnici  $\xi$  vztahem

$$\xi = x - vt.$$

Pak podle řetězového pravidla pro výpočet parciálních derivací složených funkcí platí

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, \xi(t, x)) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, \xi(t, x)) \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} u(t, \xi(t, x)) \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} u(t, \xi) - v \frac{\partial}{\partial \xi} u(t, \xi)$$

a analogicky a stručněji (bez psaní nezávisle proměnných)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u.$$

Dosazením do rovnice (2.8) dostaneme rovnici difúze

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \quad (2.11)$$

Tato rovnice vlastně modeluje difúzi látky v neproudící kapalině, případně difúzi plynu v nějakém dlouhém válci naplněném vzduchem nebo jiným plynem.

Také si můžeme uvědomit, že vedení tepla v tělese je proces analogický difúzi – teplo také přechází z místa teplejšího na chladnější a přechod tepla můžeme považovat za úměrný teplotnímu spádu (tj. gradientu nebo derivaci teploty) a orientovaný opačně. Jinak řečeno, Fickův zákon popisuje i vedení tepla. Proto se rovnice (2.11) nazývá také *rovnice vedení tepla*. V takovém případě interpretujeme hledanou funkci  $u = u(t, x)$  jako teplotu malého okolí bodu  $x$  (malého kousku tyče, v níž je teplo vedeno) v čase  $t$ . Poněkud přesněji vyjádřeno: v časovém okamžiku  $t$  je celková tepelná energie úseku tyče od bodu se souřadnicí  $\alpha$  po bod se souřadnicí  $\beta$  dána výrazem

$$\frac{k}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} u(t, x) dx,$$

kde  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{JK}^{-1}$  je Boltzmanova konstanta.

Zatím jsme neuvažovali o délce trubice, v níž probíhá difúze. Jedna z možností je uvažovat ji tak dlouhou, že „na její konec nedohlédneme“, matematicky řečeno, pravý konec oboru, na němž difúze probíhá je v nekonečnu. Ale i v tak dlouhé trubici budeme uvažovat jen konečné množství látky. Tuto podmínku vyjádříme tak, že

$$\int_{x_0}^{\infty} u(t, x) dx < \infty; \quad (2.12)$$

přítom  $x_0$  je nějaké číslo. Tato podmínka říká, že uvedený nevládní integrál konverguje, neboť hustota  $u$  je nezáporná. Odtud dále plyne, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$$

pro každý čas  $t$ , neboť funkci  $u$  považujeme za spojitou. Podmínka (2.12) se nazývá *podmínka integrability* nebo *integrovatelnosti*.

Pravý konec válce (trubice, žíly) však může být v nějaké konečné vzdálenosti, mít konečnou souřadnici  $x_0$ . Tento pravý konec může být pro difundující látku uzavřený, žádná přes něj neprostopuje, tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = 0 \quad (2.13)$$

pro každý čas  $t$ . Jiná možnost je, že na tomto konci je nějak dán tok (probíhá na něm nějaký proces, který tok určuje). Ten se může v čase měnit. Dostáváme tak podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = \nu(t). \quad (2.14)$$

Podmínky tvaru (2.13) nebo (2.14) se nazývají *Neumannovy okrajové podmínky*.

Jiná možnost je, že na pravém otevřeném konci válce se látka rozptýluje do volného prostoru. V takovém případě je napravo od krajního bodu  $x_0$  koncentrace (prakticky) nulová a tok, tj. derivace hustoty podle prostorové proměnné, je podle Fickova zákona úměrný koncentraci nalevo od bodu  $x_0$  (uvnitř válce). Tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = -hu(t, x_0) \quad (2.15)$$

pro každé  $t$ ; přítom  $h$  je kladný koeficient úměrnosti (převrácená hodnota „difusivity přes hranici“). V okolním prostoru ale nemusí být jen nulová koncentrace látky. Napravo od krajního bodu

$x_0$  může koncentrace mít v každém okamžiku  $t$  nějakou hodnotu  $\mu(t)$  nezávislou na koncentraci v trubici, např. v důsledku nějakého vnějšího probíhajícího procesu. V takovém případě je difúzní tok přes hranici úměrný rozdílu koncentrací nalevo a napravo od hranice, tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = -h(u(t, x_0) - \mu(t)). \quad (2.16)$$

Podmínky tvaru (2.15) nebo (2.16) se nazývají *Robinovy okrajové podmínky*.

Pokud rovnici (2.11) interpretujeme jako model vedení tepla v dlouhé tenké tyči (drátu) po stranách tepelně izolované, můžeme na jejím konci udržovat nulovou teplotu (konec tyče přiložíme k ledu). V takovém případě dostaneme podmínku

$$u(t, x_0) = 0 \quad (2.17)$$

pro každý čas  $t$ . Nebo teplota na konci tyče může být určována nějakým vnějším nezávislým procesem; pak dostaneme podmínky tvaru

$$u(t, x_0) = \mu(t). \quad (2.18)$$

Podmínky (2.17) a (2.18) se nazývají *Dirichletovy okrajové podmínky*.

Podmínky (2.13), (2.15) a (2.17) můžeme zapsat jednotným způsobem

$$\alpha u(t, x_0) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = 0; \quad (2.19)$$

pro  $\alpha = 0, \beta = 1$  se jedná o podmínky Neumannovy, pro  $\alpha = h, \beta = 1$  o podmínky Robinovy a pro  $\alpha = 1, \beta = 0$  o podmínky Dirichletovy. Podobně i podmínky (2.14), (2.16) a (2.18) můžeme souhrnně zapsat ve tvaru

$$\alpha u(t, x_0) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0) = \varrho(t). \quad (2.20)$$

Podmínky (2.19) a (2.20) nazýváme *Robinovy okrajové podmínky*. (Ve starší evropské nebo ruské literatuře tyto byly podmínky nazývány *Newtonovy okrajové podmínky*.)

Analogicky můžeme zformulovat okrajové podmínky pro levý okraj oboru, na němž modelujeme difúzi nebo vedení tepla. Jediný rozdíl je v Robinových podmínkách, kde se změní znaménko u koeficientu  $h$ .

Obor prostorové proměnné  $x$  ale nemusí žádné okraje mít, může jít o nějaký uzavřený prsteneček. V takovém případě po proběhnutí celého prstence (uzavřené křivky) se dostaneme do stejného bodu, koncentrace látky v něm musí být stejná. Trochu přesněji: označíme-li délku křivky  $\ell$ , pak v každém časovém okamžiku  $t$  musí platit

$$u(t, x) = u(t, x + \ell) \quad (2.21)$$

pro libovolnou hodnotu  $x$ . Podmínku (2.21) nazýváme *podmínka periodičnosti* nebo *periodická okrajová podmínka*.

Ještě si všimněme jedné skutečnosti. Pokud nějaké funkce  $u_1, u_2$  splňují některou z podmínek (2.12), (2.21) nebo (2.19), pak také libovolná lineární kombinace těchto funkcí splňuje stejnou podmínku. Podmínky (2.12), (2.21), (2.19) splňují princip superpozice a proto je souhrnně nazýváme *homogenní okrajové podmínky*.

## Nejjednodušší řešení

Uvažujme jednoduchou situaci: v jednom bodě (který můžeme považovat za počátek souřadnic) do kapaliny v počátečním okamžiku „umístíme“ nějaké množství  $A$  látky, která se bude v neproudící kapalině šířit difúzí. Vývoj koncentrace difundující látky bude popsán rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

V průběhu procesu žádnou látku z kapaliny neodebíráme, ani ji do ní neřídáváme, její množství je stále stejné jako na začátku. Musí tedy platit

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx = A \quad \text{pro všechna } t > 0. \quad (2.23)$$

Tato rovnost však musí platit i na počátku, v čase  $t = 0$ , tj.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, x) dx.$$

Přitom ale předpokládáme, že na počátku je hustota nulová všude s výjimkou bodu  $x = 0$ , neboť veškerá látka je koncentrována v jediném bodě. Hustotu na počátku tedy při této idealizaci nemůžeme považovat za „normální“ reálnou funkci a poslední integrál za „normální“ integrál (Riemannův nebo nějaký obecnější). Počáteční rozložení látky, její „distribuci“ (v hovorovém významu tohoto slova), budeme považovat za distribuci ve smyslu Dodatku A. Počáteční podmínku pro rovnici (2.22) tedy napíšeme ve tvaru

$$u(0, x) = A\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

kde  $\delta$  je Diracova distribuce.

Pokusíme se „uhodnout“ řešení rovnice (2.22) s počáteční podmínkou (2.24). Můžeme si představit, že difúze probíhá tak, že jednotlivé molekuly látky se náhodně pohybují a že pravděpodobnost pohybu nalevo je stejná jako pravděpodobnost pohybu napravo. Koncentrace látky po jistém čase by tedy mohla mít tvar normálního (Gaussova) rozložení pravděpodobnosti se střední hodnotou 0. Rozptyl se však s časem mění – na počátku je nulový a s postupem času se zvětšuje. Pro rozptyl  $\sigma^2 = \sigma(t)^2$  tedy platí

$$\sigma(0) = 0. \quad (2.25)$$

Řešení rovnice (2.22) s počáteční podmínkou (2.24) tedy budeme hledat ve tvaru

$$u(t, x) = A \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}.$$

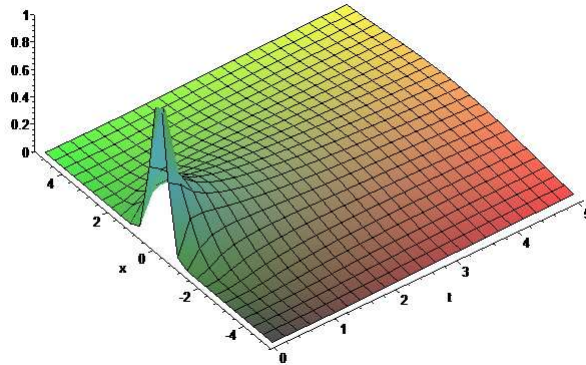
Z vlastností rozložení pravděpodobností je vidět, že při této volbě v každém čase  $t$  platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} dx = A,$$

takže podmínka (2.23) je splněna. Má být splněna také rovnice (2.22). Proto vyjádříme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{\sigma(t)^2} \sigma'(t) + \frac{1}{\sigma(t)} \left( -\frac{x^2}{2} (-2\sigma(t)^{-3}) \sigma'(t) \right) \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} \sigma'(t) \left( \frac{x^2}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2} \right) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} (x^2 - \sigma(t)^2) \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(t)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} \left( -\frac{2x}{2\sigma(t)^2} \right) \right) = -\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(t)^3} \frac{\partial}{\partial x} \left( x e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} \right) = \\ &= -\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(t)^3} \left( 1 + x \left( -\frac{2x}{2\sigma(t)^2} \right) \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} \frac{1}{\sigma(t)^5} (x^2 - \sigma(t)^2). \end{aligned}$$



Obrázek 2.1: Řešení rovnice (2.22) s počáteční podmínkou (2.24). Použité hodnoty parametrů jsou  $A = 1$ ,  $a = 1$ .

Po dosazení do rovnice (2.22) a jednoduché úpravě dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci  $\sigma$

$$\sigma'(t) = \frac{a^2}{\sigma(t)}.$$

Řešení této rovnice se separovanými proměnnými, které splňuje počáteční podmínku (2.25) je  $\sigma(t) = \sqrt{2a^2t}$ . Dostáváme tedy řešení počáteční úlohy (2.22), (2.24) ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{A}{2\sqrt{a^2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \quad (2.26)$$

Graf tohoto řešení pro hodnoty nezávisle proměnných  $t \in (0, 0,5, 5)$  a  $x \in (-5, 5)$  je na Obrázku 2.1.

## 2.1 Rovnice ve dvou nezávisle proměnných lineární ve druhých derivacích

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.27)$$

kde  $A, B, C$  jsou reálné funkce definované na nějaké množině  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  s neprázdným vnitřkem a funkce  $F$  je definována na množině  $G \times \mathbb{R}^3$ . Přitom budeme předpokládat, že pro každý bod  $(x, y) \in G$  platí

$$|A(x, y)| + |B(x, y)| + |C(x, y)| > 0,$$

tj. funkce  $A, B, C$  nejsou současně nulové. Pro každý bod  $(x, y) \in G$  můžeme zavést matici

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ B(x, y) & C(x, y) \end{pmatrix}.$$

Tato matice je evidentně symetrická.

Nechť  $(x_0, y_0) \in G$ . Rovnice (2.27) se nazývá

*hyperbolická v bodě  $(x_0, y_0)$* , je-li matice  $M(x_0, y_0)$  indefinitní,

*parabolická v bodě  $(x_0, y_0)$* , je-li matice  $M(x_0, y_0)$  pozitivně nebo negativně semidefinitní,

*eliptická* v bodě  $(x_0, y_0)$ , je-li matice  $M(x_0, y_0)$  pozitivně nebo negativně definitní.

Rovnice (2.27) se nazývá *hyperbolická*, resp. *parabolická*, resp. *eliptická*, na otevřené množině  $H \subseteq G$ , je-li hyperbolická, resp. parabolická, resp. eliptická, v každém bodě množiny  $H$ .

Ze známých vět z lineární algebry plyne, že rovnice (2.27) je

$$\left. \begin{array}{l} \text{hyperbolická} \\ \text{parabolická} \\ \text{eliptická} \end{array} \right\} \text{ v bodě } (x_0, y_0) \in G \text{ právě tehdy, když } \left\{ \begin{array}{l} B(x_0, y_0)^2 > A(x_0, y_0)C(x_0, y_0), \\ B(x_0, y_0)^2 = A(x_0, y_0)C(x_0, y_0), \\ B(x_0, y_0)^2 < A(x_0, y_0)C(x_0, y_0). \end{array} \right.$$

### 2.1.1 Charakteristiky a kanonický tvar rovnice

Budeme hledat transformaci nezávisle proměnných, která rovnici (2.27) převede na nějaký jednodušší tvar; v ideálním případě na takový, aby bylo možné najít nějaké její řešení.

Nechť  $H \subseteq G$  je otevřená množina. Buďte dále  $\varphi, \psi : H \rightarrow \mathbb{R}$  takové funkce, že

$$\varphi_x(x, y)\psi_y(x, y) - \varphi_y(x, y)\psi_x(x, y) \neq 0$$

pro všechna  $(x, y) \in H$ . Pak transformace

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (2.28)$$

bijektivně zobrazí množinu  $H$  na otevřenou podmnožinu  $\mathbb{R}^2$  a rovnici (2.27) transformuje na tvar (využíváme formule pro druhé parciální derivace složené funkce)

$$a(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2b(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + c(\xi, \eta)u_{\eta\eta} = \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}), \quad (2.29)$$

kde

$$\begin{aligned} a &= A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = \varphi_y^2 \left( A \left( -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2B \left( -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + C \right), \\ b &= A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y, \\ c &= A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = \psi_y^2 \left( A \left( -\frac{\psi_x}{\psi_y} \right)^2 - 2B \left( -\frac{\psi_x}{\psi_y} \right) + C \right); \end{aligned} \quad (2.30)$$

naznačenou úpravu výrazu pro funkce  $a$  nebo  $c$  lze samozřejmě provést pouze v případě, že  $\varphi_y \neq 0$  nebo  $\psi_y \neq 0$ .

Při hledání inverzní transformace k transformaci (2.28) řešíme soustavu rovnic (2.28) pro neznámé  $x, y$ . Přitom první, resp. druhou, z rovnic je implicitně dána funkce  $y_1 = y_1(x)$ , resp.  $y_2 = y_2(x)$ , pro jejíž derivaci platí

$$y_1' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}, \quad \text{resp.} \quad y_2' = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$$

(podle vzorce pro derivaci implicitně zadané funkce, viz např. Z Došlá, O Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. MU 1999, str. 96).

Obyčejná diferenciální rovnice v implicitním tvaru (nerozřešená vzhledem k derivaci)

$$A(x, y) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B(x, y) \frac{dy}{dx} + C(x, y) = 0 \quad (2.31)$$

se nazývá *charakteristická rovnice parciální diferenciální rovnice* (2.27). Její řešení se nazývají *charakteristiky* této rovnice.

Z předchozích úvah je vidět, že platí: Je-li rovnice (2.27) hyperbolická, má dvě jednoparametrické množiny charakteristik, které jsou řešenými obyčejných diferenciálních rovnic

$$y' = \frac{B(x, y) + \sqrt{(B(x, y))^2 - A(x, y)C(x, y)}}{A(x, y)} \quad \text{a} \quad y' = \frac{B(x, y) - \sqrt{(B(x, y))^2 - A(x, y)C(x, y)}}{A(x, y)}. \quad (2.32)$$

Je-li rovnice (2.27) parabolická, má jednu jednoparametrickou množinu charakteristik, která je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}. \quad (2.33)$$

Je-li rovnice (2.27) eliptická, nemá reálné charakteristiky.

Jsou-li  $\varphi(x, y) = \text{const}$  a  $\psi(x, y) = \text{const}$  implicitní popisy řešení obyčejných diferenciálních rovnic (2.32), tedy charakteristik hyperbolické rovnice (2.27), pak

$$-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \quad \text{a} \quad -\frac{\psi_x}{\psi_y}$$

jsou kořeny charakteristické rovnice (2.31), takže v (2.30) dostaneme  $a = c = 0$ . *Kanonický tvar hyperbolické rovnice (2.27)* je

$$u_{\xi\eta} = \tilde{F}_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

### Příklad

Uvažujme rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.34)$$

V této rovnici je  $A(x, y) = x^2$ ,  $B(x, y) = 0$ ,  $C(x, y) = -y^2$ . To znamená, že pro každou dvojici  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  takovou, že  $xy \neq 0$ , platí

$$B(x, y)^2 = 0 > -x^2 y^2 = A(x, y)C(x, y)$$

a rovnice je tedy hyperbolická na vnitřku každého z kvadrantů.

Charakteristická rovnice příslušná k rovnici (2.34) je tvaru

$$x^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 = 0.$$

Z ní vyjádříme derivaci a dostaneme dvě explicitní rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{x},$$

které mají separované proměnné a jejich řešení jsou implicitně dána rovnostmi

$$\ln |y| \mp \ln |x| = \text{const}.$$

Charakteristiky tedy splňují rovnosti

$$\varphi(x, y) = xy = \text{const}, \quad \psi(x, y) = \frac{y}{x} = \text{const}.$$

Zavedeme proto nové nezávislé proměnné  $\xi, \eta$  vztahy

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}. \quad (2.35)$$

Uvnitř prvního kvadrantu je  $x > 0$ ,  $y > 0$  a pro tyto hodnoty je také  $\xi > 0$ ,  $\eta > 0$ . Transformace (2.35) tedy převádí vnitřek prvního kvadrantu na sebe. Inverzní transformace je dána rovnostmi

$$x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \quad y = \sqrt{\xi\eta}.$$

Dále platí

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = y = \sqrt{\xi\eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = -\eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{\eta}{\xi}},$$

takže podle řetězového pravidla je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \sqrt{\xi\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sqrt{\xi\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sqrt{\xi\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\xi\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\eta}{\xi} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \eta \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \right) \sqrt{\xi\eta} + \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\xi\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \eta \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \left( -\eta \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \right) = \\ &= \xi\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta^3}{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\eta^2}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\xi\eta}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2\xi} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \right) \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} + \\ &\quad + \left( -\frac{1}{2\eta} \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\xi\eta}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} = \\ &= \frac{\xi}{\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (2.34)

$$\frac{\xi}{\eta} \left( \xi\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta^3}{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\eta^2}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \xi\eta \left( \frac{\xi}{\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = 0$$

a upravíme

$$\begin{aligned} -4\xi\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$



Tato rovnice je kanonickým tvarem dané rovnice (2.34). Zavedeme v ní substituci  $v = \frac{\partial u}{\partial \eta}$  a dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2\xi}v.$$

Tuto parciální diferenciální rovnici můžeme považovat za obyčejnou, neboť se v ní objevuje jediná derivace podle proměnné  $\xi$ . Řešení této obyčejné lineární homogenní rovnice je  $v = \sqrt{\xi}\phi(\eta)$ ; přitom  $\phi$  je „integrační konstanta“, která nezávisí na proměnné  $\xi$ , ale může záviset na proměnné  $\eta$ . Dostáváme tak rovnost

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sqrt{\xi}\phi(\eta),$$

kteřou zintegrujeme podle proměnné  $\eta$  a dostaneme

$$u = \sqrt{\xi}\Phi(\eta) + \Psi(\xi).$$

Funkce  $\Phi$  je primitivní k funkci  $\phi$  a funkce  $\Psi$  je „integrační konstanta“, která může záviset na nezávisle proměnné  $\xi$ .

Návratem k původním proměnným dostaneme obecné řešení rovnice (2.34) ve tvaru

$$u(x, y) = \sqrt{xy}\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy);$$

přitom  $\Phi, \Psi$  jsou libovolné dvakrát diferencovatelné funkce jedné proměnné. ■

Je-li rovnice (2.27) parabolická, pak je  $B^2 = AC$ . Pokud je v tomto případě řešení rovnice (2.33) implicitně zapsáno rovností  $\psi(x, y) = \text{const}$ , pak v rovnostech (2.30) dostaneme  $c = 0$  a platí

$$-\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{B}{A}, \quad \text{tj. } \psi_x = -\frac{B}{A}\psi_y$$

Je-li tedy  $\varphi(x, y)$  libovolná funkce nezávislá na funkci  $\psi$ , pak v rovnostech (2.30) dostaneme

$$b = -B\varphi_x\psi_y + B\left(\varphi_x\psi_y - \frac{B}{A}\varphi_y\psi_y\right) + C\varphi_y\psi_y = \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\varphi_y\psi_y = \frac{AC - B^2}{A}\varphi_y\psi_y = 0.$$

Většinou stačí volit  $\varphi(x, y) = x$  nebo  $\varphi(x, y) = y$ . Kanonický tvar parabolické rovnice (2.27) je

$$u_{\xi\xi} = \tilde{F}_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

### Příklad

Uvažujme rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

V této rovnici je  $A(x, y) = x^2$ ,  $B(x, y) = -xy$ ,  $C(x, y) = y^2$ , takže

$$B(x, y)^2 = x^2 y^2 = A(x, y)C(x, y)$$

a rovnice je parabolická. Příslušná charakteristická rovnice je tvaru

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

(pozor na znaménko koeficientu u první derivace). Z charakteristické rovnice vyjádříme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Tato obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými má řešení dané implicitně rovností  $xy = \text{const}$ . Zavedeme tedy nové nezávisle proměnné  $\xi, \eta$  vztahy

$$\xi = y, \quad \eta = xy.$$

Pak je

$$x = \frac{\eta}{\xi}, \quad y = \xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\eta}{\xi}$$

a dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \xi \frac{\partial u}{\partial \eta}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \xi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \xi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta^2}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice a úpravě dostaneme kanonický tvar dané rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Tuto rovnici můžeme považovat za obyčejnou diferenciální rovnici, neboť se v ní vyskytují derivace podle jediné proměnné  $\xi$ . Položíme

$$v = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

a dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{1}{\xi} v.$$

Tato rovnice má řešení

$$v = \frac{1}{\xi} \Phi(\eta),$$

takže

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi} \Phi(\eta).$$

Integrací podle proměnné  $\xi$  dostaneme  $u = \Phi(\eta) \ln \xi + \Psi(\eta)$ . Návrat k původním proměnným dá řešení dané rovnice ve tvaru

$$u(x, y) = \Phi(xy) \ln y + \Psi(xy),$$

kde  $\Phi$  a  $\Psi$  jsou dvakrát diferencovatelné funkce jedné proměnné. ■

## 2.2 Lineární parabolická rovnice s konstantními koeficienty

Budeme se zabývat *lineární parabolickou rovnicí ve dvou nezávisle proměnných s konstantními koeficienty*, která je tvaru

$$A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2AC \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y), \quad (2.36)$$

kde  $A, C, D, E, F$  jsou reálné konstanty takové, že  $|A| + |C| > 0$ . Pokud je funkce  $f$  na pravé straně rovnice nulová, mluvíme o *homogenní* rovnici, v opačném případě o *nehomogenní*. Rovnice (2.36) je parabolická v celé rovině  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.2.1 Kanonický tvar

Charakteristická rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C}{A}$$

příslušná k rovnici (2.36) má řešení implicitně dané rovností  $Cx - Ay = \text{const.}$  Transformace nezávisle proměnných

$$\xi = x, \quad \eta = Cx - Ay$$

převede rovnici (2.36) na tvar

$$A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + D \frac{\partial u}{\partial \xi} + (CD - AE) \frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = f(\xi, \eta) \quad (2.37)$$

(symboly  $f(x, y)$  a  $f(\xi, \eta)$  chápeme jako obrazy bodu, který má v původní soustavě souřadnice  $(x, y)$  a v transformované  $(\xi, \eta)$ , nikoliv jako předpisy pro výpočet funkční hodnoty).

Je-li  $CD = AE$ , můžeme rovnici (2.37) považovat za obyčejnou – na hledanou funkci  $u$  se dívat jako na funkci jedné nezávisle proměnné  $\xi$  s parametrem  $\eta$ . Je to lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, tedy rovnice řešitelná v kvadraturách.

Předpokládejme, že  $CD \neq AE$  a označme

$$a = \frac{A^2}{CD - AE}, \quad b = \frac{D}{CD - AE}, \quad c = \frac{F}{CD - AE}, \quad \tilde{f}(\xi, \eta) = \frac{f(\xi, \eta)}{CD - AE}.$$

Rovnici (2.37) tedy přepíšeme ve tvaru

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = \tilde{f}(\xi, \eta). \quad (2.38)$$

Tuto rovnici ještě dále upravíme. Zavedeme novou neznámou funkci  $v = v(\xi, \eta)$  vztahem

$$v(\xi, \eta) = \exp\left(\frac{b}{2a}\xi + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\eta\right) u(\xi, \eta).$$

Pak platí

$$\begin{aligned} u &= v \exp\left(-\frac{b}{2a}\xi - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\eta\right), \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{b}{2a}v\right) \exp\left(-\frac{b}{2a}\xi - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\eta\right), \\ \frac{\partial u}{\partial \xi^2} &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{b}{2a}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{b^2}{4a^2}v\right) \exp\left(-\frac{b}{2a}\xi - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\eta\right), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)v\right) \exp\left(-\frac{b}{2a}\xi - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\eta\right). \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (2.38) a snadné úpravě dostaneme rovnici pro neznámou funkci  $v$  ve tvaru

$$a \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(\xi, \eta), \quad (2.39)$$

kde  $g(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi, \eta) \exp\left(\frac{b}{2a}\xi + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\eta\right)$ .

Rovnici (2.39), v níž se vyskytuje jediný parametr  $a$  prohlásíme za *kanonický tvar lineární parabolické parciální diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty*.

## 2.3 Evoluční rovnice (rovnice difúze, rovnice vedení tepla)

Evoluční parciální diferenciální rovnice je taková, v níž jednu z nezávisle proměnných interpretujeme jako čas.

Budeme se nyní zabývat rovnicemi, v nichž je derivace hledané funkce podle času prvního řádu. Uvažujme tedy lineární homogenní parabolickou evoluční parciální diferenciální rovnici s konstantním koeficientem v kanonickém tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.40)$$

Snadno ověříme, že tato rovnice splňuje princip superpozice, tj. funkce  $u \equiv 0$  je jejím řešením a lineární kombinace jejich řešení je řešením. Vskutku, jsou-li funkce  $u_1 = u_1(t, x)$ ,  $u_2 = u_2(t, x)$  takové, že

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

a  $c_1, c_2$  jsou libovolné konstanty, pak

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + c_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = c_1 \alpha \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_2 \alpha \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_1 u_1 + c_2 u_2).$$

Znaménko koeficientu  $\alpha$  souvisí se „směrem plynutí času“. Vyjádříme to poněkud přesněji: Uvažujme čas  $\tau$ , který „plyne opačným směrem“, tj.  $\tau = -t$ . Pak

$$\frac{d\tau}{dt} = -1 = \frac{dt}{d\tau}.$$

Pro řešení  $u = u(t, x)$  rovnice (2.40) platí

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

To znamená, že změna znaménka konstanty  $\alpha$  představuje nahrazení času plynoucího z přítomnosti do budoucnosti časem plynoucím z přítomnosti do minulosti.

Dále se budeme věnovat pouze rovnicím s kladným koeficientem  $\alpha$ . Můžeme ho proto psát ve tvaru druhé mocniny. Jinak řečeno, budeme se věnovat rovnici difúze neboli rovnici vedení tepla, sr. (2.11).

Řešení rovnice jsme dosud chápali v obvyklém intuitivním významu: řešením rovnice je funkce, která tuto rovnici splňuje ve všech bodech svého definičního oboru. Toto pojetí nejprve mírně rozšíříme. Za řešení homogenní evoluční parabolické rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.41)$$

pro  $t > 0$  a  $x \in J$ , kde  $J$  je nějaký otevřený interval reálných čísel, budeme považovat funkci  $u = u(t, x)$  definovanou na množině  $H = (0, \infty) \times J$ , která splňuje rovnici pro skoro všechna  $(t, x) \in H$ . Podrobněji řečeno, první derivace funkce  $u$  podle času a druhá derivace funkce  $u$  podle proměnné  $x$  jsou integrovatelné na každé kompaktní podmnožině množiny  $H$  (zejména tedy množina bodů, v nichž některá z derivací neexistuje, má míru nula) a pro každou dvojici intervalů  $(t_1, t_2) \subseteq (0, \infty)$ ,  $(\alpha, \beta) \subseteq J$  platí

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right) dx dt = 0.$$

Řešení nehomogenní evoluční parabolické rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad (2.42)$$

zavádíme analogicky.

Řešení evoluční parabolické rovnice s počáteční podmínkou

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (2.43)$$

pro  $x \in J$  je takové řešení  $u = u(t, x)$ , že

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \varphi(x)$$

pro skoro všechna  $x \in J$ .

### 2.3.1 Nehomogenní rovnice

Nehomogenní rovnici (2.42) s nulovou počáteční podmínkou

$$u(0, x) = 0 \quad (2.44)$$

můžeme interpretovat jako popis změny teploty v dlouhé tenké tyči, která měla na počátku teplotu nulovou a je v každém čase  $t > 0$  a každém bodě  $x \in J$  zahřívána nějakým zdrojem s „intenzitou“  $f(t, x)$ . Tato představa napovídá, že teplota tyče v čase  $t$  je určena množstvím tepla, které se v ní ze zdroje naskládalo, nasčítalo, naintegrovalo za časový interval od 0 do  $t$ . Trochu přesněji řečeno, budeme předpokládat, že řešení takové počáteční úlohy je dáno integrálem

$$u(t, x) = \int_0^t w(t, x, \sigma) d\sigma, \quad (2.45)$$

kde  $w$  je nějaká, zatím neznámá funkce tří proměnných. Tato myšlenka je známa jako *Duhamelův princip*. Funkce  $u$  definovaná rovností (2.45) splňuje počáteční podmínku (2.44). Dále pro ni platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t w(t, x, \sigma) d\sigma = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x, \sigma) d\sigma,$$

a podle věty o derivaci integrálu závislého na parametru platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t w(t, x, \sigma) d\sigma = w(t, x, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t, x, \sigma) d\sigma.$$

Po dosazení do rovnice (2.42) dostaneme

$$w(t, x, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t, x, \sigma) d\sigma = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x, \sigma) d\sigma + f(t, x)$$

a po snadné úpravě

$$\int_0^t \left( \frac{\partial w}{\partial t}(t, x, \sigma) - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x, \sigma) \right) d\sigma = f(t, x) - w(t, x, t).$$

Z této rovnosti vidíme, že za funkci  $w$  ve vyjádření (2.45) řešení úlohy (2.42), (2.44) můžeme dosadit funkci  $w = w(t, x, \sigma)$  chápanou jako funkci nezávisle proměnných  $t$  a  $x$ , s jedním parametrem  $\sigma$ , která při jakékoliv hodnotě tohoto parametru  $\sigma$  splňuje rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x, \sigma) &= a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x, \sigma), & \text{pro } t > \sigma \text{ a } x \in J, \\ w(\sigma, x, \sigma) &= f(\sigma, x), & \text{pro } x \in J. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Zdůrazněme ještě, že z provedených úvah nijak neplyne, že by řešení úlohy (2.42), (2.44) nutně muselo mít tvar daný rovností (2.45) a dále rovnostmi (2.46). Pouze jsme ukázali, že pokud bude funkce  $w$  splňovat rovnosti (2.46), pak funkce (2.45) je řešením úlohy (2.42), (2.44). Proto vystává otázka, zda neexistuje i nějaké jiné řešení úlohy (2.42), (2.44). Problematice jednoznačnosti řešení se nebudeme věnovat obecně, ale až později pro rovnice s různými speciálními doplňujícími podmínkami.

Nehomogenní rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.43) má řešení  $u = u(t, x)$ , které je tvaru

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x), \quad (2.47)$$

kde funkce  $v$  je řešením homogenní rovnice (2.41) s počáteční podmínkou (2.43) a funkce  $w$  je řešením nehomogenní rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.44). Jinak řečeno, řešení počáteční úlohy pro nehomogenní rovnici je součtem řešení homogenní rovnice s původní počáteční podmínkou a nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou. Vskutku,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + \frac{\partial}{\partial t} w(t, x) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t, x) + f(t, x) + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x) = \\ &= a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v(t, x) + w(t, x)) + f(t, x) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x), \\ u(0, x) &= v(0, x) + w(0, x) = \varphi(x) + 0 = \varphi(x) \end{aligned}$$

a funkce  $u = v + w$  tedy splňuje rovnici (2.42) i počáteční podmínku (2.43).

### 2.3.2 Parabolická rovnice na kružnici

Budeme řešit nehomogenní parabolickou rovnici (2.42) pro  $t > 0$  a  $x \in \mathbb{R}$  s počáteční podmínkou (2.43). O počáteční funkci  $\varphi$  a „prostorové části“ nehomogenity  $f(t, \cdot)$  budeme předpokládat, že mají stejnou periodu  $\ell$ . Budeme požadovat, aby řešení splňovalo periodickou podmínku (2.21). Obor prostorové proměnné  $x$  tedy můžeme chápat jako kružnici délky  $\ell$ , tj. kružnici o poloměru  $\ell/(2\pi)$ .

Takto formulovanou úlohu lze interpretovat jako model difúze v trubici délky  $\ell$  stočené do prstence.

Víme, že každou po částech spojitou funkci  $\varphi$  s periodou  $\ell$  můžeme vyjádřit jako trigonometrickou Fourierovu řadu

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right),$$

kde

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \psi(\xi) \cos \frac{2k\pi}{\ell} \xi d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{2k\pi}{\ell} \xi d\xi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Řešení úlohy budeme hledat ve tvaru Fourierovy řady. Tento postup se nazývá *metoda Fourierových řad*.

Nechť tedy pro skoro všechna  $x \in \mathbb{R}$  a všechna  $t > 0$  platí

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\Phi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \Phi_k \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + \Psi_k \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right), \\ f(t, x) &= \frac{F_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( F_k(t) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + H_k(t) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right), \end{aligned}$$

kde

$$\Phi_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(\xi) \cos \frac{2k\pi}{\ell} \xi d\xi, \quad F_k(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(t, \xi) \cos \frac{2k\pi}{\ell} \xi d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.48)$$

$$\Psi_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(\xi) \sin \frac{2k\pi}{\ell} \xi d\xi, \quad H_k(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(t, \xi) \sin \frac{2k\pi}{\ell} \xi d\xi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

Řešení úlohy (2.42), (2.43), (2.21) má být periodické v prostorové proměnné  $x$ , hledáme ho tedy ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k(t) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + b_k(t) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right), \quad (2.50)$$

kde  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  jsou zatím neurčené funkce jedné proměnné. Platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{a'_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a'_k(t) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + b'_k(t) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2k\pi}{\ell} \right)^2 \left( a_k(t) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + b_k(t) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right);$$

symbol  $'$  přitom označuje obyčejnou derivaci podle proměnné  $t$ .

Uvedené řady formálně dosadíme do rovnice (2.42) a počáteční podmínky (2.43),

$$\begin{aligned} \frac{a'_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( a'_k(t) + \left( \frac{2k\pi a}{\ell} \right)^2 a_k(t) \right) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + \left( b'_k(t) + \left( \frac{2k\pi a}{\ell} \right)^2 b_k(t) \right) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right] = \\ = \frac{F_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( F_k(t) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + H_k(t) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right), \end{aligned}$$

$$\frac{a_0(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k(0) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + b_k(0) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right) = \frac{\Phi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \Phi_k \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + \Psi_k \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right).$$

Věta o jednoznačnosti Fourierových řad říká, že rovnají-li se součty dvou Fourierových řad, pak se rovnají také jejich koeficienty. Odtud plyne, že pro funkce  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  musí platit

$$a'_0(t) = F_0(t), \quad a_0(0) = \Phi_0,$$

$$a'_k(t) + \left( \frac{2k\pi a}{\ell} \right)^2 a_k(t) = F_k(t), \quad a_k(0) = \Phi_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$b'_k(t) + \left( \frac{2k\pi a}{\ell} \right)^2 b_k(t) = H_k(t), \quad b_k(0) = \Psi_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

To jsou počáteční úlohy pro obyčejné lineární diferenciální rovnice. Jejich řešení je

$$a_k(t) = \Phi_k e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} + \int_0^t F_k(s) e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 (t-s)} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k(t) = \Psi_k e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} + \int_0^t H_k(s) e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 (t-s)} ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Tyto funkce dosadíme do tvaru (2.50) řešení dané úlohy. Po úpravě dostaneme

$$u(t, x) = \frac{\Phi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \left( \Phi_k \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + \Psi_k \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right) + \int_0^t \left( \frac{F_0(\sigma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\sigma)} \left( F_k(\sigma) \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + H_k(\sigma) \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right) \right) d\sigma.$$

Výsledek vyjádříme jen pomocí objektů, které jsou v zadání úlohy, tj. konstanty  $a$  a funkcí  $\varphi, f$ . Jinak řečeno, do pravé strany předchozí rovnosti dosadíme vyjádření (2.48) a (2.49) koeficientů  $\Phi_k, \Psi_k$  a funkcí  $F_k, H_k$ . Po úpravě (přehození integrálu a sumace) dostaneme

$$u(t, x) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \left( \frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \left( \cos \frac{2k\pi}{\ell} \xi \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + \sin \frac{2k\pi}{\ell} \xi \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right) \right) d\xi + \int_0^t \left( \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) \left( \frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\sigma)} \left( \cos \frac{2k\pi}{\ell} \xi \cos \frac{2k\pi}{\ell} x + \sin \frac{2k\pi}{\ell} \xi \sin \frac{2k\pi}{\ell} x \right) \right) d\xi \right) d\sigma.$$

Tento výsledek ještě upravíme pomocí součtového vzorce na tvar

$$u(t, x) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \left( \frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \cos \frac{2k\pi}{\ell} (x - \xi) \right) d\xi + \int_0^t \left( \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) \left( \frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\sigma)} \cos \frac{2k\pi}{\ell} (x - \xi) \right) d\xi \right) d\sigma.$$

Dosažený výsledek lze zapsat v přehlednějším tvaru: Řešení úlohy (2.42), (2.43), (2.21) je dáno součtem integrálů

$$u(t, x) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \left( \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi \right) d\sigma, \quad (2.51)$$

kde funkce  $G : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  daná výrazem

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\ell} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \cos \frac{2k\pi}{\ell} (x - \xi) \right)$$

je tzv. *funkce vlivu okamžitého bodového zřídla* nebo *zdroje*<sup>2</sup>, stručně *zřídlová* nebo *zdrojová funkce*, také *Greenova funkce* nebo *fundamentální řešení*.

Řešení (2.51) dané úlohy vyšlo jako součet řešení homogenní rovnice (2.41) s nenulovou počáteční podmínkou (2.43) a řešení nehomogenní rovnice (2.42) s nulovou počáteční podmínkou (2.44); jedná se tedy o zvláštní případ obecného výsledku (2.47).

Ještě si povšimněme několika vlastností funkce  $G$ , které jsou bezprostředně evidentní, nebo je lze ověřit přímým výpočtem.

- Funkce  $G$  je spojitá na množině  $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ .
- Je symetrická v prvních dvou proměnných, tj.  $G(x, \xi, t) = G(\xi, x, t)$  pro všechny trojice  $(x, \xi, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ .

<sup>2</sup>Pokud rovnici (2.41) interpretujeme jako model vedení tepla v nějakém prstenci, pak funkce  $G(\cdot, \xi, t)$  udává rozložení teploty v časovém okamžiku  $t$ , vzniká-li v tomto okamžiku v bodě  $\xi$  jisté množství tepla.



- Funkce jedné proměnné  $G(\cdot, \xi, t)$  má spojité derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů  $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ .
- Funkce dvou proměnných  $G(\cdot, \xi, \cdot)$ , je pro všechna  $\xi \in \mathbb{R}$  řešením rovnice (2.41), které splňuje podmínku periodičnosti (2.21) pro každou hodnotu  $t > 0$ .
- Pro všechny hodnoty  $x, \xi \in \mathbb{R}$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, \xi, t) = \frac{1}{\ell}.$$

Z poslední uvedené vlastnosti funkce  $G$  plyne, že pro řešení  $u = u(t, x)$  homogenní parabolické rovnice (2.41) s počáteční podmínkou (2.43), které splňuje podmínku periodičnosti (2.21), platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) d\xi.$$

Řešení konverguje pro  $t \rightarrow \infty$  ke konstantní funkci. Pokud tedy úlohu (2.41), (2.43), (2.21) interpretujeme jako model difúze nějaké látky v uzavřeném prstenci délky  $\ell$ , dostáváme, že po dostatečně dlouhém čase se difundující látka stejnoměrně rozptýlí po prstenci a její lineární hustota bude podílem její celkové hmotnosti a délky prstence. To není nikterak překvapivý výsledek; ukazuje však, že se model chová realisticky.

### 2.3.3 Parabolická rovnice na přímce

Budeme hledat řešení homogenní rovnice (2.41) nebo rovnice nehomogenní (2.42), které je definováno na množině  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  a pro  $x \in \mathbb{R}$  splňuje počáteční podmínku (2.43). Navíc budeme požadovat, aby řešení splnilo podmínky

$$\int_{-\infty}^0 |u(t, x)| dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} |u(t, x)| dx < \infty \quad (2.52)$$

pro  $t > 0$ .

O počáteční funkci  $\varphi$  a o nehomogenitě  $f$  budeme předpokládat, že mají po částech spojitou derivaci a splňují podobné podmínky

$$\int_{-\infty}^0 |\varphi(x)| dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} |\varphi(x)| dx < \infty, \quad (2.53)$$

$$\int_{-\infty}^0 |f(t, x)| dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} |f(t, x)| dx < \infty, \quad \text{pro všechna } t \geq 0. \quad (2.54)$$

Jinak řečeno, funkce  $\varphi$ ,  $f(t, \cdot)$  a  $u(t, \cdot)$  jsou v definičním oboru Fourierovy transformace pro každou hodnotu  $t > 0$ ; viz Dodatek B.1.

### Homogenní rovnice s nenulovou počáteční podmínkou

Úlohu (2.41), (2.43), (2.52) můžeme podle předpokladu (2.53) nejprve transformovat na Fourierův obraz a pak hledat obraz (spektrum) jejího řešení. Tento způsob hledání řešení bývá nazýván *metoda Fourierovy transformace*.

Při transformaci úlohy čas  $t$  zafixujeme, budeme ho považovat za parametr. Fourierův obraz funkce  $u(t, \cdot)$  je komplexní funkce jedné reálné proměnné definovaná předpisem

$$\mathcal{F}(u(t, \cdot))(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) e^{-ix\xi} dx;$$

tuto hodnotu budeme stručně označovat symbolem  $\hat{u}(t, \xi)$ . Fourierův obraz derivace podle parametru  $t$  je

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, \cdot)\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} e^{-ix\xi} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) e^{-ix\xi} dx = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \xi).$$

Poněvadž Fourierova transformace převádí derivaci na násobení výrazem  $i\xi$  (sr. formuli (B.1) a její odvození), je Fourierův obraz druhé derivace funkce  $u(t, \cdot)$  roven

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, \cdot)\right)(\xi) = (i\xi)^2 \hat{u}(t, \xi) = -\xi^2 \hat{u}(t, \xi).$$

Fourierův obraz rovnice (2.41) a počáteční podmínky (2.43) je tedy tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \xi) = -a^2 \xi^2 \hat{u}(t, \xi), \quad \hat{u}(0, \xi) = \hat{\varphi}(\xi), \quad (2.55)$$

kde  $\hat{\varphi}$  je Fourierův obraz počáteční funkce  $\varphi$ .

Nyní budeme na chvíli považovat proměnnou  $\xi$  za parametr a čas  $t$  za nezávisle proměnnou, tj. na rovnosti (2.55) se budeme dívat jako na počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici, kde hledanou funkcí je funkce  $\hat{u}(\cdot, \xi)$ . Jedná se o úlohu pro lineární homogenní rovnici s konstantním koeficientem, její řešení je dáno formulí

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}.$$

To je současně Fourierův obraz řešení počáteční úlohy (2.41), (2.43). Označme ještě

$$\hat{g}(t, \xi) = e^{-a^2 \xi^2 t} \quad (2.56)$$

a Fourierův obraz řešení úlohy (2.41), (2.43) dostáváme ve tvaru

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(\xi) \hat{g}(t, \xi).$$

Vzhledem k souvislosti Fourierovy transformace a konvoluce funkcí (B.3) můžeme nyní řešení úlohy (2.41), (2.43) zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = (\varphi * g(t, \cdot))(x). \quad (2.57)$$

Reálná funkce  $g(t, \cdot)$  je vzorem spektrální funkce  $\hat{g}(t, \cdot)$  dané formulí (2.56). Získáme ji tedy inverzní Fourierovou transformací (B.2):

$$g(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi.$$

Pravou stranu nejprve upravíme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} \cos x\xi d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} \sin x\xi d\xi \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} \cos x\xi d\xi,$$

neboť integrovaná funkce v imaginární části je lichá a integrovaná funkce v reálné části je sudá. Ve výsledném integrálu zavedeme substituci a označení

$$\eta = \sqrt{a^2 t} \xi, \quad q = \frac{x}{\sqrt{a^2 t}}.$$

Dostaneme

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} \cos x \xi d\xi = \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cos q \eta d\eta.$$

Poslední integrál označíme  $I(q)$ . Tedy

$$I(q) = \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cos q \eta d\eta,$$

zejména pro  $q = 0$  platí

$$\begin{aligned} I(0)^2 &= \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \iint_{[0, \infty)^2} e^{-\eta^2 - \xi^2} d\eta d\xi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\phi = \\ &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (-2r e^{-r^2}) dr \right) = -\frac{\pi}{4} [e^{-r^2}]_{r=0}^{\infty} = \frac{\pi}{4}, \text{ tj. } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \end{aligned}$$

při výpočtu dvojného integrálu jsme použili transformaci do polárních souřadnic. Dále derivováním podle parametru  $q$  obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} I(q) &= \frac{d}{dq} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cos q \eta d\eta = \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} (-\eta \sin q \eta) d\eta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (-2\eta e^{-\eta^2}) \sin q \eta d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \left( [e^{-\eta^2} \sin q \eta]_{\eta=0}^{\infty} - q \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cos q \eta d\eta \right) = -\frac{q}{2} I(q). \end{aligned}$$

Integrál  $I(q)$  je tedy řešením počáteční úlohy pro obyčejnou lineární homogenní diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dq} I = -\frac{q}{2} I, \quad I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

to znamená, že

$$I(q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{q^2}{4}}.$$

Návratem k proměnné  $x$  dostaneme vyjádření funkce  $g$ ,

$$g(t, x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} I\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 t}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right). \quad (2.58)$$

Nyní můžeme uzavřít, že řešení počáteční úlohy (2.41), (2.43) je dáno formulí (2.57), kde funkce  $g$  je definována rovností (2.58), po dosazení tedy

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}\right) d\xi.$$

Pro zjednodušení zápisu ještě zavedeme funkci  $G$  (opět jí budeme říkat zřídlová funkce) předpisem

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}\right) \quad (2.59)$$

a řešení úlohy vyjádříme jako nevlastní integrál

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi. \quad (2.60)$$

Úlohu můžeme mírně zobecnit. Budeme hledat řešení rovnice (2.41) pro  $t > \sigma$  a  $x \in \mathbb{R}$ , kde  $\sigma$  je nějaké reálné číslo. Počáteční podmínku (2.43) v takovém případě nahradíme podmínkou

$$u(\sigma, x) = \varphi(x). \quad (2.61)$$

Nechť funkce  $u$  je řešením takové úlohy. Položíme

$$v(t, x) = u(t + \sigma, x).$$

Funkce  $v$  je tedy definovaná pro  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  a splňuje podmínky

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t + \sigma, x), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t + \sigma, x), \quad v(0, x) = u(\sigma, x) = \varphi(x).$$

To znamená, že funkce  $v$  je řešením úlohy (2.41), (2.43) a je tedy dána integrálem na pravé straně rovnosti (2.60). Poněvadž  $u(t, x) = v(t - \sigma, x)$ , je řešení rovnice (2.41) na množině  $t \geq \sigma$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , které splňuje počáteční podmínku (2.61) dáno nevlastním integrálem

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi. \quad (2.62)$$

### Nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou

Podle 2.3 má rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.44) řešení tvaru (2.45) a funkce  $w$  je řešením úlohy (2.46) s  $J = (-\infty, \infty)$ . Podle předpokladu (2.54) a výpočtů v předchozí části, konkrétně podle vztahu (2.62), je funkce  $w$  splňující rovnosti (2.46) dána nevlastním integrálem

$$w(t, x, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi.$$

Dosazením takto definované funkce  $w$  do vztahu (2.45) dostaneme řešení úlohy pro nehomogenní rovnici (2.42) s nulovou počáteční podmínkou (2.44) ve tvaru dvojnásobného integrálu

$$u(t, x) = \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi \right) d\sigma, \quad (2.63)$$

kde funkce  $G$  je definována předpisem (2.59).

### Nehomogenní rovnice s nenulovou počáteční podmínkou

Uvažujme nehomogenní rovnici (2.42) s počáteční podmínkou (2.43) takovou, že funkce  $\varphi$  splňuje podmínky (2.53). Takto formulovaná úloha má podle 2.3 řešení  $u = u(t, x)$  tvaru (2.47), kde funkce  $v$  je řešením homogenní rovnice (2.41) s počáteční podmínkou (2.43) a funkce  $w$  je řešením

nehomogenní rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.44). Podle předchozích výsledků je funkce  $v$  dána nevlastním integrálem na pravé straně rovnosti (2.60), funkce  $w$  je dána dvojnásobným integrálem na pravé straně rovnosti (2.63). Celkem tak dostáváme, že řešení počáteční úlohy (2.42), (2.43) je dáno součtem

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)G(x, \xi, t)d\xi + \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \xi)G(x, \xi, t - \sigma)d\xi \right) d\sigma, \quad (2.64)$$

kde funkce  $G$  je definována předpisem (2.59).

Ještě ukážeme, že toto řešení počáteční úlohy (2.42), (2.43) je jediné ve třídě funkcí, jejichž „prostorová část“  $u(t, \cdot)$  je v definičním oboru Fourierovy transformace. Předpokládejme proto, že funkce  $u_1 = u_1(t, x)$  a  $u_2 = u_2(t, x)$  jsou dvě řešení počáteční úlohy splňující podmínky pro Fourierovu transformaci. Položme  $u = u_1 - u_2$ . Pak funkce  $u$  je ze stejné třídy funkcí a splňuje rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t, x) = \\ &= a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x) + f(t, x) - \left( a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t, x) + f(t, x) \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \end{aligned}$$

$$u(0, x) = u_1(0, x) - u_2(0, x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0,$$

takže funkce  $u = u(t, x)$  je řešením úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{pro } t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = 0, \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Přitom je funkce  $u(t, \cdot)$  v definičním oboru Fourierovy transformace. Z výpočtů provedených dříve plyne, že tato funkce  $u$  je definována formulí (2.60) s  $\varphi \equiv 0$ , tedy  $u \equiv 0$ . To znamená, že funkce  $u_1$  a  $u_2$  splývají na svém definičním oboru.

### Příklad

Najdeme řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru$$

na oblasti  $\{(t, x) : t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ , které splňuje počáteční podmínku

$$u(0, x) = \begin{cases} \alpha, & |x| < \frac{1}{2}\varepsilon, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde  $\varepsilon > 0$ .

Nejprve se zbavíme reakčního členu  $ru$  na pravé straně rovnice tak, že zavedeme novou neznámou funkci  $v = v(t, x)$  vztahem

$$v(t, x) = e^{-rt}u(t, x),$$

tj. provedeme speciální případ transformace rovnice na kanonický tvar uvedené v 2.2.1. Pak je

$$u(t, x) = e^{rt}v(t, x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \left( \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + rv(t, x) \right) e^{rt}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)e^{rt}$$

a po dosazení do rovnice dostaneme

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + rv(t, x) \right) e^{rt} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)e^{rt} + rv(t, x)e^{rt}.$$

Výraz  $e^{rt}$  je nenulový, proto ho můžeme vykrátit. Funkce  $v$  je tedy řešením homogenní rovnice

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

s počáteční podmínkou

$$v(0, x) = u(0, x)e^{r \cdot 0} = \begin{cases} \alpha, & |x| < \frac{1}{2}\varepsilon, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podle (2.60) a (2.59) je funkce  $v$  dána integrálem

$$v(t, x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\frac{1}{2}\varepsilon}^{\frac{1}{2}\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Zavedeme v něm substituci

$$\eta = \frac{x - \xi}{\sqrt{2a^2 t}}, \quad d\xi = -\sqrt{2a^2 t} d\eta.$$

Pak je

$$v(t, x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{2x-\varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}}}^{\frac{2x+\varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta = \alpha \left[ \Phi \left( \frac{2x + \varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}} \right) - \Phi \left( \frac{2x - \varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}} \right) \right],$$

kde  $\Phi$  je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Dostáváme tak řešení dané úlohy  $u(t, x) = e^{rt}v(t, x)$ , tj.

$$u(t, x) = \alpha \left[ \Phi \left( \frac{2x + \varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}} \right) - \Phi \left( \frac{2x - \varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}} \right) \right] e^{rt}.$$

V počáteční podmínce nyní zvolíme speciálně  $\alpha = \frac{A}{\varepsilon}$ . Pak je

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(0, x) dx = \frac{A}{\varepsilon} \int_{-\frac{1}{2}\varepsilon}^{\frac{1}{2}\varepsilon} dx = A$$

pro každé  $\varepsilon > 0$ . Pokud tedy danou rovnici interpretujeme jako model autokatalytické reakce (rychlost tvorby reagující látky je úměrná jejímu množství) a difúze, je počáteční množství difundující látky rovno  $A$  a toto množství je koncentrováno v malém okolí počátku, na intervalu délky  $\varepsilon$ . Pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  proto můžeme počáteční funkci považovat za distribuci, tj. zobecněnou funkci, konkrétně za  $A$ -násobek Diracovy distribuce. Dále platí

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A}{\varepsilon} \left[ \Phi \left( \frac{2x + \varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}} \right) - \Phi \left( \frac{2x - \varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}} \right) \right] &= \\ &= \frac{A}{\sqrt{2a^2 t}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi \left( \frac{x}{\sqrt{2a^2 t}} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}} \right) - \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{2a^2 t}} - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2a^2 t}} \right)}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2a^2 t}}} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2a^2 t}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\Phi \left( \frac{x}{\sqrt{2a^2 t}} + \frac{\eta}{2} \right) - \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{2a^2 t}} - \frac{\eta}{2} \right)}{\eta} = \frac{A}{\sqrt{2a^2 t}} \Phi' \left( \frac{x}{\sqrt{2a^2 t}} \right), \end{aligned}$$

a poněvadž derivace distribuční funkce normovaného normálního rozložení pravděpodobnosti je hustotou tohoto rozdělení, dostáváme řešení dané úlohy pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{A}{\sqrt{2a^2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 2a^2t}} e^{rt} = \frac{A}{2\sqrt{a^2\pi t}} e^{rt - \frac{x^2}{4a^2t}}. \quad (2.65)$$

Pro  $r = 0$  dostáváme řešení ve stejném tvaru, jaký mělo „uhodnuté“ řešení (2.26) úlohy (2.22), (2.24).

Podívejme se ještě na interpretaci získaného výsledku. Funkce  $u$  daná rovností (2.65) je kladná pro každé  $t > 0$  a každé  $x \in \mathbb{R}$ . Jinak řečeno, za libovolně krátký čas a v libovolně velké vzdálenosti od počátku je koncentrace difundující látky nenulová. To by znamenalo, že nějaké částice látky se pohybují nekonečnou rychlostí, což samozřejmě není fyzikálně možné. Toto pozorování ukazuje, že zjednodušující předpoklady přijaté při vytváření modelu vedou k jeho neadekvátnosti. Fyzikální nesprávnost modelu je však jen teoretická. Vzhledem k tomu, že exponenciální funkce  $e^{x^2}$  s rostoucí hodnotou  $x$  velice rychle klesá k nule, je nenulová koncentrace v dostatečné vzdálenosti od počátku prakticky nedetekovatelná.

Pokusme se stanovit pozorovatelnou rychlost, jakou se v prostředí šíří difundující látka vznikající autokatalytickou reakcí. Nechť  $\delta$  označuje minimální koncentraci látky, kterou lze v prostředí detekovat, a  $R = R(t)$  časově závislou vzdálenost od počátku, v níž je koncentrace rovna hodnotě  $\delta$ , tj.  $u(t, R(t)) = \delta$ . Dosazením do (2.65) dostaneme

$$\delta = \frac{Ae^{rt}}{2\sqrt{a^2\pi t}} \exp\left(-\frac{R(t)^2}{4a^2t}\right).$$

Z této rovnice vyjádříme

$$\frac{R(t)^2}{t^2} = 4a^2r - \frac{2a^2}{t} \ln \frac{4\pi a^2 \delta^2 t}{A^2}$$

a dále

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{R(t)}{t}\right)^2 = 4a^2r.$$

Odtud plyne, že pro dostatečně velký čas  $t$  je

$$R(t) \approx 2\sqrt{a^2r t}, \quad (2.66)$$

což znamená, že pozorovatelná rychlost šíření látky je přibližně konstantní a rovna  $2\sqrt{a^2r}$ . ■

### Vlastnosti zřídlové funkce

Funkce  $G : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  definovaná vztahem (2.59) má evidentně následující vlastnosti:

- Je spojitá na svém definičním oboru.
- Je symetrická v prvních dvou proměnných, tj.  $G(x, \xi, t) = G(\xi, x, t)$  pro všechny trojice  $(x, \xi, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ .
- Funkce  $G(\cdot, \xi, t)$  (tj. funkce  $G$  chápaná jako funkce jedné proměnné  $x$  se dvěma parametry  $\xi$  a  $t$ ) má spojitě derivace druhého řádu pro všechny hodnoty  $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ .
- Funkce  $G(\cdot, \xi, \cdot)$  je pro všechna  $\xi \in \mathbb{R}$  řešením rovnice (2.41), které splňuje podmínky integrovatelnosti

$$\int_{-\infty}^0 |G(x, \xi, t)| dx < \infty, \quad \int_0^{-\infty} |G(x, \xi, t)| dx < \infty$$

pro každou hodnotu  $t$ .

- Pro jakékoliv hodnoty  $\xi \in \mathbb{R}$  a  $t > 0$  platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, \xi, t) = 0$ .
- Funkce jedné proměnné  $G(0, \cdot, t)$  je pro jakoukoliv hodnotu  $t$  sudá.
- Funkce jedné proměnné  $\frac{\partial G}{\partial x}(0, \cdot, t)$ , tj. funkce daná předpisem

$$\frac{\partial G}{\partial x}(0, \xi, t) = \frac{\xi}{4\sqrt{\pi(a^2t)^3}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)$$

je lichá pro jakoukoliv hodnotu  $t$ .

Z posledních dvou vlastností, z toho, že součin sudé a liché funkce je funkce lichá a že integrál z liché funkce na intervalu symetrickém kolem nuly je roven nule, plyne:

**Tvrzení 4.** Jsou-li  $\psi, \chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ohraničené funkce integrabilní na každém kompaktním intervalu, přičemž funkce  $\psi$  je lichá a funkce  $\chi$  je sudá, pak pro funkce  $v, w$  definované vztahy

$$v(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)G(x, \xi, t)d\xi, \quad w(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi)G(x, \xi, t)d\xi$$

platí

$$v(t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)G(0, \xi, t)d\xi = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi)\frac{\partial G}{\partial x}(0, \xi, t)d\xi = 0.$$

### 2.3.4 Parabolická rovnice na polopřímce

Budeme hledat řešení nehomogenní parabolické rovnice (2.42) definované na oboru  $[0, \infty) \times [0, \infty)$ , které splňuje podmínku integrovatelnosti

$$\int_0^{\infty} |u(t, x)|dx < \infty \quad (2.67)$$

a pro každé  $x > 0$  počáteční podmínku (2.43). O počáteční funkci  $\varphi$  a nehomogenitě  $f$  budeme předpokládat, že splňují „pravou“ část podmínek integrovatelnosti (2.53) a (2.54). K řešení těchto úloh využijeme výsledky získané při řešení parabolických rovnic na přímce metodou Fourierovy transformace v 2.3.3.

#### Úlohy s nulovou okrajovou podmínkou

Budeme požadovat, aby řešení úlohy (2.42), (2.43), (2.67) v levém krajním bodě intervalu  $[0, \infty)$  proměnné  $x$  splňovalo pro každou hodnotu  $t \geq 0$  Dirichletovu

$$u(t, 0) = 0 \quad (2.68)$$

nebo Neumannovu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.69)$$

nulovou (homogenní) podmínku.

Tvrzení 4 ukazuje, jak tyto úlohy řešit. Při řešení rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.43) pro  $x > 0$  a okrajovými podmínkami (2.67), (2.68) pro  $t > 0$  prodloužíme počáteční funkci  $\varphi$  a nehomogenitu  $f(t, \cdot)$  na celý interval  $(-\infty, \infty)$  tak, aby to byly funkce liché. Položíme tedy

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}, \quad \tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & x \geq 0, \\ -f(t, -x), & x < 0, \end{cases}, \text{ pro libovolné } t \geq 0.$$



Řešení úlohy (2.42), (2.43), (2.67), (2.68) je pak podle (2.64) dáno formulí

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi \right) d\sigma.$$

Tento výsledek ještě upravíme tak, aby ve vyjádření řešení byly pouze funkce vystupující v zadání úlohy, tj. „funkce bez vlnek“. Pro libovolnou ohraničenou lokálně integrovatelnou lichou funkci  $\psi$  platí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi &= - \int_{-\infty}^0 \psi(-\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^{\infty} \psi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi = \\ &= - \int_0^{\infty} \psi(\xi) G(x, -\xi, t) d\xi + \int_0^{\infty} \psi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi = \int_0^{\infty} \psi(\xi) (G(x, \xi, t) - G(x, -\xi, t)) d\xi. \end{aligned}$$

Poněvadž

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t) - G(x, -\xi, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left[ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{4a^2 t}\right) \left( \exp\frac{2x\xi}{4a^2 t} - \exp\frac{-2x\xi}{4a^2 t} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{4a^2 t}\right) \sinh\frac{x\xi}{2a^2 t}, \end{aligned}$$

můžeme řešení úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), & t > 0, \quad x > 0, \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x > 0, \\ u(t, 0) &= 0, \quad \int_0^{\infty} |u(t, x)| dx < \infty, & t > 0 \end{aligned}$$

psát ve tvaru

$$u(t, x) = \int_0^{\infty} \varphi(\xi) G_D(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \left( \int_0^{\infty} f(\sigma, \xi) G_D(x, \xi, t - \sigma) d\xi \right) d\sigma, \quad (2.70)$$

kde

$$G_D(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{4a^2 t}\right) \sinh\frac{x\xi}{2a^2 t}.$$

Analogickým postupem (funkce  $\varphi$  a  $f(t, \cdot)$  prodloužíme na interval  $(-\infty, \infty)$  tak, aby se z nich staly funkce sudé) odvodíme, že řešení úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), & t > 0, \quad x > 0, \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= 0, \quad \int_0^{\infty} |u(t, x)| dx < \infty, & t > 0, \end{aligned}$$

tj. úlohy s Neumannovou okrajovou podmínkou v levém krajním bodě, je tvaru

$$u(t, x) = \int_0^{\infty} \varphi(\xi) G_N(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \left( \int_0^{\infty} f(\sigma, \xi) G_N(x, \xi, t - \sigma) d\xi \right) d\sigma, \quad (2.71)$$

kde

$$G_N(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{4a^2 t}\right) \cosh \frac{x\xi}{2a^2 t}.$$

Snadno nahlédneme, že funkce  $G_D, G_N : (0, \infty)^3 \rightarrow [0, \infty)$  mají následující vlastnosti:

- Jsou spojité na svém definičním oboru.
- Jsou symetrické v prvních dvou proměnných.
- Funkce  $G_N(\cdot, \xi, t)$  a  $G_D(\cdot, \xi, t)$  mají spojité derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů  $(\xi, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ .
- Funkce  $G_D(\cdot, \xi, \cdot)$ , resp.  $G_N(\cdot, \xi, \cdot)$ , je pro všechna  $\xi \in (0, \infty)$  řešením rovnice (2.41), které splňuje okrajové podmínky (2.67) a (2.68), resp. (2.69), pro každou hodnotu  $t$ .
- Pro jakékoliv hodnoty  $x, \xi \geq 0$  platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} G_D(x, \xi, t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} G_N(x, \xi, t)$ .

### Úlohy s nenulovou okrajovou podmínkou

Budeme hledat řešení úlohy (2.42), (2.43), (2.67) na oboru  $[0, \infty) \times [0, \infty)$ , které navíc splňuje nenulovou (nehomogenní) Dirichletovu

$$u(t, 0) = \mu(t) \quad (2.72)$$

nebo Neumannovu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \nu(t) \quad (2.73)$$

podmínku; přitom  $\mu, \nu$  jsou nějaké funkce definované skoro všude na intervalu  $[0, \infty)$  a na tomto intervalu integrovatelné; funkce  $\mu$  je navíc skoro všude diferencovatelná. Řešení budeme hledat ve tvaru  $u(t, x) = U(t, x) + v(t, x)$ , kde funkce  $U$  je skoro všude diferencovatelná podle první proměnné a dvakrát diferencovatelná podle druhé a splňuje příslušnou okrajovou podmínku, funkce  $v$  je zatím neurčená. Pak platí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = U(0, x) + v(0, x).$$

Po dosazení do rovnice a počáteční podmínky

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t}, \quad v(0, x) = \varphi(x) - U(0, x)$$

dostaneme, že funkce  $v = v(t, x)$  je řešením úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{f}(t, x), & t > 0, \quad x > 0, \\ v(0, x) &= \tilde{\varphi}(x), & x > 0 \end{aligned}$$

s nulovou Dirichletovou nebo Neumannovou podmínkou. Přitom funkce  $\tilde{\varphi}$  a  $\tilde{f}$  jsou dány výrazy

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(0, x), \quad \tilde{f}(t, x) = f(t, x) + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial U}{\partial t}(t, x).$$

Snadno ověříme, že funkce  $U$  daná vztahem

$$U(t, x) = e^{-x} \mu(t) \quad (2.74)$$

splňuje Dirichletovu podmínku (2.72). V takovém případě je

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \mu(0)e^{-x}, \quad \tilde{f}(t, x) = f(t, x) + (a^2\mu(t) - \mu'(t))e^{-x}.$$

Pokud tedy funkce  $\varphi$  a  $f(t, \cdot)$  splňují podmínky integrovatelnosti (2.53) a (2.54), pak také funkce  $\tilde{\varphi}$  a  $\tilde{f}(t, \cdot)$  splňují tytéž podmínky. To znamená, že funkce  $v$  je řešením známé úlohy; je dáno formulí (2.70), v níž jsou funkce  $\varphi$  a  $f$  psána s vlnkou.

Funkce  $U$  daná vztahem

$$U(t, x) = xe^{-x}\nu(t) \quad (2.75)$$

splňuje Neumannovu podmínku (2.73). V tomto případě je

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \quad \tilde{f}(t, x) = (a^2(x-2)\nu(t) - x\nu'(t))e^{-x}$$

a funkce  $v$  je dána formulí (2.71), v níž píšeme  $\tilde{\cdot}$  nad symboly  $\varphi$  a  $f$ .

Volit funkci  $U$  splňující nehomogenní okrajovou podmínku pomocí rovnosti (2.74) nebo (2.75) je jen jednou z obecných možností. V konkrétních úlohách může tvar nehomogenity napovědět „vhodnější“ tvar funkce  $U$ ; „vhodnost“ může spočívat v tom, že nehomogenita  $\tilde{f}$  v rovnici pro neznámou funkci  $v$  je nějakým způsobem jednoduchá (nejlépe nulová), nebo v tom, že funkci  $U$  lze nějak (např. fyzikálně) interpretovat.

## Příklad

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, \quad x > 0, \\ u(0, x) &= 0, & x > 0, \\ u(t, 0) &= \sin t, \quad \int_0^\infty |u(t, x)| dx < \infty, & t > 0. \end{aligned}$$

Tuto úlohu můžeme interpretovat jako popis vedení tepla v dlouhé tyči, která je na povrchu izolovaná, na počátku má nulovou teplotu a na jednom konci ji periodicky zahříváme a ochlazujeme. Lze očekávat, že v každém bodě tyče se bude teplota měnit se stejnou periodou. Ovšem vliv kolísání teploty na konci tyče na teplotu ve vzdálenosti  $x$  od něho se projeví s nějakým zpožděním, které je tím větší, čím je vzdálenost  $x$  větší; v nejjednodušším případě by zpoždění mohlo být vzdálenosti přímo úměrné. Amplituda kolísání teploty se musí s rostoucí vzdáleností od konce zmenšovat, a to tak, aby byla splněna podmínka integrovatelnosti. Tato úvaha vede k nápadu, že funkce  $U$  by mohla být tvaru

$$U(t, x) = e^{-\alpha x} \sin(t - \beta x),$$

kde  $\alpha, \beta$  jsou zatím neurčené kladné konstanty. Při této volbě je

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = e^{-\alpha x} \cos(t - \beta x),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) = e^{-\alpha x} ((\alpha^2 - \beta^2) \sin(t - \beta x) + 2\alpha\beta \cos(t - \beta x)),$$

takže

$$a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = e^{-\alpha x} (a^2(\alpha^2 - \beta^2) \sin(t - \beta x) + (2a^2\alpha\beta - 1) \cos(t - \beta x)).$$

Aby byl poslední výraz nulový, budeme požadovat  $\alpha^2 = \beta^2$ ,  $2a^2\alpha\beta = 1$ , tedy zvolíme

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2a^2}}, \quad U(t, x) = \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right) \sin\left(t - \frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right).$$

Dostáváme tak řešení dané úlohy ve tvaru  $u(t, x) = U(t, x) + v(t, x)$ , kde  $v$  je řešením počáteční úlohy pro homogenní parabolickou rovnici na polopřímce s homogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & t > 0, \quad x > 0, \\ v(0, x) &= \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right), & x > 0, \\ v(t, 0) &= 0, \quad \int_0^\infty |v(t, x)| dx < \infty, & t > 0.\end{aligned}$$

Podle (2.70) je tedy řešení úlohy dáno formulí

$$\begin{aligned}u(t, x) &= \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right) \sin\left(t - \frac{x}{\sqrt{2a^2}}\right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{4a^2 t} - \frac{\xi}{\sqrt{2a^2}}\right) \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a^2}}\right) \cosh \frac{x\xi}{2a^2 t} d\xi.\end{aligned}$$

Ještě si můžeme povšimnout, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t, x) - U(t, x)) = 0;$$

řešení dané úlohy je asymptoticky ekvivalentní s „uhodnutou“ funkcí  $U$ . V odstavci 2.3.7 uvidíme, že funkce  $U$  vyjadřuje speciální případ prvních dvou Fourierových zákonů vedení tepla. ■

### 2.3.5 Parabolická rovnice na úsečce

Nyní budeme hledat řešení parabolické rovnice homogenní (2.41) nebo nehomogenní (2.42) na oboru  $\{(t, x) : t > 0, 0 < x < \ell\}$ . O hledané funkci  $u$  budeme předpokládat, že pro každou hodnotu  $x \in (0, \ell)$  splňuje počáteční podmínku (2.43). Dále budeme pro  $t > 0$  požadovat splnění homogenních (2.19) nebo nehomogenních (2.20) Robinových okrajových podmínek v krajních bodech intervalu  $(0, \ell)$ . Takovou úlohu můžeme interpretovat jako model difúze ve válci konečné délky  $\ell$  nebo jako model vedení tepla v tyči délky  $\ell$ .

Základní myšlenkou při řešení těchto úloh je oddělení času a prostorové proměnné, tj. předpoklad, že řešení lze hledat ve tvaru součinu dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na čase  $t$  a druhá pouze na prostorové proměnné  $x$ . Podle tohoto postupu se tato metoda nazývá *separace proměnných*, podle svého objevitele se nazývá *Fourierova metoda*.

Užití metody nejprve ukážeme na jednodušší úloze – řešení rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami. K jejímu řešení stačí znalost základů teorie Fourierových řad. Pro řešení úlohy s obecnými Robinovými okrajovými podmínkami se využívá Sturmova teorie řešení okrajových úloh pro obyčejné lineární diferenciální rovnice druhého řádu, viz Dodatek C.

#### Dirichletova úloha

Uvažujme nejprve úlohu pro homogenní rovnici s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, \quad x \in (0, \ell), \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x \in (0, \ell), \\ u(t, 0) &= 0 = u(t, \ell), & t > 0.\end{aligned}\tag{2.76}$$

O počáteční funkci  $\varphi$  budeme předpokládat, že je nenulová<sup>3</sup>. Pak také řešení  $u$  musí být nenulová funkce.

<sup>3</sup>Poznamenejme, že počáteční funkce  $\varphi$  nemusí splňovat okrajovou podmínku  $\varphi(0) = 0 = \varphi(\ell)$ , poněvadž po řešení nepožadujeme, aby splňovalo rovnici a podmínky všude, ale stačí, aby je splňovalo skoro všude, sr. str. 65.

Řešení úlohy (2.76) budeme hledat ve tvaru součinu funkcí, z nichž jedna závisí pouze na čase  $t$  a druhá pouze na prostorové proměnné  $x$ , tj.

$$u(t, x) = T(t)X(x);$$

obě funkce  $T$ ,  $X$  musí být nenulové. Toto vyjádření dosadíme do řešené rovnice. Dostaneme

$$T'X = a^2TX'',$$

kde  $'$  označuje obyčejnou derivaci funkce podle její jediné proměnné. Tuto rovnost vydělíme součinem  $a^2TX$ ,

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X}.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na proměnné  $t$ , výraz na pravé straně pouze na proměnné  $x$ . Jinak řečeno, výraz na levé straně nezávisí na proměnné  $x$  a proto ani výraz na pravé straně nemůže na  $x$  záviset. Obě strany rovnosti jsou tedy konstantní. Označíme jejich hodnotu jako  $-\lambda$ . Dostaneme tak dvě obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{T'}{a^2T} = -\lambda, \quad \frac{X''}{X} = -\lambda. \quad (2.77)$$

Věnujme se nejprve druhé z nich. Přepíšeme ji ve tvaru

$$X'' + \lambda X = 0. \quad (2.78)$$

To je obyčejná lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantním koeficientem. Z okrajové podmínky v úloze (2.76) plyne, že

$$T(t)X(0) = 0 = T(t)X(\ell),$$

což je možné splnit jen tak, že funkce  $X$ , tedy řešení rovnice (2.78), splňuje okrajové podmínky

$$X(0) = 0 = X(\ell). \quad (2.79)$$

Pokud je  $\lambda < 0$ , má rovnice (2.78) obecné řešení tvaru

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

První z okrajových podmínek (2.79) klade na integrační konstanty  $A, B$  omezení

$$A + B = 0$$

a druhá z nich omezení

$$Ae^{\sqrt{-\lambda}\ell} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0.$$

Z první rovnosti dostaneme  $B = -A$  a po dosazení do druhé dostaneme

$$0 = A \left( e^{\sqrt{-\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} \right) = 2A \sinh \sqrt{-\lambda}\ell.$$

Avšak hyperbolický sinus má hodnotu 0 jedině pro argument rovný 0 a  $\sqrt{-\lambda}\ell > 0$ . Musí tedy být  $A = 0$  a v důsledku toho i  $B = 0$ . To znamená, že v případě  $\lambda < 0$  má úloha (2.78), (2.79) pouze nulové, tj. nevyhovující řešení.

Pokud je  $\lambda = 0$ , pak je řešením rovnice  $X'' = 0$  lineární funkce

$$X(x) = Ax + B.$$

První z podmínek (2.79) dá  $B = 0$  a druhá z nich následně  $A = 0$ . V případě  $\lambda = 0$  opět nemá úloha (2.78), (2.79) vyhovující řešení.

Pokud je  $\lambda > 0$ , pak má rovnice (2.78) obecné řešení

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Podmínka  $X(0) = 0$  dá  $A = 0$ . Poté podmínka  $X(\ell) = 0$  vede k rovnosti

$$0 = B \sin \sqrt{\lambda} \ell.$$

Abychom dostali nenulové řešení, musí být  $B \neq 0$  a tedy  $\sin \sqrt{\lambda} \ell = 0$ . Z této goniometrické rovnice plyne, že  $\sqrt{\lambda} \ell = k\pi$ , kde  $k$  je nějaké celé číslo. Poněvadž  $\lambda > 0$  a  $\ell > 0$ , musí být také  $k > 0$ . Dostáváme tak možné hodnoty konstanty  $\lambda$ . Označme je

$$\lambda_k = \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Úloha (2.78), (2.79) má nenulové řešení pouze pro hodnoty  $\lambda = \lambda_k$ ; zapišme ho v obecném tvaru

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x.$$

Nalezenou hodnotu  $\lambda_k$  dosadíme do první rovnice (2.77). Dostaneme obyčejnou lineární homogenní rovnici

$$T' = - \left( \frac{k\pi a}{\ell} \right)^2 T,$$

která má obecné řešení

$$T_k(t) = B_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t}.$$

Součin funkcí  $X_k, T_k$  označíme  $u_k$ . Dostáváme tak nekonečnou spočetnou množinu řešení

$$u_k(t, x) = C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Každá z těchto funkcí splňuje rovnici a okrajové podmínky v úloze (2.76). Poněvadž je řešená rovnice homogenní, platí princip superpozice, a proto také lineární kombinace funkcí  $u_k$  splňuje rovnici a okrajové podmínky uvažované úlohy. Řešení tedy můžeme formálně zapsat ve tvaru řady

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell} x. \quad (2.80)$$

Z počáteční podmínky v úloze (2.76) dostaneme nyní rovnost

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x,$$

kterou můžeme přechít tak, že počáteční funkce  $\varphi$  má Fourierův rozvoj do sinové řady. Pak konstanty  $C_k$  jsou Fourierovými koeficienty funkce  $\varphi$  vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí

$$\left\{ \sin \frac{k\pi}{\ell} x \right\}_{k=1}^{\infty},$$

a to znamená, že je můžeme vyjádřit ve tvaru

$$C_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi d\xi.$$

Nekonečná řada v rovnosti (2.80) jakožto Fourierova řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně. Proto můžeme řešení úlohy (2.76) upravit

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi d\xi \right) e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell} x = \\ &= \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \sin \frac{k\pi}{\ell} x d\xi. \end{aligned}$$

Označíme-li nyní

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \sin \frac{k\pi}{\ell} x, \quad (2.81)$$

můžeme řešení úlohy (2.76) psát ve známém tvaru

$$u(t, x) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi. \quad (2.82)$$

Opět zformulujeme několik evidentních vlastností funkce  $G : [0, \ell]^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ :

- Funkce  $G$  je spojitá na množině  $(0, \ell)^2 \times (0, \infty)$ .
- Je symetrická v prvních dvou proměnných.
- Funkce jedné proměnné  $G(\cdot, \xi, t)$  má spojitě derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů  $(\xi, t) \in (0, \ell) \times (0, \infty)$ .
- Funkce dvou proměnných  $G(\cdot, \xi, \cdot)$ , je pro všechna  $\xi \in (0, \ell)$  řešením rovnice (2.41), které splňuje nulové Dirichletovy okrajové podmínky pro každou hodnotu  $t$ .
- Pro všechny hodnoty  $x, \xi \in [0, \ell]$  platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, \xi, t) = 0$ .

Řešení úlohy pro nehomogenní rovnici s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), & t > 0, & x \in (0, \ell), \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x &\in (0, \ell), \\ u(t, 0) &= 0 = u(t, \ell), & t &> 0. \end{aligned}$$

je podle Duhamelova principu dáno součtem

$$u(t, x) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \left( \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi \right) d\sigma.$$

V případě úlohy pro nehomogenní rovnici s obecnými Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), & t > 0, & x \in (0, \ell), \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x &\in (0, \ell), \\ u(t, 0) &= \mu_0(t), \quad u(t, \ell) = \mu_1(t), & t &> 0 \end{aligned}$$

můžeme řešení hledat ve tvaru

$$u(t, x) = U(t, x) + v(t, x),$$

kde funkce  $U$  splňuje okrajové podmínky. Zřejmě stačí funkci  $U$  volit jako lineární v proměnné  $x$ , tj.

$$U(t, x) = \mu_0(t) + \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t)}{\ell} x.$$

Funkce  $v$  je pak řešením úlohy s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(t, x) - \mu'_0(t) + \frac{\mu'_1(t) - \mu'_0(t)}{\ell} x, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell),$$

$$v(0, x) = \varphi(x) - \mu_0(0) - \frac{\mu_1(0) - \mu_0(0)}{\ell} x, \quad x \in (0, \ell),$$

$$v(t, 0) = 0 = v(t, \ell), \quad t > 0.$$

### Příklad

Najdeme řešení homogenní parabolické rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pro  $t > 0$  a  $x \in (0, \ell)$ , které splňuje konstantní počáteční podmínku

$$u(0, x) = u_0$$

pro  $x \in (0, \ell)$  a konstantní Dirichletovy okrajové podmínky

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, \ell) = u_1$$

pro  $t > 0$ .

Tuto úlohu lze interpretovat jako model chladnutí tyče délky  $\ell$ , která byla na počátku zahřáta na teplotu  $u_0$ , na jejím levém konci udržujeme nulovou teplotu a na pravém teplotu  $u_1$ . Tyč je na svém povrchu tepelně izolovaná, takže na jejím povrchu nedochází k výměně tepla s okolním prostředím.

V daném případě okrajové podmínky splňuje funkce

$$U(t, x) = \frac{u_1}{\ell} x.$$

Hodnoty této funkce nezávisí na čase, takže řešení úlohy je tvaru

$$u(t, x) = \frac{u_1}{\ell} x + v(t, x),$$

kde funkce  $v$  je řešením úlohy

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell),$$

$$v(0, x) = u_0 - \frac{u_1}{\ell} x, \quad x \in (0, \ell),$$

$$v(t, 0) = 0 = v(t, \ell), \quad t > 0.$$

Podle obecných výsledků je

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \int_0^\ell \left( u_0 - \frac{u_1}{\ell} \xi \right) \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\frac{k\pi a}{\ell})^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \sin \frac{k\pi}{\ell} x dx = \\ &= \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\frac{k\pi a}{\ell})^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell} x \int_0^\ell \left( u_0 - \frac{u_1}{\ell} \xi \right) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi d\xi. \end{aligned}$$



Integrál vypočítáme „per partes“,

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \left(u_0 - \frac{u_1}{\ell}\xi\right) \sin \frac{k\pi}{\ell}\xi d\xi &= -\frac{\ell}{k\pi} \left[ \left(u_0 - \frac{u_1}{\ell}\xi\right) \cos \frac{k\pi}{\ell}\xi \right]_{\xi=0}^{\ell} - \frac{u_1}{\ell} \frac{\ell}{k\pi} \int_0^{\ell} \cos \frac{k\pi}{\ell}\xi d\xi = \\ &= \frac{\ell}{k\pi} \left( (u_0 - u_1) \cos k\pi - u_0 \right) = \frac{\ell}{k\pi} (u_0 - (u_0 - u_1)(-1)^k). \end{aligned}$$

Dostáváme tak řešení dané úlohy vyjádřené ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{u_1}{\ell}x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_0 - (u_0 - u_1)(-1)^k}{k} e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell}x.$$

■

### Obecná Robinova úloha

Uvažujme nejprve úlohu homogenní, tj. homogenní rovnici (2.41) s homogenními okrajovými podmínkami (2.19) na intervalu  $(0, \ell)$ . Hledáme tedy řešení úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, \quad x \in (0, \ell), \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x \in (0, \ell), \\ \alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= 0 = \alpha_1 u(t, \ell) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell), & t > 0. \end{aligned} \quad (2.83)$$

O počáteční funkci  $\varphi$  opět předpokládáme, že je nenulová, a proto i řešení úlohy musí být nenulové. Nejprve separujeme proměnné, tj. předpokládáme, že řešení má tvar

$$u(t, x) = T(t)X(x). \quad (2.84)$$

Toto vyjádření dosadíme do dané rovnice a upravíme tak, že na pravé straně ponecháme pouze funkci  $X$  a její derivaci. Dostaneme rovnost

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X},$$

jejíž levá strana nezávisí na proměnné  $x$  a pravá nezávisí na proměnné  $t$ ; výrazy na obou stranách jsou tedy rovny nějaké konstantě, kterou opět označíme  $-\lambda$  a dostaneme dvě rovnice

$$\frac{T'}{a^2 T} = -\lambda, \quad \frac{X''}{X} = -\lambda. \quad (2.85)$$

Druhou z nich přepíšeme do tvaru obyčejné lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantním koeficientem

$$X'' + \lambda X = 0. \quad (2.86)$$

Vyjádření (2.84) řešení úlohy (2.83) dosadíme do okrajové podmínky. Dostaneme rovnosti

$$\alpha_0 T(t)X(0) + \beta_0 T(t)X'(0) = 0 = \alpha_1 T(t)X(\ell) + \beta_1 T(t)X'(\ell),$$

kteří mají být splněny pro libovolnou hodnotu  $t > 0$ . Odtud plyne, že řešení  $X$  rovnice (2.86) splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_0 X(0) + \beta_0 X'(0) = 0 = \alpha_1 X(\ell) + \beta_1 X'(\ell). \quad (2.87)$$

Úloha (2.86), (2.87) pro obyčejnou lineární rovnici druhého řádu s parametrem  $\lambda$  a homogenními okrajovými podmínkami je Sturmovou-Liouvilleovou úlohou, sr. Dodatek C.2. Podle

Věty 3 existuje rostoucí posloupnost vlastních čísel, z nichž nejmenší je větší nebo rovno 0. Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že 0 je vlastním číslem úlohy (2.86), (2.87) právě tehdy, když

$$\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 = \alpha_0\alpha_1\ell.$$

V takovém případě označíme  $\lambda_0 = 0$ ; příslušná vlastní funkce  $v_0$  je lineární,

$$v_0(x) = \alpha_1x - \alpha_1\ell - \beta_1.$$

Pro zjednodušení (sjednocení) zápisu zavedeme množinu indexů

$$I = \begin{cases} \{0, 1, 2, \dots\}, & \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 = \alpha_0\alpha_1\ell, \\ \{1, 2, 3, \dots\}, & \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 \neq \alpha_0\alpha_1\ell. \end{cases} \quad (2.88)$$

Řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (2.86), (2.87) dostaneme posloupnost vlastních čísel  $\lambda_k$  a k nim příslušné vlastní funkce  $v_k$ ,  $k \in I$ . Dostáváme tak početně mnoho řešení

$$X_k(x) = v_k(x), \quad k \in I$$

okrajové úlohy (2.86), (2.87).

Nalezené hodnoty  $\lambda_k$ ,  $k \in I$  dosadíme do první rovnice (2.85). Dostaneme tak obyčejné lineární homogenní rovnice

$$T' = -a^2\lambda_k T, \quad k \in I,$$

jejichž obecné řešení je tvaru

$$T_k(t) = C_k e^{-a^2\lambda_k t}.$$

Po dosazení funkcí  $X_k$ ,  $T_k$  do vyjádření (2.84) hledaného řešení úlohy pro parciální diferenciální rovnici dostaneme početný systém funkcí

$$u_k(t, x) = T_k(t)X_k(x) = C_k e^{-a^2\lambda_k t} v_k(x), \quad k \in I,$$

z nichž každá je řešením dané rovnice a splňuje příslušné okrajové podmínky z úlohy (2.83). Poněvadž rovnice i okrajové podmínky jsou homogenní, a tedy splňují princip superpozice, můžeme řešení této úlohy psát ve tvaru nekonečné řady

$$u(t, x) = \sum_{k \in I} C_k e^{-a^2\lambda_k t} v_k(x) \quad (2.89)$$

se zatím neurčenými koeficienty  $C_k$ ,  $k \in I$ . Ty získáme z dosud nevyužitých počátečních podmínek

$$\varphi(x) = u(0, x) = \sum_{k \in I} C_k v_k(x).$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že konstanty  $C_k$  jsou Fourierovými koeficienty funkce  $\varphi$  vzhledem k ortogonálnímu systému vlastních funkcí  $\{v_k\}_{k \in I}$ , tedy

$$C_k = \frac{1}{\|v_k\|^2} \int_0^\ell \varphi(\xi) v_k(\xi) d\xi.$$

Tyto koeficienty dosadíme do rovnosti (2.89) vyjadřující řešení a upravíme ji na tvar

$$u(t, x) = \int_0^\ell \varphi(\xi) \sum_{k \in I} \frac{v_k(x)v_k(\xi)}{\|v_k\|^2} e^{-a^2\lambda_k t} d\xi.$$

Dosažený výsledek shrneme: Řešení úlohy (2.83) je dáno integrálem

$$u(t, x) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi;$$

přítom funkce  $G : [0, \ell]^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je definována nekonečnou řadou

$$G(x, \xi, t) = \sum_{k \in I} \frac{v_k(x)v_k(\xi)}{\|v_k\|^2} e^{-a^2 \lambda_k t},$$

kde  $\lambda_k$  jsou vlastní hodnoty a  $v_k$  jsou příslušné vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (2.86), (2.87), indexová množina  $I$  je zavedena vztahem (2.88).

Zřídlová funkce  $G$  má vlastnosti:

- Funkce  $G$  je spojitá na množině  $(0, \ell)^2 \times (0, \infty)$ .
- Je symetrická v prvních dvou proměnných.
- Funkce jedné proměnné  $G(\cdot, \xi, t)$  má spojitě derivace druhého řádu pro všechny dvojice parametrů  $(\xi, t) \in (0, \ell) \times (0, \infty)$ .
- Funkce dvou proměnných  $G(\cdot, \xi, \cdot)$  je pro všechna  $\xi \in (0, \ell)$  řešením rovnice (2.41), které splňuje homogenní Robinovy okrajové podmínky

$$\alpha_0 G(0, \xi, t) + \beta_0 \frac{\partial G}{\partial x}(0, \xi, t) = 0 = \alpha_1 G(\ell, \xi, t) + \beta_1 \frac{\partial G}{\partial x}(\ell, \xi, t)$$

pro každou hodnotu  $t > 0$ .

- Pro všechny hodnoty  $x, \xi \in [0, \ell]$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, \xi, t) = \begin{cases} \frac{3(\alpha_1^2 x \xi - \alpha_1(x + \xi)(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{\ell(\alpha_1^2 \ell^2 + 3\beta_1(\alpha_1 + \beta_1))}, & \alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1 = \alpha_0 \alpha_1 \ell, \\ 0, & \alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1 \neq \alpha_0 \alpha_1 \ell. \end{cases}$$

Řešení úlohy pro nehomogenní rovnici s homogenními Robinovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), & t > 0, \quad x \in (0, \ell), \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x \in (0, \ell), \\ \alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= 0 = \alpha_1 u(t, \ell) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell), & t > 0 \end{aligned}$$

je podle Duhamelova principu dáno součtem

$$u(t, x) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \left( \int_0^{\ell} f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi \right) d\sigma.$$

V případě úlohy pro nehomogenní rovnici s nehomogenními Robinovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), & t > 0, \quad x \in (0, \ell), \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x \in (0, \ell), \\ \alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= \mu_0(t), \quad \alpha_1 u(t, \ell) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = \mu_1(t), & t > 0 \end{aligned}$$

můžeme řešení hledat ve tvaru

$$u(t, x) = U(t, x) + v(t, x),$$

kde funkce  $U$  splňuje okrajové podmínky. Funkce  $v$  je pak řešením úlohy pro nehomogenní rovnici s homogenními Robinovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) + f(t, x), & t > 0, x \in (0, \ell), \\ v(0, x) &= \varphi(x) - U(0, x), & x \in (0, \ell), \\ \alpha_0 v(t, 0) + \beta_0 \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) &= 0 = \alpha_1 v(t, \ell) + \beta_1 \frac{\partial v}{\partial x}(t, \ell), & t > 0. \end{aligned}$$

Funkci  $U$  lze volit ve tvaru

$$U(t, x) = \begin{cases} \frac{\alpha_1 \mu_0(t) - \alpha_0 \mu_1(t)}{\beta_0 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_0 - \alpha_0 \alpha_1 \ell} x + \frac{\beta_0 \mu_1(t) - \beta_1 \mu_0(t) - \ell \alpha_1 \mu_0(t)}{\beta_0 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_0 - \alpha_0 \alpha_1 \ell}, & \beta_0 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_0 \neq \alpha_0 \alpha_1 \ell, \\ \frac{\beta_0 \mu_1(t) - \beta_1 \mu_0(t) - \alpha_1 \ell \mu_0}{\beta_0 \ell (\alpha_1 \ell + 2\beta_1)} x^2 + \frac{\mu_0(t)}{\beta_0} x, & \begin{aligned} &\beta_0 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_0 = \alpha_0 \alpha_1 \ell, \\ &\beta_0 \ell (\alpha_1 \ell + 2\beta_1) \neq 0, \end{aligned} \\ \frac{\alpha_1 \mu_0(t) - \alpha_0 \mu_1(t)}{2\alpha_0 \alpha_1} \exp\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} x\right) + \frac{\mu_1(t)}{\alpha_1}, & \beta_0 \neq 0 = \beta_0 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_0, \\ \frac{\alpha_1 \mu_0(t) - \alpha_0 \mu_1(t)}{\alpha_0 \alpha_1} \exp\left(\frac{x}{\ell}\right) + \frac{\mu_1(t)}{\alpha_1}, & \beta_0 = 0 = \beta_1 + \alpha_1 \ell. \end{cases} \quad (2.90)$$

Zejména pro  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1, \beta_0 = \beta_1 = 0$  (Dirichletovy podmínky) dostaneme

$$U(t, x) = \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t)}{\ell} x + \mu_0(t)$$

a pro  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \beta_0 = \beta_1 = 1$  (Neumannovy podmínky)

$$U(t, x) = \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t)}{2\ell} x^2 + \mu_0(t)x.$$

V případě  $\alpha_0 = -\alpha_1, \beta_0 = \beta_1 = 1$  (Robinovy podmínky) lze položit

$$U(t, x) = \frac{\mu_1(t) + \mu_0(t)}{2 - \alpha_0 \ell} x - \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t) + \alpha_0 \ell \mu_0(t)}{\alpha_0 (2 - \alpha_0 \ell)}, \quad \text{pokud } \alpha_0 \neq 2\ell,$$

a

$$U(t, x) = \frac{\mu_0(t) + \mu_1(t)}{2\alpha_0} e^{\alpha_0 x} - \frac{\mu_1(t)}{\alpha_0}, \quad \text{pokud } \alpha_0 = 2\ell.$$

Je-li možné funkci  $U$  volit jako lineární ve druhé proměnné  $x$  (tj. pokud  $\beta_0 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_0 \neq \alpha_0 \alpha_1 \ell$ ), pak je  $\frac{\partial U}{\partial x^2} \equiv 0$  a nehomogenita řešené rovnice se poněkud zjednoduší. Pokud navíc okrajové podmínky nezávisí na čase, tj.  $\mu_0 \equiv \text{const}, \mu_1 \equiv \text{const}$ , pak také  $\frac{\partial U}{\partial t} \equiv 0$  a funkce  $v$  je řešením původní rovnice.

### 2.3.6 Počáteční úlohy pro parabolické rovnice – shrnutí

V odstavcích 2.3.2–2.3.5 jsme našli řešení nehomogenní parabolické rovnice (2.42) s počáteční podmínkou (2.43) v několika speciálních případech. Nalezené řešení úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), & t > 0, x \in J, \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x \in J, \end{aligned} \quad (2.91)$$

kde  $J$  je nějaký omezený nebo neomezený interval reálných čísel, které navíc splňuje nějaké homogenní okrajové podmínky, je tvaru

$$u(t, x) = \int_J \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \left( \int_J f(\sigma, \xi) G(x, \xi, t - \sigma) d\xi \right) d\sigma. \quad (2.92)$$

Zřídlová (Greenova) funkce  $G : J^2 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je určena intervalem  $J$  a okrajovými podmínkami. V Tabulce 2.1 jsou uvedeny zřídlové funkce v některých speciálních případech.

Řešení úlohy (2.91) s nehomogenními okrajovými podmínkami lze hledat ve tvaru

$$u(t, x) = U(t, x) + v(t, x),$$

kde funkce  $U : (0, \infty) \times J \rightarrow \mathbb{R}$  splňuje okrajové podmínky a funkce  $v$  je řešením úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{f}(t, x), & t > 0, \quad x \in J, \\ u(0, x) &= \tilde{\varphi}(x), & x \in J, \end{aligned}$$

s homogenními podmínkami stejného typu; přitom

$$\tilde{f}(t, x) = f(t, x) + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial U}{\partial t}(t, x), \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(0, x).$$

Volba funkce  $U$  není nijak apriori dána, tvary zavedené rovnostmi (2.74), (2.75) nebo (2.90) pro speciální intervaly  $J$  a speciální okrajové podmínky jsou jenom jednou z možností.

Ještě si připomeňme, že pro téměř všechny zřídlové funkce  $G$  uvedené v Tabulce 2.1 (výjimkou je funkce  $G$  pro homogenní Neumannovu úlohu na úsečce), platí vztah

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, \xi, t) = 0 \text{ pro všechna } (x, \xi) \in \mathbb{R}^2.$$

To znamená, že po „dostatečně dlouhém čase“ bude hodnota prvního integrálu na pravé straně rovnosti (2.92) zanedbatelná. Jinak řečeno, řešení úlohy (2.91) v „dostatečně dlouhém časovém horizontu“ nezávisí na počáteční podmínce, v průběhu času vymizí informace o počátku. Systém s takovou vlastností – jeho vývoj za dlouhý časový interval nezávisí na počátečním stavu – se nazývá *ergodický*.

### 2.3.7 Úloha bez počátečních podmínek

Dosud jsme hledali řešení parabolické rovnice (2.41) nebo (2.42), které splňovalo nějakou počáteční podmínku, tj. znali jsme stav v počátečním čase  $t = 0$ . Tato informace však nemusí být vždy dostupná – pokud navíc proces popsaný parabolickou rovnicí pozorujeme v čase dlouho od jeho začátku. Vzhledem k ergodičnosti však počáteční stav nemá na vývoj systému už nějaký podstatný vliv.

Konkrétně: Teplota na zemském povrchu v průběhu dne i v průběhu roku kolísá. Toto kolísání lze v prvním přiblížení považovat za periodické. Budeme modelovat šíření periodických teplotních změn v zemi, kterou budeme považovat za homogenní poloprostor; budeme ho charakterizovat jedinou souřadnicí  $x$ , hloubkou pod povrchem. Při mnohonásobném pravidelném opakování teplotních změn na povrchu bude vliv počáteční teploty menší, než vlivy, které zanedbáváme (např. nehomogenost půdy, odchylky od přesné periodičnosti průběhu povrchové teploty a podobně).

Teplotu v čase  $t$  a v hloubce  $x$  označíme  $u(t, x)$ . Vnitřní zdroje tepla v půdě (např. geotermální energii) neuvažujeme. Proto bude vývoj teploty popsán homogenní parabolickou rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.93)$$

Tabulka 2.1: Zřídlové funkce úlohy (2.91) pro některé homogenní okrajové podmínky.

| interval $J$        | okrajová podmínka  | $G(x, \xi, t)$  |
|---------------------|--|---|
| $(-\infty, \infty)$ | $u(t, x) = u(t, x + \ell)$   | $\frac{1}{\ell} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \cos \frac{2k\pi}{\ell} (x - \xi) \right)$                  |
| $(-\infty, \infty)$ | $\int_{-\infty}^0  u(t, x)  dx < \infty, \int_0^{\infty}  u(t, x)  dx < \infty$    | $\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}}{2\sqrt{\pi a^2 t}}$   |
| $(0, \infty)$       | $u(t, 0) = 0, \int_0^{\infty}  u(t, x)  dx < \infty$                               | $\frac{e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{\pi a^2 t}} \sinh \frac{x\xi}{2a^2 t}$  |
| $(0, \infty)$       | $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \int_0^{\infty}  u(t, x)  dx < \infty$   | $\frac{e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{\pi a^2 t}} \cosh \frac{x\xi}{2a^2 t}$  |
| $(0, \ell)$         | $u(t, 0) = 0 = u(t, \ell)$   | $\frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \sin \frac{k\pi}{\ell} x$                      |
| $(0, \ell)$         | $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell)$ | $\frac{1}{\ell} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \cos \frac{k\pi}{\ell} \xi \cos \frac{k\pi}{\ell} x \right)$ |
| $(0, \ell)$         | $u(t, 0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell)$                             | $\frac{2}{\ell} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2\ell}\right)^2 t} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2\ell} \xi \sin \frac{(2k+1)\pi}{2\ell} x$    |
| $(0, \ell)$         | $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 = u(t, \ell)$                             | $\frac{2}{\ell} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2\ell}\right)^2 t} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2\ell} \xi \cos \frac{(2k+1)\pi}{2\ell} x$    |

Tabulka 2.1: pokračování

|              |   |  |
|--------------|---|--|
| (0, $\ell$ ) | $u(t, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = -hu(t, \ell)$                                    | $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h^2 + \lambda_k)}{\ell(h^2 + \lambda_k) + 2h} e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \sqrt{\lambda_k} \xi \sin \sqrt{\lambda_k} x,$ <p><math>\lambda_k</math> jsou kladné kořeny rovnice <math>\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} \ell)</math></p>  |
| (0, $\ell$ ) | $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = -hu(t, \ell)$        | $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h^2 + \lambda_k)}{\ell(h^2 + \lambda_k) + 2h} e^{-a^2 \lambda_k t} \cos \sqrt{\lambda_k} \xi \cos \sqrt{\lambda_k} x,$ <p><math>\lambda_k</math> jsou kladné kořeny rovnice <math>\sqrt{\lambda} = h \operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda} \ell)</math></p>   |
| (0, $\ell$ ) | $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = hu(t, 0), \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = -hu(t, \ell)$ | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-a^2 \lambda_k t} \left( \cos \sqrt{\lambda_k} \xi + \frac{h}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} \xi \right) \left( \cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \right)}{\frac{\ell}{2} + \frac{h^2 \ell + 2h}{2\lambda_k}},$ <p><math>\lambda_k</math> jsou kladné kořeny rovnice <math>\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} = 2 \operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda} \ell)</math></p> |

kde  $a^2$  vyjadřuje koeficient teplotní vodivosti půdy. Teplota na povrchu bude vyjádřena okrajovou podmínkou

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad (2.94)$$

kde  $\mu$  je nějaká spojitá periodická funkce. Jakožto spojitá periodická funkce je  $\mu$  také ohraničená, tj. existuje nějaká hodnota  $M$ , že

$$|\mu(t)| \leq M \text{ pro } t \in \mathbb{R}.$$

Teplota půdy v dlouhodobém časovém horizontu nemůže překračovat nejvyšší teplotu na povrchu a nemůže klesnout pod jeho nejnižší teplotu (poněvadž neuvažujeme žádné vnitřní zdroje tepla nebo chlazení). Proto budeme hledat řešení, které splňuje podmínku ohraničenosti

$$|u(t, x)| \leq M \text{ pro } t \in \mathbb{R}, x \geq 0. \quad (2.95)$$

Hledáme tedy funkci  $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje rovnici (2.93) a podmínky (2.94), (2.95).

Poněvadž funkce  $\mu$  je spojitá a periodická, můžeme ji vyjádřit ve tvaru absolutně a stejnoměrně konvergentní Fourierovy řady<sup>4</sup>

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t);$$

přítom

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mu(s) \cos k\omega s ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mu(s) \sin k\omega s ds, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.96)$$

Je zřejmé, že pokud funkce  $v_i$  splňují rovnici (2.93) s okrajovými podmínkami  $v_i(t, 0) = \varphi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , pak také jejich součet  $v = v_1 + v_2$  splňuje rovnici (2.93) a navíc okrajovou podmínku  $v(t, 0) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ . Proto budeme řešení naší úlohy (2.93), (2.94), (2.95) hledat ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t, x) + \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t, x),$$

kde všechny funkce  $v_k, w_k$  splňují rovnici (2.93), jsou ohraničené a splňují okrajové podmínky

$$v_k(t, 0) = a_k \cos k\omega t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.97)$$

$$w_k(t, 0) = b_k \sin k\omega t, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.98)$$

Nejprve však najdeme ohraničené řešení pomocné úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & t \in \mathbb{R}, x > 0, \\ v(t, 0) &= a_k e^{ik\omega t}, & t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.99)$$

s komplexní okrajovou podmínkou. Snadno ověříme, že reálná část řešení této úlohy je také řešením úlohy (2.93), (2.97). Řešení úlohy (2.99) budeme hledat v exponenciálním tvaru

$$v(t, x) = a_k e^{\alpha t + \beta x}.$$

Pak je  $v(t, 0) = a_k e^{\alpha t}$  a porovnáním s okrajovou podmínkou v úloze (2.99) vidíme, že  $\alpha = ik\omega$ . Dále

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \alpha a_k e^{\alpha t + \beta x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = \beta^2 a_k e^{\alpha t + \beta x},$$

<sup>4</sup>Pokud uvažujeme roční kolísání teploty, je  $\omega = 2\pi/\text{rok}$ .



takže po dosazení do rovnice v úloze (2.99) a snadné úpravě dostaneme

$$\alpha = a^2 \beta^2.$$

Odtud  $a^2 \beta^2 = ik\omega$ . Z této kvadratické rovnice s komplexními koeficienty vypočítáme

$$\beta = \pm(1+i)\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}.$$

Dostáváme tak řešení pomocné úlohy (2.99) ve tvaru

$$v(t, x) = a_k \exp\left(ik\omega t \pm (1+i)\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right) = a_k \exp\left(\pm\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right) \exp\left[i\left(k\omega t \pm \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right)\right].$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že řešení se znaménkem „+“ je neohraničené; vyhovuje tedy pouze funkce se znaménkem „-“. Proto omezené řešení úlohy (2.93), (2.97) je reálnou částí posledního výrazu, v němž místo symbolu „±“ píšeme znaménko „-“, tj.

$$v_k(t, x) = a_k \exp\left(-\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right) \cos\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right).$$

Analogicky najdeme ohraňené řešení úlohy (2.93), (2.98) ve tvaru

$$w_k(t, x) = b_k \exp\left(-\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right) \sin\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right).$$

Celkem tak dostáváme řešení úlohy (2.93), (2.94), (2.95) ve tvaru nekonečné řady

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right) \left[ a_k \cos\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right) + b_k \sin\left(k\omega t - \sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right) \right],$$

kde koeficienty  $a_k, b_k$  jsou dány integrály (2.96). Výraz v hranatých závorkách můžeme upravit<sup>5</sup> a výsledek zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x) \cos k\omega(t - \delta_k(x)),$$

kde

$$A_k(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\omega}{2a^2}}x\right)}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, & a_k^2 + b_k^2 \neq 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \delta_k(x) = \sqrt{\frac{1}{2ka^2\omega}}x + \begin{cases} \frac{1}{k\omega} \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}, & a_k \neq 0, \\ \frac{\pi}{2k\omega}, & a_k = 0. \end{cases}$$

## Teplotní vlny

Úloha o vedení tepla v půdě je jedním z prvních příkladů užití matematické teorie tepla. Za zjednodušujících předpokladů ji řešil již Joseph Fourier<sup>6</sup>. Předpokládal, že teplota na povrchu

<sup>5</sup> Při výpočtu používáme vzorce  $\cos(\varphi - \operatorname{arctg} \xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \cos \varphi + \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \sin \varphi$ .

<sup>6</sup> J. FOURIER: *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot Père et Fils, Paris 1822.

v průběhu roku (čas vyjadřoval ve dnech) je rovna součtu průměrné roční teploty a teploty specifické pro den, která je úměrná výšce Slunce nad obzorem za poledne. Pokud se tedy čas  $t$  počítá od okamžiku letního slunovratu, je povrchová teplota vyjádřena funkcí

$$\mu(t) = T + \gamma \cos \omega t,$$

kde  $T$  je průměrná roční teplota,  $\gamma$  je příslušná konstanta úměrnosti a frekvence  $\omega$  má hodnotu

$$\omega = \frac{2\pi}{365,26} \text{den}^{-1}.$$

Při této volbě tedy je  $a_0 = 2T$ ,  $a_1 = \gamma$ ,  $a_2 = a_3 = \dots = 0 = b_1 = b_2 = \dots$  a řešení úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t \in \mathbb{R}, x > 0, \\ u(t, 0) &= T + \gamma \cos \omega t, \quad |u(t, \cdot)| \leq |T| + |\gamma| & t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

je dáno výrazem

$$u(t, x) = T + \gamma e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x \right) = T + \gamma e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \omega \left( t - \sqrt{\frac{1}{2a^2\omega}} x \right).$$

Označme

$$A(x) = \gamma e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x}, \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{1}{2a^2\omega}} x.$$

Řešení nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = T + A(x) \cos \omega(t - \delta(x))$$

a interpretovat ho jako šíření teplotních vln v půdě. Přitom  $A(x)$  vyjadřuje amplitudu kolísání teploty v hloubce  $x$ ,  $\delta(x)$  vyjadřuje opožďování  $\delta(x)$  maxim (minim) teplot v hloubce  $x$  od příslušných okamžiků na povrchu. Výsledek lze také přepsat pomocí periody  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  kolísání povrchové teploty jako

$$u(t, x) = T + A(x) \cos \frac{2\pi}{\tau}(t - \delta(x));$$

při tomto zápisu je

$$A(x) = \gamma e^{-\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} x}, \quad \delta(x) = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} x.$$

Mění-li se po dlouhou dobu periodicky teplota na povrchu, nastává v půdě kolísání teploty s toutéž periodou. Přitom platí:

1. Amplituda  $A(x)$  kolísání teploty v hloubce  $x$  klesá exponenciálně s hloubkou; rostou-li hloubky s aritmetickou posloupností, klesají amplitudy s geometrickou posloupností (první Fourierův zákon).  
V hluboké studni nebo v jeskyni je dlouhodobě téměř konstantní teplota přibližně se rovnající průměrné roční teplotě na povrchu.
2. Teplota v půdě kolísá s jistým fázovým zpožděním za kolísáním teploty na povrchu; opožďování  $\delta(x)$  teplotních extrémů v hloubce  $x$  je úměrné této hloubce (druhý Fourierův zákon).  
V hloubce  $x$  se teplotní extrém projeví za čas  $\delta(x)$  od jeho výskytu na povrchu, což lze chápat i tak, že teplo se v půdě šíří konstantní rychlostí

$$\frac{x}{\delta(x)} = \sqrt{2a^2\omega} = 2\sqrt{a^2 \frac{\pi}{\tau}}.$$

Poznamenejme, že tato rychlost má formálně stejné vyjádření, jako rychlost difundující látky vznikající autokatalytickou reakcí (viz str. 74nn), přičemž reakční rychlost odpovídá poloviční frekvenci kolísání teploty.

3. Hloubka pronikání teploty do půdy závisí na periodě kolísání teploty na povrchu. Relativní změna amplitudy v hloubce  $x$  je rovna

$$\frac{A(x)}{\gamma} = e^{-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}x};$$

při kolísání povrchové teploty o periodách  $\tau_1$  a  $\tau_2$  budou hloubky  $x_1$  a  $x_2$ , ve kterých dochází ke stejným relativním změnám teploty, v poměru

$$\frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}.$$

(třetí Fourierův zákon).

## 2.4 Rovnice reakce-difúze

### 2.4.1 Lineární rovnice

Uvažujme lineární parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru$$

s kladnými parametry  $D$ ,  $r$ .

Pro zjednodušení zápisu změníme měřítko nezávisle proměnných, tj. zavedeme bezrozměrný čas  $\tau$  a bezrozměrnou prostorovou proměnnou  $\xi$  vztahy

$$\xi = \sqrt{\frac{r}{D}}x, \quad \tau = rt.$$

Pak je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \tau} = r \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \sqrt{\frac{r}{D}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sqrt{\frac{r}{D}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{r}{D} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};$$

po dosazení do rovnice a vykrácení parametru  $r$  dostaneme lineární parabolickou rovnici bez parametrů ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + u.$$

Bez újmy na obecnosti se tedy můžeme zabývat rovnicí bez parametrů

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \tag{2.100}$$

v níž opět čas označujeme  $t$  a prostorovou proměnnou  $x$ . Tato rovnice je lineární a splňuje princip superpozice (o tom se lze přesvědčit přímým výpočtem) – množina jejích řešení tvoří vektorový prostor. Zejména nulová funkce  $u_0 \equiv 0$  je řešením rovnice (2.100). Toto řešení je současně *stationární* (nezávisí na čase  $t$ ) a *prostorově homogenní* (nezávisí na prostorové proměnné  $x$ ).

Pokud k rovnici (2.100) přidáme nějaké homogenní okrajové podmínky, bude množina řešení příslušné okrajové úlohy také tvořit vektorový prostor; ten je průnikem prostoru řešení rovnice (2.100) a prostoru funkcí, které splňují okrajové podmínky.

#### A. Rovnice na úsečce

Budeme vyšetřovat některé kvalitativní vlastnosti řešení rovnice (2.100) uvažované pro  $t > 0$  a  $x \in (0, \ell)$ , kde  $\ell$  je nějaké kladné číslo. Přitom budeme požadovat splnění homogenních okrajových

podmínek. Abstraktněji řečeno, budeme se zabývat některými vlastnostmi zaměření afinního prostoru řešení okrajových a počátečních úloh pro rovnici (2.100).

### Rovnice s Neumannovými okrajovými podmínkami

Uvažujme rovnici (2.100) na intervalu  $(0, \ell)$  prostorové proměnné s homogenními Neumannovými okrajovými podmínkami

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell), \quad t > 0. \quad (2.101)$$

Podle 2.2.1 a 2.3.6 je řešení úlohy (2.100), (2.101) dáno řadou

$$u(t, x) = a_0 e^t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp \left[ \left( 1 - \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2 \right) t \right] \cos \frac{k\pi}{\ell} x,$$

kde konstanty  $a_0, a_1, a_2, \dots$  závisí na počáteční funkci  $u(0, \cdot)$ ; také lze říci, že volba konstant  $a_0, a_1, a_2, \dots$  určuje počáteční funkci.

Zejména tedy vidíme, že úloha (2.100), (2.101) má prostorově homogenní řešení tvaru

$$u_h(t, x) = a_0 e^t.$$

Pro tato řešení platí  $u_h(0, \cdot) \equiv a_0$ , a pokud  $a_0 \neq 0$ , pak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_h(t, x)| = \infty, \quad \text{pro všechna } x \in (0, \ell).$$

Úloha (2.100), (2.101) má vždy řešení, které roste nade všechny meze pro  $t \rightarrow \infty$ , i když je jeho počáteční hodnota jakkoliv malá (ale nenulová).

### Rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami

Rovnice (2.100) na intervalu  $(0, \ell)$  prostorové proměnné s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$u(t, 0) = 0 = u(t, \ell), \quad t > 0, \quad (2.102)$$

má podle 2.2.1 a 2.3.6 řešení ve tvaru řady

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp \left[ \left( 1 - \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2 \right) t \right] \sin \frac{k\pi}{\ell} x, \quad (2.103)$$

kde konstanty  $a_k$  jsou určeny počáteční funkcí  $u(0, \cdot)$ , nebo ji určují. Budeme o ní předpokládat, že je ohraničená a integrabilní.

Ve výrazu na pravé straně rovnosti (2.103) se objevuje poměr  $\pi/\ell$ . Proto rozlišíme tři možnosti velikosti délky  $\ell$ .

- $\ell < \pi$ : V tomto případě pro každé  $k = 1, 2, 3, \dots$  platí

$$1 - \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2 < 1 - k^2 \leq 0.$$

Odtud dále plyne, že všechny exponenciální funkce ve vyjádření (2.103) pro  $t \rightarrow \infty$  klesají k nule, takže

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in (0, \ell).$$

- $\ell = \pi$ : Řešení (2.103) můžeme přepsat do tvaru

$$u(t, x) = a_1 \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \exp \left[ \left( 1 - \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2 \right) t \right] \sin \frac{k\pi}{\ell} x.$$

Opět všechny exponenciální funkce monotonně konvergují k 0 pro  $t \rightarrow \infty$ , takže

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = a_1 \sin x \quad \text{pro všechna } x \in (0, \ell).$$

Ještě si můžeme všimnout (a přesvědčit se o tom přímým výpočtem), že pro libovolnou hodnotu  $a_1$  je funkce  $u_n$  daná vztahem

$$u_n(t, x) = a_1 \sin x$$

řešením úlohy (2.100), (2.102). Toto řešení je stacionární (nezávisí na čase  $t$ ) a prostorově nehomogenní (závisí na prostorové proměnné  $x$ ).

- $\ell > \pi$ : Úloha (2.100), (2.102) má (mimo jiné) řešení dané formulí

$$u(t, x) = a_1 \exp \left[ \left( 1 - \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \right) t \right] \sin \frac{\pi}{\ell} x.$$

Přitom

$$1 - \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 > 1,$$

takže pro libovolnou hodnotu  $a_1 \neq 0$  (ať je absolutní hodnota  $a_1$  sebemenší) platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, x)| = \infty \quad \text{pro všechna } x \in (0, \ell).$$

### Rovnice s Robinovými okrajovými podmínkami

Rovnice (2.100) s homogenními Robinovými okrajovými podmínkami

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \alpha u(t, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = -\alpha u(t, \ell), \quad t > 0, \quad (2.104)$$

kde  $\alpha > 0$  má podle 2.2.1 a 2.3.6 řešení ve tvaru řady

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{(1-\lambda_k)t} \left( \cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{\alpha}{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} x \right), \quad (2.105)$$

kde vlastní hodnoty  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  jsou kladné kořeny rovnice

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cotg \sqrt{\lambda} \ell \quad (2.106)$$

uspořádané podle velikosti,  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ . Konstanty  $a_k$  jsou opět určeny počáteční funkcí  $u(0, \cdot)$ , nebo ji určují.

Z vyjádření (2.105) vidíme, že hodnota  $\lambda_1$  určuje chování řešení úlohy (2.100), (2.104). Pokud  $\lambda_1 > 1$  (a tedy všechna  $\lambda_k > 1$ ), pak

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in (0, \ell).$$

Pokud  $\lambda_1 < 1$ , pak má úloha (2.100), (2.104) řešení

$$u(t, x) = e^{(1-\lambda_1)t} \left( \cos \sqrt{\lambda_1} x + \frac{\alpha}{\lambda_1} \sin \sqrt{\lambda_1} x \right),$$

pro něž platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, 0) = \infty$ . Úloha tedy má neokraňované řešení.

Pokud  $\lambda_1 = 1$ , pak má úloha (2.100), (2.104) neomezeně mnoho stacionárních prostorově nehomogenních řešení tvaru

$$u_n(t, x) = a_1 (\cos x + \alpha \sin x),$$

kde  $a_1$  jsou nenulové konstanty.

Na rovnici (2.106) se můžeme dívat jako na implicitní zápis funkce  $\lambda$  jedné reálné proměnné  $\ell$ ,  $\lambda = \lambda(\ell)$ . Najdeme její derivaci  $\lambda'$ . Platí

$$\frac{d}{d\ell} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \right) = \lambda' \frac{\lambda + \alpha^2}{2\alpha\sqrt{\lambda}^3} \quad \text{a} \quad \frac{d}{d\ell} 2 \cotg \sqrt{\lambda} \ell = -\lambda' \frac{\ell}{\sqrt{\lambda} (\sin \sqrt{\lambda} \ell)^2} - \frac{2\sqrt{\lambda}}{(\sin \sqrt{\lambda} \ell)^2}.$$

Porovnáním výrazů na pravých stranách těchto rovností vypočítáme

$$\lambda' = -\frac{4\alpha\lambda^2}{2\alpha\lambda\ell + (\lambda + \alpha^2) (\sin \sqrt{\lambda} \ell)^2},$$

a to znamená, že  $\lambda' < 0$ , takže funkce  $\lambda$  je klesající. Je-li tedy  $\lambda = 1$  pro nějakou hodnotu nezávisle proměnné  $\ell$ , pak nalevo od této hodnoty je  $\lambda > 1$  a napravo od ní je  $\lambda < 1$ .

Pro analýzu chování řešení úlohy (2.100), (2.104) při  $t \rightarrow \infty$  v závislosti na délce  $\ell$  definičního intervalu tedy stačí najít kritickou hodnotu  $\ell_{\text{krit}}$  takovou, že  $\lambda(\ell_{\text{krit}}) = 1$ ; pak pro  $\ell < \ell_{\text{krit}}$  všechna řešení úlohy při  $t \rightarrow \infty$  vymizí, pro  $\ell > \ell_{\text{krit}}$  bude existovat neohraničené řešení.

Dosazením  $\ell_{\text{krit}}$  za  $\ell$  v rovnici (2.106) dostaneme rovnici

$$\frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} = \cotg \ell_{\text{krit}},$$

kteřá má řešení  $\ell_{\text{krit}} = 2 \arctg \alpha$ , jak se snadno přesvědčíme přímým dosazením.

### Shrnutí

Ještě si povšimněme, že Neumannovy podmínky (2.101) jsou speciálním případem Robinových podmínek (2.104) pro  $\alpha = 0$ . Robinovy podmínky s  $\alpha > 0$  můžeme přepsat na tvar

$$u(t, 0) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0), \quad u(t, \ell) = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell), \quad t > 0; \quad (2.107)$$

z něho vidíme, že Dirichletovy podmínky (2.102) jsou limitním případem Robinových podmínek pro  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Výsledky provedené diskuse řešení úlohy (2.100), (2.104)/(2.107) s  $\ell > 0$  můžeme zapsat:

Nechť  $0 \leq \alpha \leq \infty$ .

- Je-li  $\ell < 2 \arctg \alpha$ , pak pro každé řešení  $u$  úlohy platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in [0, \ell],$$

tj. nulové řešení rovnice (2.100) je *atraktivující*.

- Je-li  $\ell = 2 \arctg \alpha$ , pak existují prostorově nehomogenní stacionární řešení úlohy; tato řešení jsou tvaru

$$u_n(t, x) = a_1 (\cos x + \alpha \sin x) = a_1 \sqrt{1 + \alpha^2} \cos(x - \arctg \alpha),$$

kde  $a_1 \neq 0$ .

- Je-li  $\ell > 2 \arctg \alpha$ , pak existuje neohraničené řešení úlohy; podrobněji, existuje řešení  $u$  takové, že pro libovolné  $\varepsilon > 0$  je

$$\max \{|u(t, x)| : x \in [0, \ell]\} < \varepsilon \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \max \{|u(t, x)| : x \in [0, \ell]\} = \infty.$$

## B. Rovnice na přímce – putující vlna

Přímým výpočtem se můžeme snadno přesvědčit, že rovnice (2.100) má řešení v exponenciálním tvaru

$$u(t, x) = Ae^{-\mu x + (1 + \mu^2)t}, \quad (2.108)$$

kteřá jsou definována pro všechna  $t, x \in \mathbb{R}$ ; parametry  $A$  a  $\mu$  jsou libovolná reálná čísla. Je-li  $\mu = 0$ , dostaneme prostorově homogenní řešení (nezávisající na prostorové proměnné  $x$ ) ve tvaru exponenciální funkce.

Nechť  $\mu \neq 0$  a označme

$$c = \frac{1 + \mu^2}{\mu}, \quad U(\zeta) = Ae^{-\mu\zeta}.$$

Pak řešení (2.108) můžeme přepsat jako

$$u(t, x) = U(x - ct) \quad (2.109)$$

a interpretovat tak, že graf počáteční funkce  $u(0, \cdot) = U$  se pohybuje konstantní rychlostí  $c$ ; je-li  $\mu > 0$ , pohybuje se doprava (v kladném směru osy  $x$ ), je-li  $\mu < 0$ , tak doleva. Proto se řešení rovnice (2.100), které lze zapsat ve tvaru (2.109) někdy nazývá *putující vlna* (travelling wave).

Rychlost  $c$  postupu putující vlny závisí na parametru  $\mu$ . Vyšetřením průběhu funkce

$$c = c(\mu) = \frac{1 + \mu^2}{\mu}$$

zjistíme, že pro  $\mu > 0$  je  $c \geq 2$ , pro  $\mu < 0$  je  $c \leq -2$ . Minimální rychlost putující vlny tvaru (2.108) (bez ohledu na směr postupu) je  $c = c_{\min} = 2$ .

K rychlosti putující vlny se lze dopracovat i jiným, obecnějším, způsobem. Hledejme, pro jaké hodnoty  $c$  má rovnice (2.100) řešení tvaru (2.109), kde  $U$  je monotonní funkce jedné proměnné.

Řešení musí splňovat rovnici (2.100). Jinak řečeno, poněvadž

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -cU'(x - ct), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = U''(x - ct),$$

musí funkce  $U$  splňovat obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$-cU' = U'' + U,$$

po úpravě

$$U'' + cU' + U = 0.$$

Aby tato rovnice měla monotonní řešení, musí být kořeny její charakteristické rovnice  $\lambda^2 + c\lambda + 1 = 0$  reálné, tj.

$$c^2 - 4 \geq 0.$$

Minimální rychlost putující vlny (bez ohledu na orientaci) je opět  $c_{\min} = 2$ .

### Rovnice s podmínkami integrability

Řešení rovnice (2.100) definované pro  $x \in \mathbb{R}$  ve tvaru (2.108) nesplňuje podmínky integrovatelnosti

$$\int_{-\infty}^0 |u(t, x)| dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} |u(t, x)| dx < \infty, \quad \text{pro } t > 0. \quad (2.110)$$

Můžeme ho však modifikovat. Pripustíme pouze nezáporné hodnoty parametru  $\mu$ , položíme

$$u(t, x) = Ae^{-\mu|x| + (1 + \mu^2)t} = Ae^{(1 + \mu^2)t} e^{-\mu|x|} \quad (2.111)$$

a lehce ověříme, že se skutečně jedná o řešení úlohy (2.100), (2.110). Můžeme ho interpretovat jako dvě putující vlny symetrické kolem počátku, které se od něho vzdalují rychlostí

$$c = \frac{1 + \mu^2}{\mu} \geq 2.$$

Ještě připomeňme, že v 2.3.3 jsme také našli jedno explicitní řešení úlohy (2.100), (2.110); konkrétně se jedná o řešení (2.65) s  $a = r = 1$ , tj. řešení tvaru

$$u(t, x) = Ae^t \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \quad (2.112)$$

Ukázali jsme tam také, že pro dostatečně velký čas  $t$  se hodnota  $x$  prostorové proměnné, pro niž platí  $|u(t, x)| = \delta > 0$ , pohybuje konstantní rychlostí 2, tj. tou nejmenší možnou (sr. formuli (2.66) s  $a = r = 1$ ).

Obě formule (2.111) a (2.112) jsou vlastně stejného typu – nějaká exponenciální funkce času násobená hustotou nějakého rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou 0; ve formuli (2.112) se jedná o normální rozdělení s časově proměnným rozptylem  $\frac{1}{2}t^2$ , ve formuli (2.111) se jedná o Laplaceovo (dvojitě exponenciální) rozdělení s konstantním rozptylem  $1/\mu^2$ .

## 2.4.2 Fisherova-Kolmogorovova rovnice

Jedná se o rovnici reakce-difúze s nelineárním reakčním členem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u). \quad (2.113)$$

Tato rovnice modeluje šíření výhodné allele v populaci<sup>7</sup>, nebo šíření populace v prostoru, přičemž velikost populace roste logisticky.

Nebudeme hledat řešení rovnice (2.113) splňující obecné počáteční nebo okrajové podmínky. Omezíme se na některá speciální řešení a jejich některé vlastnosti, které jsou užitečné pro aplikace.

### A. Rovnice na úsečce

Budeme hledat nezáporné *stacionární*, tj. na čase nezávislé, řešení rovnice (2.113) definované na konečném intervalu  $(0, \ell)$ , které splňuje Dirichletovy okrajové podmínky

$$u(t, 0) = 0 = u(t, \ell), \quad t \geq 0. \quad (2.114)$$

Jinak řečeno, hledáme takové řešení  $u : [0, \infty) \times [0, \ell] \rightarrow [0, \infty)$  úlohy (2.113), (2.114), že pro libovolné časové okamžiky  $t_1, t_2 \geq 0$  a libovolný bod  $x \in [0, \ell]$  platí  $u(t_1, x) = u(t_2, x)$  (nebo ekvivalentně, pro všechna  $t \geq 0$ ,  $x \in [0, \ell]$  platí  $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = 0$ ). Pak lze zřejmě psát

$$u(t, x) = U(x)$$

pro  $t \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq \ell$ , kde  $U$  je dvakrát diferencovatelná funkce definovaná na intervalu  $[0, \ell]$ , která splňuje obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$U'' + U(1 - U) = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad (2.115)$$

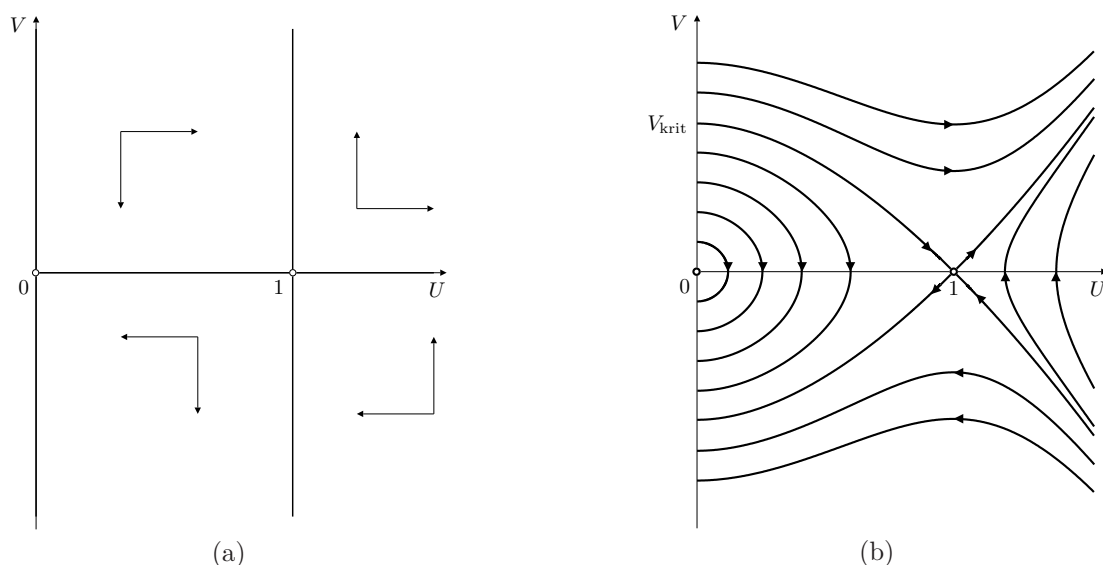
a okrajovou podmínku

$$U(0) = 0 = U(\ell). \quad (2.116)$$

Okrajová úloha (2.115), (2.116) pro obyčejnou diferenciální rovnici má zřejmě *prostorově homogenní*, tj. konstantní, řešení  $U \equiv 0$ . Druhé konstantní řešení  $U \equiv 1$  rovnice (2.115) nespĺňuje okrajovou podmínku (2.116). Budeme hledat *prostorově nehomogenní* řešení rovnice (2.115), tj. takové, které má nenulovou derivaci podle prostorové proměnné  $x$ .

<sup>7</sup> „Výhodnou allelou“ se rozumí allele, která při daném selekčním tlaku zajišťuje nejvyšší zdatnost (fitness).





Obrázek 2.2: Stavový prostor (a) a trajektorie (b) systému (2.117)

Rovnici druhého řádu (2.115) převedeme standardním způsobem na systém rovnic prvního řádu. Položíme  $V = U'$  a dostaneme autonomní dvourozměrný systém

$$\begin{aligned} U' &= V \\ V' &= U(U - 1). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Provedeme kvalitativní analýzu tohoto systému. Funkce  $U$  má být nezáporná,  $U \geq 0$ . Tato funkce má splňovat okrajové podmínky (2.116) a nemá být identicky nulová; to znamená, že v nějakém bodě musí být kladná, někde nalevo od takového bodu pak bude rostoucí (a tedy její derivace tam bude  $V$  kladná), někde napravo klesající. Za stavový prostor systému (2.117) lze tedy vzít množinu  $\Omega = [0, \infty) \times \mathbb{R}$ .

Systém (2.117) má jedinou  $U$ -nulklinu  $V = 0$ , nad osou  $U$  jsou trajektorie orientovány doprava (v kladném směru osy  $U$ ), pod ní doleva. Dále má systém dvě  $V$ -nulkliny  $U = 0$  (tvořící hranici stavového prostoru  $\Omega$ ) a  $U = 1$ , pro  $0 < U < 1$  jsou trajektorie orientovány dolů (v záporném směru osy  $V$ ), pro  $U > 1$  jsou orientovány nahoru. Stavový prostor je znázorněn na obr. 2.2(a). Vidíme, že systém (2.117) má dva rovnovážné body  $(0, 0)$  a  $(1, 0)$ . Jeho variační matice je

$$J(U, V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2U - 1 & 0 \end{pmatrix},$$

takže platí

$$\det J(1, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0, \quad \text{tr } J(0, 0) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

To znamená, že rovnovážný bod  $(1, 0)$  je sedlo (což je vidět i z obrázku), rovnovážný bod  $(0, 0)$  ležící na hranici stavového prostoru  $\Omega$  není hyperbolický.

Vydělením rovnic systému (2.117) dostaneme obyčejnou rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými

$$\frac{dV}{dU} = \frac{U(U - 1)}{V},$$

kteřá má obecné řešení

$$3(V^2 + U^2) - 2U^3 = \text{const.} \quad (2.118)$$

Touto rovností jsou implicitně zadány trajektorie systému (2.117), výraz na její levé straně je jeho invariantem; označíme ho  $\Phi(U, V)$ . Zřejmě platí  $\Phi(U, V) = \Phi(U, -V)$  pro všechna  $(U, V) \in \Omega$ . To znamená, že trajektorie systému (2.117) jsou symetrické podle osy  $U$ .

Provedená analýza již umožňuje načrtnout trajektorie systému (2.117), viz obr. 2.2(b). Trajektorie, které současně vyjadřují řešení úlohy (2.115), (2.116), začínají na hranici stavového prostoru  $\Omega$  v kladné části osy  $V$  (řešení úlohy „startuje“ pro hodnotu nezávisle proměnné  $x = 0$  ve funkční hodnotě  $U = 0$  a má kladnou derivaci) a mělo by skončit (pro hodnotu nezávisle proměnné  $x = \ell$ ) na hranici  $\Omega$  v záporné části osy  $V$  (tam je  $U(\ell) = 0$ ,  $V'(\ell) < 0$ ). Vidíme ovšem, že pro jakousi kritickou hodnotu  $V = V_{\text{krit}} > 0$  trajektorie skončí v sedle  $(1, 0)$ . Odpovídající řešení rovnice (2.115) je tedy kladné pro každé  $x > 0$  a nemůže proto splnit druhou okrajovou podmínku (2.116) pro konečnou hodnotu  $\ell$ ; také můžeme říci, že řešení rovnice (2.115) s počáteční podmínkou  $U(0) = 0$ ,  $U'(0) = V_{\text{krit}}$  je pro  $x > 0$  kladné a platí pro ně  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 1$ .

Trajektorie systému (2.117), které začínají v bodě  $(0, V_0)$  takovém, že  $0 < V_0 < V_{\text{krit}}$ , skončí pro jistou konečnou hodnotu  $x_0 > 0$  na hranici stavového prostoru  $\Omega$  v bodě  $(0, -V_0)$ . Těmto trajektoriím odpovídají řešení okrajové úlohy (2.115), (2.116) s  $\ell = x_0$ . Pro taková řešení vždy platí  $U(x) < 1$  pro všechna  $x \in (0, \ell)$ ; přitom maximální hodnota řešení  $U$  roste s rostoucí počáteční hodnotou  $V(0) = U'(0)$ . Poněvadž hodnoty funkce  $U$  jsou menší než 1, plyne z rovnice (2.115), že

$$U''(x) = U(x)(U(x) - 1) < 0$$

pro  $x \in (0, \ell)$ , takže funkce  $U$  je ryze konkávní.

Nekonstantním řešením okrajové úlohy (2.115), (2.116) odpovídají právě takové trajektorie systému (2.117), které začínají uvnitř úsečky  $\{(0, V) : 0 < V < V_{\text{krit}}\}$ . Trajektorie systému (2.117), které zanikají v sedle  $(1, 0)$  nebo z něho vycházejí, jsou implicitně dány rovnicí (2.118) s  $const = 1$ . Odtud vypočítáme, že  $V_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \doteq 0,57735$ . Dále můžeme upřesnit, že stavový prostor systému (2.117), v němž jsou trajektorie odpovídající řešením úlohy (2.115), (2.116) je množina

$$\left\{ (U, V) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq U \leq 1, |V| < \sqrt{\frac{1}{3}(1 + 2U^3 - 3U^2)} \right\}.$$

Ještě vyšetříme trajektorie systému (2.117) v okolí počátku. Je-li hodnota  $U$  „malá“,  $U \ll 1$ , pak je hodnota  $U^2$  „zanedbatelná“ vzhledem k  $U$ ,  $U^2 \ll U$ . Řešení systému (2.117) v okolí počátku se tedy (podle věty o spojitě závislosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic na počátečních podmínkách a parametrech) „chová podobně“ jako řešení lineárního systému

$$\begin{aligned} U' &= V \\ V' &= -U. \end{aligned} \tag{2.119}$$

Řešení tohoto systému s počátečními podmínkami  $U(0) = 0$ ,  $V(0) = \varepsilon$ , kde  $\varepsilon > 0$  je „malé“ číslo, je dáno rovností

$$U(x) = \varepsilon \sin x.$$

Tato funkce je kladná pro  $x \in (0, \pi)$  a pro  $x_0 = \ell = \pi$  je nulová. Z tohoto výsledku nahlédneme, že řešení rovnice (2.115), které „startuje“ v bodě 0 se sebemenší kladnou derivací (tj. řešení s počáteční podmínkou  $U(0) = 0$ ,  $U'(0) = \varepsilon$ ) „skončí“ v 0 až ve vzdálenosti  $\pi$ . Jinak řečeno, okrajová úloha (2.113), (2.114) může mít prostorově nehomogenní nezáporné stacionární řešení pouze pro  $\ell > \pi$ .

### Stabilita stacionárních řešení

Našli jsme dvě nezáporná stacionární řešení Dirichletovy okrajové úlohy (2.113), (2.114) pro Fisherovu-Kolmogorovovu rovnici. Jsou to triviální konstantní řešení  $u_0 \equiv 0$  a nekonečným řešením

$$u_n = u_n(t, x) = U(x),$$

kde  $U$  je řešení okrajové úlohy (2.115), (2.116) pro obyčejnou diferenciální rovnici. Vyšetříme stabilitu těchto stacionárních řešení, tj. podíváme se, jak se v čase chová řešení úlohy (2.113), (2.114), které se na počátku „liši málo“ od stacionárního.

**Prostorově homogenní řešení:** Nejprve uvažujme „malou“ odchylku  $v$  od nulového řešení. Funkce  $v$  musí splňovat rovnici (2.113) a poněvadž  $v$  je „malá“, zanedbáme v ní kvadratický člen

$v^2$ . Funkce  $v$  je tedy řešením počáteční úlohy

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v, & t > 0, 0 < x < \ell, \\ v(t, 0) &= 0 = v(t, \ell), & t > 0.\end{aligned}$$

Jedná se tedy o Dirichletovu úlohu pro lineární rovnici reakce-difúze na úsečce, kterou jsme vyšetřovali v 2.4.1. Můžeme tedy říci, že nulové řešení úlohy (2.113), (2.114) je asymptoticky stabilní pro  $\ell < \pi$  a nestabilní pro  $\ell > \pi$ .

**Prostorově nehomogenní řešení:** Pokud je  $\ell > \pi$ , pak má úloha (2.113), (2.114) nekonzstantní stacionární řešení  $u_n$ . Uvažujme řešení této úlohy, které se „málo“ liší od  $u_n$ , tedy řešení tvaru

$$U(x) + w(t, x), \quad (2.120)$$

kde odchylka  $w$  je nějaká „malá“ funkce. Platí

$$\frac{\partial}{\partial t}(U + w) = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(U + w) = U'' + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = U(U - 1) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

podle (2.115). Po dosazení funkce (2.120) do pravé strany rovnice (2.113) tak dostaneme

$$U(U - 1) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (U + w)(1 - U - w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 - 2U)w - w^2.$$

Poněvadž odchylku považujeme za „malou“, zanedbáme kvadratický člen  $w^2$ . Odchylku  $w$  tedy považujeme za řešení okrajové úlohy

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 - 2U)w, & t > 0, 0 < x < \ell, \\ w(t, 0) &= 0 = w(t, \ell), & t > 0.\end{aligned} \quad (2.121)$$

Tuto úlohu budeme řešit Fourierovou metodou, tj. řešení budeme hledat ve tvaru

$$w(t, x) = T(t)X(x).$$

Po dosazení do rovnice dostaneme

$$T'X = TX'' + (1 - 2U)TX,$$

neboli

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + 1 - 2U.$$

Výraz na levé straně nezávisí na prostorové proměnné  $x$ , výraz na pravé straně nezávisí na čase  $t$ ; oba výrazy jsou tedy rovny nějaké konstantě, řekněme  $-\lambda$ . Funkce  $T$  je tedy řešením obyčejné lineární rovnice prvního řádu

$$T' = -\lambda T, \quad (2.122)$$

a funkce  $X$  je řešením obyčejné lineární rovnice druhého řádu

$$-X'' - (1 - 2U)X = \lambda X. \quad (2.123)$$

Aby byly splněny okrajové podmínky pro funkci  $w$  v úloze (2.121), musí platit

$$X(0) = 0 = X(\ell). \quad (2.124)$$

Funkce  $X$  je tedy řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (2.123), (2.124). Podle Věty 3 v C.2 existují vlastní hodnoty  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$  a k nim příslušné vlastní funkce  $X_1, X_2, X_3, \dots$

Přitom funkce  $X_1$  na intervalu  $(0, \ell)$  nemění znaménko. Ukážeme, že  $\lambda_1 > 0$  (a v důsledku toho jsou všechny vlastní hodnoty kladné).

Funkce  $X_1$  splňuje rovnici (2.123) s  $\lambda = \lambda_1$ , tedy pro ni platí

$$X_1''(x) + (\lambda_1 + 1 - 2U(x))X_1(x) = 0.$$

Tuto rovnost vynásobíme výrazem  $U(x)$  a upravíme na tvar

$$U(x)X_1''(x) - U''(x)X_1(x) = U(x)^2X_1(x) - \lambda_1U(x)X_1(x);$$

využili jsme toho, že funkce  $U$  splňuje rovnici (2.115). Levou stranu zintegrujeme v mezích od 0 do  $\ell$  a využijeme faktu, že funkce  $U$ , resp.  $X_1$  splňuje okrajové podmínky (2.116), resp. (2.124). Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^\ell (U(x)X_1''(x) - U''(x)X_1(x))dx &= \\ &= [U(x)X_1'(x)]_0^\ell - \int_0^\ell U'(x)X_1'(x)dx - [U'(x)X_1(x)]_0^\ell + \int_0^\ell U'(x)X_1'(x)dx = 0. \end{aligned}$$

To znamená, že po integraci pravé strany ve stejných mezích obdržíme rovnost

$$\int_0^\ell U(x)^2X_1(x)dx = \lambda_1 \int_0^\ell U(x)X_1(x)dx.$$

Funkce  $U$  je uvnitř intervalu  $(0, \ell)$  kladná, funkce  $X_1$  je zde nenulová a nemění znaménko. To znamená, že oba integrály v poslední rovnosti jsou nenulové a mají stejné znaménko. Z toho dále plyne, že  $\lambda_1 > 0$ .

Sturmova-Liouvilleova úloha (2.123), (2.124) má tedy všechny vlastní hodnoty kladné. Jelikož řešení rovnice (2.122) s  $\lambda = \lambda_k$  je dáno rovností

$$T_k(t) = b_k e^{-\lambda_k t},$$

kde  $b_k$  je nějaká konstanta (závislá na počáteční hodnotě), dostáváme řešení okrajové úlohy (2.121) ve tvaru řady

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\lambda_k t} X_k(x).$$

Poněvadž jsou všechna  $\lambda_k$  kladná, jsou všechny exponenciální funkce  $e^{-\lambda_k t}$  klesající s limitou 0, a proto platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t, x) = 0$$

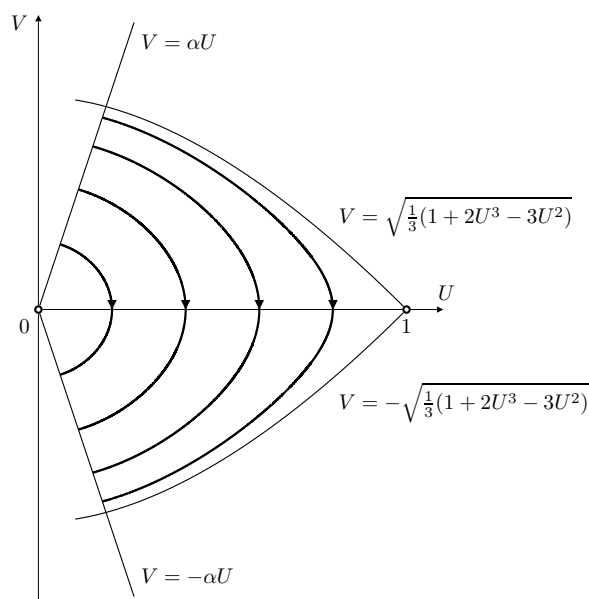
pro všechna  $x \in [0, \ell]$ . To znamená, že „malá“ odchylka od stacionárního řešení  $u_n$  v průběhu času neroste a v limitě  $t \rightarrow \infty$  vymizí. Řešení  $u_n$  je tedy asymptoticky stabilní.

Bifurkace v úloze (2.113), (2.114)

Na úlohu (2.113), (2.114) se můžeme dívat jako na úlohu s jedním kladným parametrem  $\ell$ . Dosažené výsledky shrneme:

- Je-li  $\ell < \pi$ , pak má úloha (2.113), (2.114) jediné stacionární řešení  $u_0 \equiv 0$ , které je asymptoticky stabilní.
- Je-li  $\ell > \pi$ , pak má úloha (2.113), (2.114) dvě stacionární řešení. Prostorově homogenní řešení  $u_0 \equiv 0$  je nestabilní. Prostorově nehomogenní řešení  $u_n$  je dáno výrazem

$$u_n(t, x) = U(x),$$



Obrázek 2.3: Stavový prostor autonomního systému (2.117) a trajektorie odpovídající stacionárním řešením úlohy (2.113), (2.125)

kde funkce  $U$  je řešením okrajové úlohy (2.115), (2.116). Je to nezáporná ryze konkávní funkce taková, že

$$\max\{U(x) : 0 \leq x \leq \ell\} < 1.$$

Stacionární řešení  $u_n$  je asymptoticky stabilní.

### Rovnice s Robinovými nebo Neumannovými podmínkami

Nyní se podívejme na řešení rovnice (2.113) na intervalu  $(0, \ell)$ , které splňuje okrajové podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \alpha u(t, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = -\alpha u(t, \ell), \quad t > 0, \quad (2.125)$$

kde  $\alpha$  je nezáporné číslo. Pokud  $\alpha > 0$ , jedná se o Robinovy podmínky, pokud  $\alpha = 0$ , jedná se o Neumannovy podmínky.

Opět budeme hledet stacionární, prostorově homogenní nebo nehomogenní, řešení rovnice (2.113) s okrajovou podmínkou (2.125). V podstatě můžeme opakovat provedenou analýzu úlohy (2.113), (2.114). Prostorově homogenní řešení je nulové. Prostorově nehomogenní řešení bude opět řešením obyčejné rovnice (2.115), tentokrát s okrajovou podmínkou

$$U'(0) = \alpha U(0), \quad U'(\ell) = -\alpha U(\ell). \quad (2.126)$$

Počáteční podmínky pro řešení systému (2.117) proto budou

$$V(0) = \alpha U(0), \quad V(\ell) = -\alpha U(\ell). \quad (2.127)$$

Trajektorie systému (2.117) odpovídající stacionárním řešením úlohy (2.113), (2.125) leží proto v jistém zúžení stavového prostoru pro systém (2.117), konkrétně v množině

$$\left\{ (U, V) : 0 \leq U \leq 1, |V| \leq \alpha U, |V| < \sqrt{\frac{1}{3}(1 + 2U^3 - 3U^2)} \right\},$$

viz obr. 2.3.

Trajektorie v okolí počátku jsou opět (přibližně) trajektoriemi lineárního systému (2.119), avšak v případě  $\alpha > 0$  s počáteční podmínkou tvaru

$$U(0) = \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad V(0) = \varepsilon. \quad (2.128)$$

První složka řešení úlohy (2.119), (2.128) je dána rovností

$$U(x) = \frac{\varepsilon}{\alpha}(\cos x + \alpha \sin x) = \frac{\varepsilon\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \cos(x - \operatorname{arctg} \alpha).$$

Odtud plyne, že hodnota  $U(x_0)$  je stejná jako  $U(0)$  pro  $x_0 = 2 \operatorname{arctg} \alpha$  (tj. trajektorie začínající v bodě  $(\varepsilon/\alpha, \varepsilon)$  skončí v bodě  $(\varepsilon/\alpha, -\varepsilon)$  pro  $x_0 = 2 \operatorname{arctg} \alpha$ ). Z toho je vidět, že minimální hodnota  $\ell$ , pro niž má úloha (2.113), (2.125) prostorově nehomogenní stacionární řešení je větší než  $2 \operatorname{arctg} \alpha$ ; použijeme označení

$$\ell_{\text{krit}}(\alpha) = 2 \operatorname{arctg} \alpha.$$

Pro  $\alpha = 1$  je  $\ell_{\text{krit}} = \frac{1}{2}\pi$ .

Ještě si připomeňme, že Dirichletovy podmínky (2.114) jsou mezním případem Robinových podmínek (2.125) pro  $\alpha \rightarrow \infty$ . Platí

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ell_{\text{krit}}(\alpha) = 2 \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \alpha = \pi$$

v souladu s předchozím výsledkem pro Dirichletovu úlohu (2.113), (2.114).

V případě Neumannových podmínek (2.125) s  $\alpha = 0$  zdegeneruje stavový prostor systému (2.117) na úsečku

$$\{(U, 0) : 0 \leq U \leq 1\},$$

tj.  $V = U' \equiv 0$  a úloha (2.117), (2.127) má tedy pouze řešení, která mají první složku konstantní. Jinak řečeno, úloha (2.113), (2.125) s Neumannovými okrajovými podmínkami,  $\alpha = 0$ , má jediné konstantní, tj. prostorově homogenní, stacionární řešení. Podle rovnice (2.115) jsou tato řešení  $U_0 \equiv 0$  a  $u_n \equiv 1$ . Tato stacionární řešení existují pro libovolnou nezápornou hodnotu  $\ell$ ; to je v souladu s vlastností

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \ell_{\text{krit}}(\alpha) = 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \alpha = 0.$$

Vyšetřit stabilitu nalezených stacionárních řešení úlohy (2.113), (2.125) lze analogickým způsobem jako v případě úlohy (2.113), (2.114) s Dirichletovými okrajovými podmínkami.

Získané výsledky diskuse stacionárních řešení úlohy (2.113), (2.125) shrneme:

- Je-li  $\alpha = 0$ , pak jediná stacionární řešení úlohy (2.113), (2.125) jsou řešení prostorově homogenní  $u_0 \equiv 0$ ,  $u_1 \equiv 1$ . Přitom  $u_0$  je nestabilní a  $u_1$  je asymptoticky stabilní.
- Je-li  $\alpha > 0$ , pak má úloha (2.113), (2.125) jediné prostorově homogenní stacionární řešení  $u_0 \equiv 0$ . Toto řešení je pro  $\ell < 2 \operatorname{arctg} \alpha$  asymptoticky stabilní, pro  $\ell > 2 \operatorname{arctg} \alpha$  je nestabilní.
- Je-li  $\alpha > 0$  a  $\ell > 2 \operatorname{arctg} \alpha$ , pak má úloha (2.113), (2.125) prostorově nehomogenní stacionární řešení

$$u_n(t, x) = U(x),$$

kde  $U$  je řešením okrajové úlohy (2.115), (2.126); je to nezáporná konkávní funkce taková, že

$$\max\{U(x) : 0 \leq x \leq \ell\} < 1.$$

Toto řešení je asymptoticky stabilní.

## B. Rovnice na přímce – putující vlna

Budeme hledat nezáporné řešení rovnice (2.113) definované pro každé  $t > 0$  na neomezeném intervalu  $(-\infty, \infty)$ , které má tvar putující vlny

$$u(t, x) = U(x - ct), \quad (2.129)$$

kde  $c$  je nějaká kladná konstanta, vyjadřující rychlost této vlny. Funkce  $U$  jedné proměnné vyjadřuje tvar putující vlny. Budeme po ní požadovat

$$U(\xi) \geq 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} U(\xi) = 0. \quad (2.130)$$

Takové řešení modeluje invazi populace do neobsazeného prostředí o jednotkové kapacitě (úživnosti), nebo šíření výhodné allele v prostorově rozložené populaci.

Řešení tvaru (2.129) musí splňovat rovnici (2.113), tedy

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} U(x - ct) = -cU'(x - ct), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x - ct) = U''(x - ct),$$

a po dosazení do rovnice (2.113)

$$-cU'(x - ct) = U''(x - ct) + U(x - ct)(1 - U(x - ct)).$$

To znamená, že funkce  $U$  je řešením autonomní rovnice druhého řádu

$$U'' = -cU' + U(U - 1).$$

Tuto rovnici přepíšeme standardním způsobem jako dvojrozměrný systém prvního řádu, tj. zavedeme novou novou funkci  $V$  vztahem  $V(\xi) = U'(\xi)$  pro  $\xi \in \mathbb{R}$ . Dostaneme tak systém

$$\begin{aligned} U' &= V, \\ V' &= U(U - 1) - cV. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Tento systém má dva rovnovážné (stacionární) body  $(0, 1)$  a  $(0, 0)$ . Řešení systému (2.131), jehož první složka má požadované vlastnosti (2.130), je ve stavovém prostoru reprezentována heteroklinickou trajektorií, která vychází z bodu  $(1, 0)$ , vstupuje do bodu  $(0, 0)$  a neopustí polorovinu  $U \geq 0$ . Budeme hledat podmínky, za jakých taková heteroklinická trajektorie existuje.

Variační matice systému (2.131) je

$$J(U, V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2U - 1 & -c \end{pmatrix}.$$

Konkrétně

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}, \quad \det J(1, 0) = -1 < 0,$$

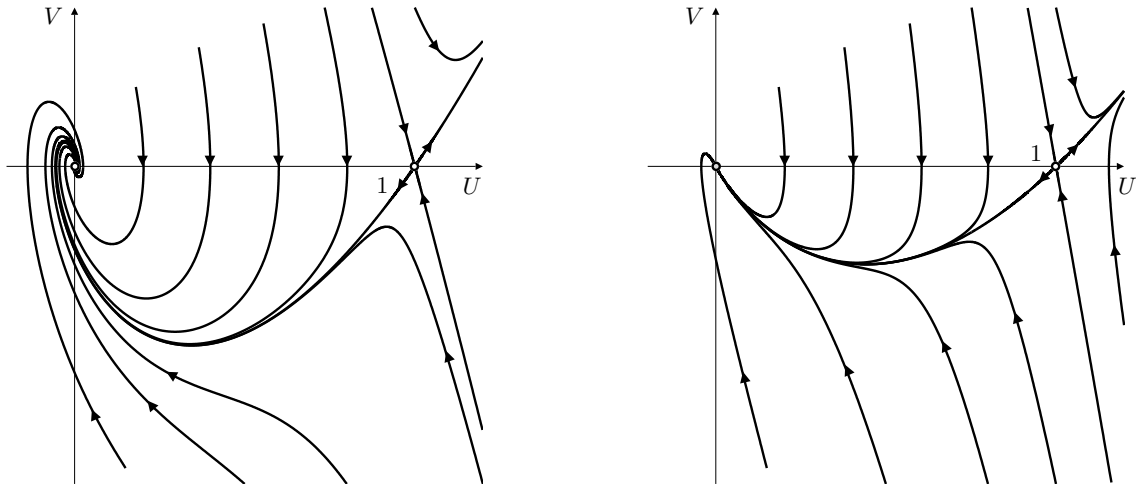
což znamená, že stacionární bod je sedlo. Při každé hodnotě  $c$  tedy existuje konečně mnoho trajektorií, které z bodu  $(1, 0)$  vychází.

Dále

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}, \quad \det J(0, 0) = 1 > 0, \quad \text{tr } J(0, 0) = -c < 0.$$

Stacionární bod  $(0, 0)$  je tedy stabilní uzel (pro  $c \geq 2$ ) nebo ohnisko (pro  $c < 2$ ). Trajektorie do bodu  $(0, 0)$  vstupují; fázové portréty systému (2.131) pro dvě různé hodnoty parametru  $c$  jsou znázorněny na Obrázku 2.4. Pokud by stacionární bod  $(0, 0)$  byl ohniskem, libovolná trajektorie by ho obíhala a tak se dostala nalevo od osy  $V$ ; tím by byl porušen první z požadavků (2.130). Touto úvahou dostáváme nutnou podmínku

$$c \geq 2 \quad (2.132)$$



Obrázek 2.4: Fázové portréty systému (2.131) pro dvě různé hodnoty parametru  $c$ ;  $c = 1$  vlevo a  $c = 2$  vpravo.

pro existenci heteroklinické trajektorie systému (2.131) v polorovině  $U \geq 0$ , tj. pro existenci řešení rovnice (2.113) ve tvaru putující vlny.

Ukážeme, že podmínka (2.132) je také dostatečná pro existenci heteroklinické trajektorie systému (2.131) spojující stacionární body  $(1, 0)$  a  $(0, 0)$ . Ve stavovém prostoru systému (2.131) uvažujme trojúhelník

$$P = \left\{ (U, V) : 0 \leq U \leq 1, -\frac{2}{c}U \leq V \leq 0 \right\},$$

viz Obrázek 2.5. V jeho vrcholech  $(0, 0)$  a  $(1, 0)$  jsou stacionární body. Ve vrcholu  $\left(1, -\frac{c}{2}\right)$  má vektorové pole určené systémem (2.131) směr  $\left(-\frac{c}{2}, 2\right)$ , je tedy orientováno dovnitř trojúhelníka  $P$ . Na vnitřku „horní“ odvěsny je toto vektorové pole orientováno „dolů“, na vnitřku „pravé“ odvěsny „doleva“<sup>8</sup>. Vektor vnitřní normály k trojúhelníku  $P$  na přepone  $V = -\frac{2}{c}U$  má souřadnice  $(2, c)$ . Pro

$$0 < U < 1, \quad V = -\frac{2}{c}U, \quad c \geq 2$$

nyní platí

$$\begin{aligned} (2, c) \cdot (U', V') &= (2, c) \cdot \left( -\frac{2}{c}U, U(U-1) + 2U \right) = -\frac{4}{c}U + cU(U-1) + 2cU = \\ &= cU^2 + \left( c - \frac{4}{c} \right) U \geq cU^2 + \left( 2 - \frac{4}{2} \right) U = cU^2 > 0; \end{aligned}$$

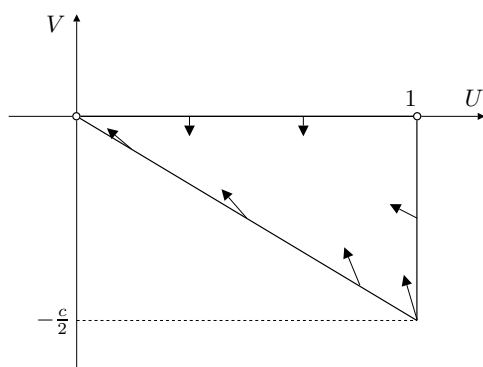
skalární součin vektoru vnitřní normály a vektorového pole je kladný. To znamená, že úhel, který svírá vnitřní normála s vektorovým polem je ostrý, takže vektorové pole je orientováno dovnitř trojúhelníka  $P$ . Celkem tak dostáváme, že trojúhelník  $P$  je pozitivně invariantní množinou systému (2.131).

Uvnitř trojúhelníka  $P$  není žádný stacionární bod. Podle Bendixsonova kritéria

$$\frac{\partial}{\partial U} V + \frac{\partial}{\partial V} (U(U-1) - cV) = -c < 0$$

<sup>8</sup>Přesněji: Pro  $U \in (0, 1)$  a  $V = 0$  je  $U' = 0$ ,  $V' = U(U-1) < 0$ , takže vektorové pole určené systémem (2.131) je orientováno v záporném směru osy  $V$ . Pro  $U = 1$  a  $V \in \left(0, -\frac{2}{c}\right)$  je  $U' < -\frac{2}{c} < 0$ , takže vektorové pole je orientováno v záporném směru osy  $U$ .





Obrázek 2.5: Positivně invariantní množina systému (2.131)

tam není ani žádný cyklus. Trajektorie vycházející z okolí bodu  $(1, 0)$  uvnitř trojúhelníka  $P$  tak musí skončit ve stacionárním bodě  $(0, 0)$ , tj. existuje heteroklinická trajektorie spojující stacionární body  $(1, 0)$  a  $(0, 0)$ . Ta reprezentuje řešení rovnice (2.113) ve tvaru putující vlny.

Na konci oddílu 2.4.2 jsme viděli, že  $c = 2$  je rychlost putující vlny v lineární rovnici reakce-difúze (2.100) s počáteční podmínkou tvaru Diracovy distribuce. Tato úloha je modelem šíření malthusovsky rostoucí populace v prostoru, která na počátku byla koncentrována v jediném bodě, tedy zaujímala omezenou oblast. Populace rostoucí logisticky se z omezené oblasti těžko může šířit do prostoru rychleji, než populace rostoucí exponenciálně. Proto také pro rychlost  $c$  postupu putující vlny v rovnici (2.113) bude platit  $c \leq 2$ .

Spolu s (2.132) tak dostáváme  $c = 2$  jako rychlost putující vlny rovnice (2.113) s počáteční podmínkou

$$u(0, x) = \varphi(x) \geq 0$$

takovou, že  $\varphi(x) = 0$  při  $|x| > R$  pro nějakou hodnotu  $R$ .

### 2.4.3 Systém rovnic reakce-difúze – Turingův jev

#### A. Rovnice na jednorozměrném prostoru s lineární reakcí

Uvažujme soustavu dvou rovnic reakce-difúze s lineárními reakčními členy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \end{aligned} \quad (2.133)$$

kde  $D_1, D_2$  jsou kladné konstantní difuzivity,  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , jsou reálné parametry. Spolu s tímto systémem uvažujme soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \end{aligned} \quad (2.134)$$

který popisuje reakci. Můžeme si představovat třeba homogenní reakci dvou kapalin o koncentracích  $u_1$  a  $u_2$ , v případě systému (2.133) jsou v nějaké vodorovné trubici, v případě systému (2.134) protřepávaných v kádince.

Při označení

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

lze systémy (2.133) a (2.134) zapsat vektorově

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = \mathbf{D}^\top \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u} + \mathbf{A} \mathbf{u} \quad \text{a} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}.$$

Systém obyčejných rovnic (2.134) má stacionární nulové řešení  $(u_1, u_2) = (0, 0)$ . Budeme o něm předpokládat, že je asymptoticky stabilní, tedy že jsou splněny podmínky

$$|\mathbf{A}| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0, \quad \text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} < 0. \quad (2.135)$$

Difúze je proces, kterým dochází k vyrovnávání koncentrací v uvažovaném prostoru. Lze tedy očekávat, že nulové řešení systému (2.133) bude stabilní – reagující látky jsou spotřebovány, reakce ustala v celém prostoru. Alan Turing však dokázal<sup>9</sup>, že tento intuitivní závěr není vždy správný. Ukážeme, za jakých podmínek je nulové řešení systému (2.133) s koeficienty splňujícími podmínky (2.135) nestabilní.

Nejprve systém přepíšeme do mírně vhodnějšího tvaru. Zavedeme kladný bezrozměrný parametr  $\gamma$ , transformujeme nezávisle proměnné a zavedeme označení:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} t, \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{\gamma D_1}} x, \quad d = \frac{D_2}{D_1}. \quad (2.136)$$

Pak je

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial \tau} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u_i}{\partial \tau}, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{\gamma D_1}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma D_1}} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\gamma D_1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Po dosazení do systému (2.133) a jednoduché úpravě dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \gamma (a_{11} u_1 + a_{12} u_2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tau} &= d \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \gamma (a_{21} u_1 + a_{22} u_2). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Spolu s touto soustavou uvažujme homogenní okrajové podmínky

$$\Phi_j(u_1(\tau, \cdot)) = 0 = \Phi_j(u_2(\tau, \cdot)), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.138)$$

kde  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$  jsou lineární funkcionály.

Předpokládejme dále, že okrajové podmínky jsou takové, že Sturmova-Liouvilleova rovnice

$$-X'' = \lambda X$$

s okrajovými podmínkami

$$\Phi_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

má spočetně mnoho nezáporných vlastních hodnot  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  s příslušnými vlastními funkcemi  $X_1, X_2, \dots$ . Můžeme si představovat např. rovnice na konečném intervalu s homogenními Robinovými nebo s periodickými okrajovými podmínkami. V takovém případě lze řešení systému (2.137) hledat ve tvaru

$$u_1(\tau, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{1k}(\tau) X_k(\xi), \quad u_2(\tau, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{2k}(\tau) X_k(\xi). \quad (2.139)$$

<sup>9</sup>A. TURING: The Chemical Basis of Morphogenesis, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences* 1952, vol. 237, no. 641, p. 37–72.

Autor tohoto článku o morfogenezi je tentýž Alan Turing (1912–1954), který dosáhl významných výsledků v teorii pravděpodobnosti, teorii grup, kvantové fyzice, teorii počítačů a umělé inteligence, v kryptografii a který také prolomil kód používaný německým zařízením Enigma v době druhé světové války. To vše do 41. roku svého života.

Takto definované funkce splňují okrajové podmínky. Dále pro ně platí

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau}(\tau, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} w'_{ik}(\tau) X_k(\xi), \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2}(\tau, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik}(\tau) X_k''(\xi) = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k w_{ik}(\tau) X_k(\xi), \quad i = 1, 2,$$

takže po dosazení do systému (2.137), dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} [w'_{1k} - (\gamma a_{11} - \lambda_k) w_{1k} - \gamma a_{12} w_{2k}] X_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} [w'_{2k} - \gamma a_{21} w_{1k} - (\gamma a_{22} - d\lambda_k) w_{2k}] X_k &= 0. \end{aligned}$$

Odtud a z lineární nezávislosti vlastních funkcí  $X_1, X_2, \dots$  plyne, že báze funkce  $w_{ik}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , jsou řešením lineárního systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} w'_{1k} &= (\gamma a_{11} - \lambda_k) w_{1k} + \gamma a_{12} w_{2k}, \\ w'_{2k} &= \gamma a_{21} w_{1k} + (\gamma a_{22} - d\lambda_k) w_{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.140)$$

Tento systém sice obsahuje nekonečně mnoho rovnic, ale ty nejsou mezi sebou vzájemně provázané. Můžeme ho proto chápat jako spočetně mnoho systémů dvojrozměrných. Každý z nich je jednoznačně řešitelný. To znamená, že systém (2.137) s uvažovanými okrajovými podmínkami skutečně má řešení tvaru (2.139).

Nulové řešení systému (2.137) bude nestabilní, pokud alespoň jeden z dvojrozměrných systémů (2.140) bude mít nestabilní řešení.

Z předpokládané nezápornosti vlastního čísla  $\lambda_k$  a ze druhé z podmínek (2.135) plyne

$$\operatorname{tr} \begin{pmatrix} \gamma a_{11} - \lambda_k & -\gamma a_{12} \\ a_{21} & \gamma a_{22} - d\lambda_k \end{pmatrix} = \gamma(a_{11} + a_{22}) - \lambda_k(1 + d) < 0,$$

neboť oba parametry  $\gamma$  a  $d$  jsou kladné. Determinant  $k$ -tého dvojrozměrného subsystému (2.140) je dán formulí

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \gamma a_{11} - \lambda_k & \gamma a_{12} \\ \gamma a_{21} & \gamma a_{22} - d\lambda_k \end{pmatrix} &= \gamma^2 a_{11} a_{22} - \gamma(da_{11} + a_{22})\lambda_k + d\lambda_k^2 - \gamma^2 a_{12} a_{21} = \\ &= d\lambda_k^2 - \gamma(da_{11} + a_{22})\lambda_k + \gamma^2(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = d\lambda_k^2 - \gamma(da_{11} + a_{22})\lambda_k + \gamma^2 |A|. \end{aligned}$$

Pokud je tento determinant kladný, pak je nulové stacionární řešení tohoto subsystému stabilním uzlem nebo ohniskem. Nulové řešení proto může být nestabilní pouze tehdy, pokud je tento determinant záporný a tedy stacionární bod je sedlem.

Označme

$$F(\lambda) = d\lambda^2 - \gamma(da_{11} + a_{22})\lambda + \gamma^2 |A| \quad (2.141)$$

a

$$\mathcal{D} = (da_{11} + a_{22})^2 - 4d|A|. \quad (2.142)$$

Funkce  $F$  je kvadratická funkce proměnné  $\lambda$ , její průběh na kladné poloose závisí na znaménkách výrazů  $\mathcal{D}$  a  $da_{11} + a_{22}$ , viz Obrázek 2.6. Funkce  $F$  může mít záporné hodnoty pouze tehdy, když

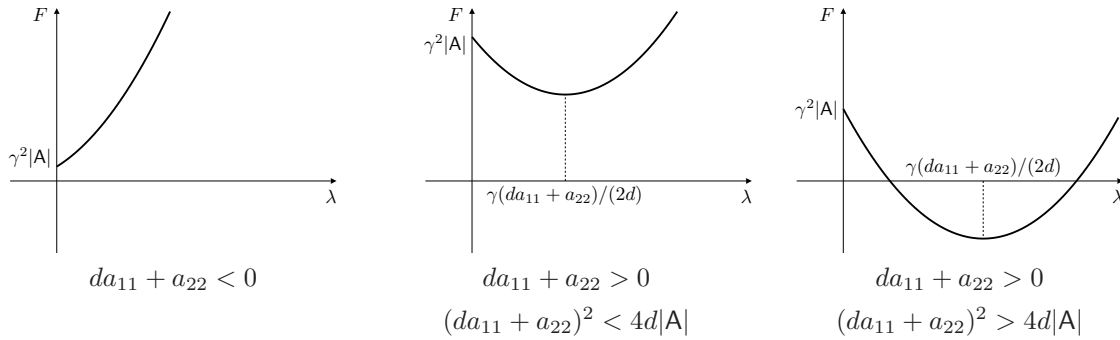
$$da_{11} + a_{22} > 0, \quad da_{12} + a_{22} > 4d|A|.$$

Tyto záporné hodnoty leží mezi kořeny funkce  $F$ , tj. mezi hodnotami  $\frac{\gamma}{2d} (da_{11} + a_{22} \pm \sqrt{\mathcal{D}})$ .

Dosažené výsledky můžeme shrnout:

**Tvrzení 5.** Nechť  $a_{11} + a_{22} < 0$  a  $|A| > 0$ . Pokud platí

1.  $da_{11} + a_{12} > 0$ ,



Obrázek 2.6: Průběh funkce  $F$  dané formulí (2.141) pro různé vztahy mezi parametry.

2.  $(da_{11} + a_{22})^2 > 4d|A|$ ,

3. existuje vlastní číslo  $\lambda_k$  operátoru  $-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$  na prostoru funkcí  $\{X : \Phi_j(X) = 0, j = 1, 2, \dots, m\}$  takové, že

$$\frac{da_{11} + a_{22} - \sqrt{\mathcal{D}}}{2d} < \frac{\lambda_k}{\gamma} < \frac{da_{11} + a_{22} + \sqrt{\mathcal{D}}}{2d},$$

kde  $\mathcal{D}$  je dáno formulí (2.142),

pak je nulové řešení úlohy (2.137), (2.138) nestabilní.

Věnujme ještě trochu pozornosti interpretaci parametrů. Z nerovností

$$a_{11} + a_{22} < 0 < da_{11} + a_{22}, \quad d > 0 \quad (2.143)$$

plyne, že právě jedno z čísel  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  je kladné a druhé je záporné. Odtud a z podmínky  $|A| = a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$  dále plyne, že čísla  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  mají opačná znaménka. Z nerovností (2.143) také plyne, že pro  $a_{11} > 0$  je  $d > 1$ , tj. vzhledem definici (2.136) symbolu  $d$  platí  $D_1 < D_2$ , a pro  $a_{22} > 0$  je  $d < 1$ , tj.  $D_2 < D_1$ .

Pokud veličiny  $u_1$  a  $u_2$  interpretujeme jako koncentrace nějakých chemických látek, pak koeficienty  $a_{12}$  a  $a_{21}$  vyjadřující jejich vzájemný vztah mají opačná znaménka, což znamená, že jedna z nich je *aktivátorem* (*katalyzátorem*) druhé, která je naopak *inhibitorem* první. Poněvadž i koeficienty  $a_{11}$  a  $a_{22}$  mají opačná znaménka, je jedna z látek *autoaktivátorem* a druhá *autoinhibitorem*. Autoaktivátor má menší difuzivitu než autoinhibitor, proto se v prostoru šíří pomaleji.

Umělý parametr  $\gamma$  můžeme interpretovat přinejmenším třemi způsoby:

- (i) Bezprostředně z tvaru systému (2.137) jako relativní sílu reakčních členů vzhledem k difúzi; zvětšení  $\gamma$  způsobí zvětšení koncentrace první látky, pokud  $a_{11}u_1 + a_{12}u_2 > 0$ , a podobně.
- (ii) Pokud je oborem prostorové proměnné  $x$  v systému (2.133) úsečka délky  $\ell$ , pak je podle transformačního vztahu (2.136) oborem prostorové proměnné  $\xi$  v systému (2.137) úsečka délky  $L = \ell/\sqrt{\gamma D_1}$ . Zvolíme-li transformaci tak, aby oborem prostorové proměnné v transformovaném systému byla úsečka jednotkové délky,  $L = 1$ , pak

$$\sqrt{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{D_1}}\ell.$$

To znamená, že  $\sqrt{\gamma}$  je úměrná velikosti původního prostoru. Se zvětšováním prostoru se zvětšuje  $\gamma$ .

- (iii) Z transformačních vztahů (2.136) můžeme také odvodit

$$d = \gamma \left[ D_2 \left( \frac{x}{\xi} \right)^2 \right].$$

To znamená, že parametr  $\gamma$  je také úměrný poměru difuzivit  $d$ , s jeho zvětšením se také zvětšuje.

Aby mohla být splněna podmínka 3. v Tvzení 5, je potřebné, aby podíl  $\lambda_k/\gamma$  byl „dostatečně malý“. To vzhledem k interpretaci parametru  $\gamma$  znamená, že difúze může destabilizovat stabilní rovnováhu reakce, pokud je reakce „dostatečně intenzivní“, nebo je prostor, v němž látky difundují „dostatečně velký“, nebo se autokatalyzátor šíří „s výrazně menší“ difuzivitou než autoinhibitor.

## B. Rovnice na jednorozměrném prostoru s nelineární reakcí

Uvažujme soustavu dvou rovnic reakce-difúze s nelineárními reakčními členy

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f_1(u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f_2(u_1, u_2),\end{aligned}\tag{2.144}$$

kde  $D_1, D_2$  jsou kladné konstantní difuzivity a  $f_1, f_2$  jsou diferencovatelné funkce dvou proměnných. Tuto soustavu budeme uvažovat pro časovou proměnnou  $t > 0$ . Prostorová proměnná  $x$  bude buď z konečného intervalu  $(0, \ell)$  nebo bude libovolná reálná. V prvním případě budeme spolu se soustavou (2.144) uvažovat homogenní Neumannovy okrajové podmínky

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(t, 0) = 0 = \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, \ell), \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}(t, 0) = 0 = \frac{\partial u_2}{\partial x}(t, \ell), \quad t > 0,\tag{2.145}$$

ve druhém periodické okrajové podmínky

$$u_1(t, x) = u_1(t, x + \ell), \quad u_2(t, x) = u_2(t, x + \ell), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.\tag{2.146}$$

Soustavu rovnic (2.144) lze opět zapsat vektorově

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = \mathbf{D}^\top \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Pokud existuje nulový bod  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$  zobrazení  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ , tj.  $f_1(u_1^*, u_2^*) = 0 = f_2(u_1^*, u_2^*)$ , pak jsou konstantní funkce  $u_1 \equiv u_1^*$  a  $u_2 \equiv u_2^*$  prostorově homogenním stacionárním řešením soustavy. Současně je bod  $\mathbf{u}^*$  stacionárním bodem autonomního systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= f_1(u_1, u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= f_2(u_1, u_2).\end{aligned}$$

Předpokládejme, že se jedná o asymptoticky stabilní rovnováhu. Opět se ptáme, za jakých podmínek může prostorově homogenní stacionární řešení  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^*$  systému (2.144) být nestabilní. Proto budeme vyšetřovat chování řešení v okolí řešení stacionárního (rovnovážného).

Zavedeme odchylku  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*$  od stacionárního řešení. Podle Taylorovy věty platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f_i(u_1, u_2) = \\ &= D_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f_i(u_1^*, u_2^*) + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(u_1^*, u_2^*)(u_1 - u_1^*) + \frac{\partial f_i}{\partial u_2}(u_1^*, u_2^*)(u_2 - u_2^*) + O(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2) = \\ &= D_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(u_1^*, u_2^*)v_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2}(u_1^*, u_2^*)v_2 + O(\|\mathbf{v}\|^2)\end{aligned}$$

pro  $i = 1, 2$ . Výraz  $O(\|\mathbf{v}\|^2)$  označující Taylorův zbytek, je „zanedbatelně malý“, pokud je odchylka od stacionárního řešení „malá“. Při označení

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(u_1^*, u_2^*)$$

tak dostáváme, že malé odchylky od prostorově homogenního stacionárního řešení systému se vyvíjejí jako řešení lineárního systému rovnic reakce-difúze

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + a_{11}v_1 + a_{12}v_2, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + a_{21}v_1 + a_{22}v_2.\end{aligned}$$

To je stejný systém jako (2.133), stabilitu jeho stacionárního nulového řešení jsme již vyšetřovali.



## Část II

# Diferenciální rovnice se zpožděním





## Kapitola 3

# Jednočlenná lineární rovnice

### Nejjednodušší model zpětnovazební regulace

Představme si, že máme zregulovat nějaký proces k nějakému žádoucímu výsledku. Jako „paradigmatický“ příklad bývá v této souvislosti uváděna regulace teploty vody ve sprše, viz obr. 3.1. Pro sprchující se osobu je nějaká teplota optimální. Pokud na ni teče voda chladnější, vychýlí páku baterie směrem k teplé vodě, pokud teče voda teplejší, vychýlí ji naopak. Čím je voda ledovější, (nebo naopak horčejší), tím víc páku vychýlí. Tuto situaci popíšeme matematicky.

Označme  $y$  teplotu vody proudící ze sprchy. Tato teplota se s časem může měnit, neboť sprchovaná osoba manipuluje s pákou baterie; tedy  $y = y(t)$ . Označme dále  $\alpha$  teplotu optimální. Budeme předpokládat, že změna teploty (tj. derivace funkce  $y$  podle času) způsobená regulací (tj. vychýlením páky) je přímo úměrná rozdílu aktuální teploty od teploty optimální; koeficient úměrnosti označíme  $\beta$ . Dostáváme tak jednoduchou rovnost

$$\frac{dy}{dt} = \beta(\alpha - y). \quad (3.1)$$

Je-li teplota nižší než optimální, tj.  $\alpha - y > 0$ , teplotu zvětšujeme. To znamená, že koeficient  $\beta$  je kladný.

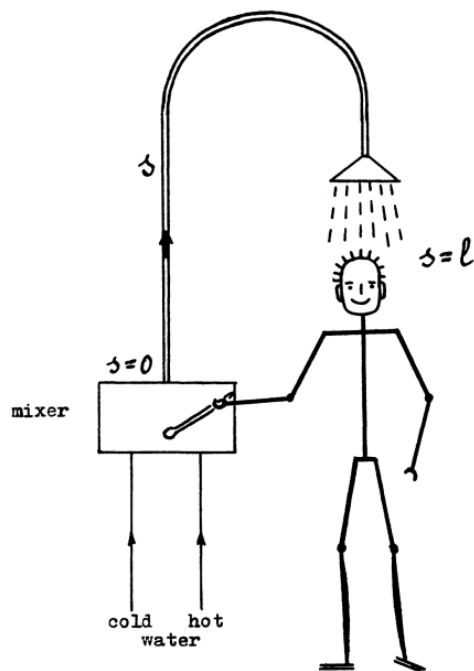
V rovnosti (3.1) není uveden čas. Zamysleme se nad ním. Nechť  $t$  označuje časový okamžik, ve kterém voda o teplotě  $y = y(t)$  protéká baterií. V témže okamžiku ze sprchy vytéká voda, která tekla přes baterii před nějakou dobou; označme tuto dobu  $\tau$ . Časová prodleva  $\tau$  představuje čas, za který voda proteče od baterie k ruzici sprchy. Osoba reaguje na vodu ze sprchy, tedy na vodu o teplotě  $y(t - \tau)$ . Rovnost (3.1) tedy musíme upřesnit, psát ji ve tvaru

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta(\alpha - y(t - \tau)). \quad (3.2)$$

Na tuto rovnost se můžeme dívat jako na model vývoje teploty vody v čase, tj. teplotu  $y$  považovat za neznámou a (3.2) chápat jako rovnici pro tuto funkci. Jedná se o *obyčejnou lineární diferenciální rovnici prvního řádu s jedním diskrétním zpožděním*. Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu je to proto, že se v ní vyskytuje první derivace hledané funkce podle její jediné proměnné, lineární je proto, že hledaná funkce je na pravé straně v první mocnině, s jedním diskrétním zpožděním proto, že zpoždění (časová prodleva)  $\tau$  je přesně určeno a je jediné.

Ale ani rovnice (3.2) ještě nemusí být adekvátním modelem uvažované regulace. Zpoždění může být nějak „rozmazané“. Voda nemusí proudit úplně rovnoměrně, její rychlost se může s teplotou nebo nastavením regulační páky nějak měnit; osoba nemusí na změnu teploty reagovat okamžitě a přesně. Trochu techničtěji řečeno, zpoždění  $\tau$  nemusí být „klasická veličina“, ale může to být veličina náhodná. Budeme ji považovat za spojitou a její hustotu označíme  $w$ .

Diskrétní zpoždění  $\tau$  můžeme považovat za náhodné s nulovým rozptylem, za jeho hustotu



Obrázek 3.1: Regulace teploty vody ve sprše. Symbol  $s$  označuje dráhu, kterou voda urazí od baterie (mixer),  $\ell$  označuje délku trubky od baterie po ružici sprchy. (Obrázek je z knihy V. KOLMANOVSKII, A. MYSHKIS: *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Springer, 2010 reprint.)

můžeme považovat Diracovu distribuci soustředěnou v bodě  $\tau$  a psát

$$y(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t - s)\delta(s - \tau)ds = \int_{-\infty}^{\infty} y(s)\delta(t - s - \tau)ds = \int_{-\infty}^t y(s)\delta(t - \tau - s)ds.$$

Je-li tedy zpoždění náhodnou veličinou s hustotou  $w$ , nahradíme v rovnici (3.2) výraz  $y(t - \tau)$  výrazem

$$\int_{-\infty}^t y(s)w(t - s)ds.$$

Dostaneme tak *obyčejnou lineární diferenciální rovnici s distribuovaným zpožděním*

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta \left( \alpha - \int_{-\infty}^t y(s)w(t - s)ds \right). \quad (3.3)$$

Tuto rovnici můžeme také číst tak, že aktuální změna veličiny  $y$  závisí na celé předchozí historii této veličiny, od času  $-\infty$  (času v temné minulosti, kam nedohlédneme, času od stvoření světa nebo Velkého třesku, případně času, před kterým můžeme vliv modelované veličiny na její změnu v současnosti zanedbat) po přítomný okamžik  $t$ . Funkce  $w$  pak vyjadřuje váhu, s jakou má minulost vliv na současnost; přesněji:  $w(\sigma)$  je váha (intenzita, podíl) vlivu okamžiku  $\sigma$  před aktuálním časem  $t$  na změnu velikosti v čase  $t$ .

Budeme předpokládat, že přítomnost je zcela výsledkem minulosti a budoucnost na ni nemá

žádný vliv. Funkce  $w$  tedy má vlastnosti

$$w(s) = 0 \text{ pro } s < 0, \quad \int_0^{\infty} w(s) ds = 1. \quad (3.4)$$

Rovnice (3.3) s funkcí  $w$  splňující podmínky (3.4) se nazývá *kauzální* nebo *neanticipativní*. Vzhledem k první z vlastností (3.4) můžeme rovnici (3.3) zapsat ve tvaru konvoluce

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta(\alpha - y * w(t))$$

nebo stručněji

$$y' = \beta(\alpha - y * w).$$

### 3.1 Rovnice s diskrétním zpožděním

V rovnici s diskrétním zpožděním (3.2) jsou tři parametry  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ ; parametr  $\alpha$  má stejný rozměr jako veličina  $y$ ,  $\tau$  má rozměr času a  $\beta$  převrácené hodnoty času. Vhodnou změnou měřítek (jednotek) veličiny  $y$  i času můžeme počet parametrů zredukovat o dva, tedy rovnici (3.2) transformovat na rovnici s jediným parametrem. Konkrétně, začátek sledování nebo regulace procesu zvolíme za počátek času a změníme jeho měřítko tak, aby čas byl bezrozměrný; to můžeme udělat dvěma přirozenými způsoby – čas vynásobit parametrem  $\beta$  nebo vydělit parametrem  $\tau$ . „Cílovou“ hodnotu  $\alpha$  veličiny  $y$  zvolíme za počátek (nulovou hodnotu) a měřítko neměníme; místo regulované veličiny uvažujeme její odchylku od požadované hodnoty, ta má stejný rozměr jako původní veličina<sup>1</sup>.

Označme na chvíli čas symbolem  $s$  a dále označme  $s_0$  okamžik, v němž začínáme pozorování veličiny  $y$ . Rovnici (3.2) přepíšeme

$$y'(s) = \beta(\alpha - y(s - \tau)), \quad s \geq s_0 \quad (3.5)$$

a označíme

$$a = \beta\tau; \quad (3.6)$$

bezrozměrný parametr  $a$  je kladný,  $a > 0$ .

#### 1. transformace

Zvolíme novou jednotku času tak, že položíme

$$t = \frac{1}{\tau}(s - s_0);$$

čas  $t$  je bezrozměrný a proces regulace začne v čase  $t = 0$ . Dále zavedeme novou stavovou proměnnou  $x$  vyjadřující absolutní odchylku regulované veličiny od požadované hodnoty  $\alpha$  v čase  $t$ ,

$$x(t) = y(\tau t + s_0) - \alpha.$$

Pak je

$$\begin{aligned} x'(t) &= \tau y'(\tau t + s_0) = \tau\beta(\alpha - y(\tau t + s_0 - \tau)) = \tau\beta(\alpha - y(\tau(t - 1) + s_0)) = \\ &= \tau\beta(\alpha - (x(t - 1) + \alpha)) = -\tau\beta x(t - 1). \end{aligned}$$

Vzhledem k (3.6) tedy můžeme rovnici (3.5) zapsat ve tvaru

$$x' = -ax(t - 1), \quad t > 0. \quad (3.7)$$

<sup>1</sup>Jinak řečeno, za novou regulovanou veličinu bereme  $y - \alpha$ , tj. posunutou starou. Bezrozměrnou veličinu můžeme „přirozeně“ získat jen v případě  $\alpha \neq 0$ ; pak by za novou veličinu bylo možné zvolit  $y/\alpha$  (relativní odchylku od požadované hodnoty) nebo  $y/\alpha - 1$ .

## 2. transformace

Alternativně můžeme zavést bezrozměrný čas vztahem

$$t = \beta(s - s_0).$$

Vzdálenost regulované veličiny od požadované hodnoty  $\alpha$  v čase  $t$  je tedy dána výrazem

$$x(t) = y\left(\frac{1}{\beta}t + s_0\right) - \alpha.$$

Dále je

$$\begin{aligned}x'(t) &= \frac{1}{\beta}y'\left(\frac{1}{\beta}t + s_0\right) = \frac{1}{\beta}\left[\beta\left(\alpha - y\left(\frac{1}{\beta}t + s_0 - \tau\right)\right)\right] = \alpha - y\left(\frac{1}{\beta}(t - \beta\tau) + s_0\right) = \\ &= -x(t - \tau\beta),\end{aligned}$$

takže rovnici (3.5) můžeme také přepsat ve tvaru

$$x'(t) = -x(t - a), \quad t > 0. \quad (3.8)$$

Oběma transformacemi získáme rovnici v bezrozměrných veličinách s jediným parametrem  $a$ . Tento parametr v rovnici (3.7) vyjadřuje jakousi sílu regulace, v rovnici (3.8) zpoždění. Toto pozorování ukazuje, že zpoždění „je v podstatě totéž“, jako síla řízení. Násilné řízení, byť s „optimalizovaným časem získání informace“, má stejné důsledky, jako řízení s velkým zpožděním.

### 3.1.1 Řešení metodou kroků

Hledáme řešení rovnice (3.7) spojitě na intervalu  $[0, \infty)$ , které splňuje počáteční podmínku

$$x(0) = 1. \quad (3.9)$$

O funkci  $x(\cdot)$ , která je řešením této úlohy budeme dále předpokládat, že je definována na celém intervalu  $(-\infty, \infty)$  a splňuje podmínku

$$x(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0. \quad (3.10)$$

Tato úloha popisuje situaci, kdy uvažovaná veličina byla v počátečním čase  $t = 0$  nějakým impulsem vychýlena z požadovaného stavu a příslušnou výchylku považujeme za jednotkovou.

Pro  $t \in [0, 1)$  je funkce  $x(\cdot)$  řešením počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$x'(t) = 0, \quad x(0) = 1,$$

tedy  $x(t) = 1$ . To znamená, že pro  $t \in [1, 2)$  je  $x(t - 1) = 1$ . Dále

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = 1.$$

Na intervalu  $[1, 2)$  je tedy funkce  $x(\cdot)$  řešením počáteční úlohy

$$x'(t) = -a, \quad x(1) = 1,$$

tedy  $x(t) = 1 - a(t - 1)$ . Pro  $t \in [2, 3)$  nyní platí  $x(t - 1) = 1 - a(t - 2)$  a je

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} (1 - a(t - 1)) = 1 - a.$$

Na tomto intervalu je tedy funkce  $x(\cdot)$  řešením počáteční úlohy

$$x'(t) = -a(1 - a(t - 2)) = -a + a^2(t - 2), \quad x(2) = 1 - a,$$

což znamená, že

$$x(t) = 1 - a + \int_2^t (-a + a^2(s-2)) ds = 1 - a - a(t-2) + \frac{a^2}{2}(t-2)^2 = 1 - a(t-1) + \frac{a^2}{2}(t-2)^2.$$

Analogicky postupujeme dále. Pro  $t \in [3, 4)$  je

$$x'(t) = -a + a^2(t-2) - \frac{a^2}{2}(t-3)^2,$$

$$x(3) = \lim_{t \rightarrow 3^-} \left( 1 - a(t-1) + \frac{a^2}{2}(t-2)^2 \right) = 1 - 2a + \frac{a^2}{2},$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - 2a + \frac{a^2}{2} + \int_3^t \left( -a + a^2(s-2) - \frac{a^2}{2}(s-3)^2 \right) ds = \\ &= 1 - 2a + \frac{a^2}{2} - a(t-3) + \frac{a^2}{2}((t-2)^2 - 1) - \frac{a^3}{6}(t-3)^3 = \\ &= 1 - a(t-1) + \frac{a^2}{2}(t-2)^2 - \frac{a^3}{6}(t-3)^3. \end{aligned}$$

Z dosavadních výsledků můžeme hádat, že pro  $t \in [n, n+1)$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , platí

$$x(t) = 1 - a(t-1) + \frac{a^2}{2}(t-2)^2 - \frac{a^3}{6}(t-3)^3 + \frac{a^4}{24}(t-4)^4 + \dots + (-1)^n \frac{a^n}{n!}(t-n)^n = \sum_{i=0}^{[t]} (-1)^i \frac{a^i}{i!} (t-i)^i,$$

kde  $[\xi]$  označuje celou část z reálného čísla  $\xi$ . Ověříme, že tato funkce je skutečně řešením úlohy (3.7), (3.9), (3.10).

Pro  $t \in [0, 1)$  je  $x(t) = 1$  a to je podle provedených výpočtů řešením úlohy. Pro každé  $t > 1$ ,  $t \notin \mathbb{N}$  platí

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{[t]} (-1)^i \frac{a^i}{i!} (t-i)^i = \frac{d}{dt} \left( 1 + \sum_{i=1}^{[t]} (-1)^i \frac{a^i}{i!} (t-i)^i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{[t]} (-1)^i \frac{a^i}{(i-1)!} (t-i)^{i-1} = -a \sum_{i=0}^{[t-1]} (-1)^i \frac{a^i}{i!} (t-1-i)^i = -ax(t-1). \end{aligned}$$

Dále je

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} x(t) = \lim_{s \rightarrow 1^-} 1 = 1, \quad \lim_{s \rightarrow 1^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (1 - a(s-1)) = 1,$$

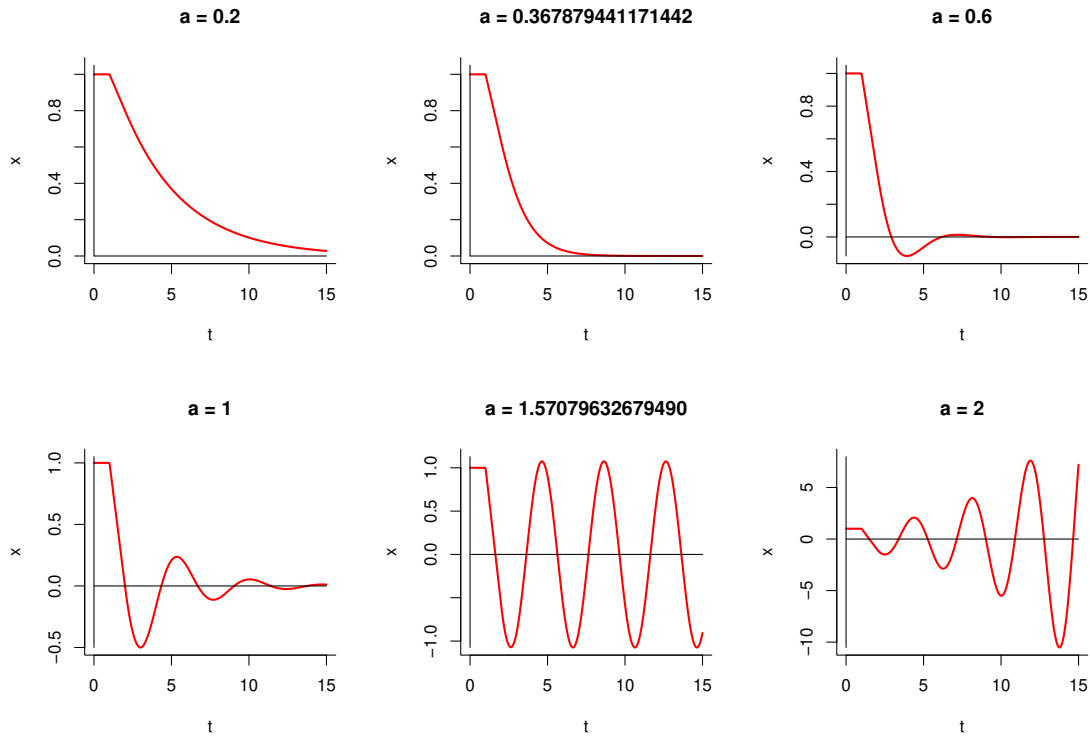
takže funkce  $x(\cdot)$  je v bodě  $t = 1$  spojitá. Pro  $t > 1$ ,  $t \in \mathbb{N}$  platí  $t = [t]$  a

$$\lim_{s \rightarrow t^-} x(t) = \lim_{s \rightarrow t^-} \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^i \frac{a^i}{i!} (s-i)^i = \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^i \frac{a^i}{i!} (t-i)^i,$$

$$\lim_{s \rightarrow t^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow t^+} \sum_{i=0}^t (-1)^i \frac{a^i}{i!} (s-i)^i = \sum_{i=0}^t (-1)^i \frac{a^i}{i!} (t-i)^i = \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^i \frac{a^i}{i!} (s-i)^i,$$

tedy

$$\lim_{s \rightarrow t^-} x(t) = \lim_{s \rightarrow t^+} x(t)$$



Obrázek 3.2: Fundamentální řešení (3.11) rovnice (3.7) pro různé hodnoty parametru  $a$ .

a funkce  $x(\cdot)$  je v bodě  $t \in \mathbb{N}$  spojitá. Dále

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t-} x'(t) &= \lim_{s \rightarrow t-} \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^i \frac{a^i}{(i-1)!} (s-i)^{i-1} = \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^i \frac{a^i}{(i-1)!} (t-i)^{i-1} = \\ &= \sum_{i=0}^t (-1)^i \frac{a^i}{(i-1)!} (t-i)^{i-1} = \lim_{s \rightarrow t+} x'(t), \end{aligned}$$

což znamená, že funkce  $x(\cdot)$  má v bodě  $t \in \mathbb{N}$  spojitou derivaci. Celkem je tedy funkce  $x(\cdot)$  spojitá pro každé  $t > 0$  a s výjimkou jediného bodu  $t = 1$  má spojitou první derivaci a splňuje diferenciální rovnici (3.7).

Analogickými výpočty se lze přesvědčit, že řešení  $x(\cdot)$  úlohy (3.7), (3.9), (3.10) má v každém bodě  $t = n \in \mathbb{N}$  spojitou derivaci až do řádu  $n - 1$ . Řešení je tedy funkce, která je po částech polynommem. V každém z intervalů tvaru  $[n, n + 1)$  se však jedná o polynom jiného stupně; stupeň polynomu se zvětšuje s rostoucí hodnotou nezávisle proměnné  $t$ . Navíc s rostoucím  $t$  také vzrůstá hladkost funkce, roste řád derivace, kterou má funkce spojitou.

Řešení úlohy (3.7), (3.9), (3.10) nazveme *fundamentální řešení rovnice (3.7)* a označíme ho  $k(\cdot)$ . Je tedy

$$k(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor t \rfloor} (-1)^i \frac{a^i}{i!} (t-i)^i. \quad (3.11)$$

Průběh fundamentálního řešení rovnice (3.7) pro několik různých hodnot parametru  $a$  je zobrazeno na obr. 3.2. Vidíme, že řešení může k nule konvergovat monotonně ale různě rychle (s parametrem  $a$  rostoucím od nuly k jisté hodnotě roste i rychlost konvergence), může k ní konvergovat s více či méně tlumenými oscilacemi (s parametrem  $a$  rostoucím v jistých mezích roste i amplituda

tlumených oscilací), ale také může kolem ní oscilovat s konstantní nebo rostoucí amplitudou (pro dostatečně velkou hodnotu parametru  $a$ ).

### 3.1.2 Řešení pomocí Laplaceovy transformace

Přestavme si, že známe vývoj uvažované veličiny po jistou dobu v minulosti a chceme ho určit pro budoucnost. Přesněji řečeno, předpokládejme, že známe řešení rovnice (3.7) na intervalu  $[-1, 0]$  a chceme znát řešení pro  $t > 0$ . Hledáme tedy řešení úlohy

$$\begin{aligned} x'(t) &= -ax(t-1), & t > 0, \\ x(t) &= \varphi(t), & -1 \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

kde  $\varphi : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  je integrabilní funkce.

Integrací rovnice v mezích od 0 do  $t$  a s využitím počáteční podmínky  $x(0) = \varphi(0)$  dostaneme

$$x(t) = \varphi(0) - a \int_0^t x(s-1) ds = \varphi(0) - a \int_{-1}^{t-1} x(s) ds = \varphi(0) - a \int_{-1}^0 \varphi(s) ds - a \int_0^{t-1} x(s) ds.$$

Označme

$$M = \left| \varphi(0) - a \int_{-1}^0 \varphi(s) ds \right|.$$

Při tomto označení dostaneme pro řešení úlohy odhad

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left| \varphi(0) - a \int_{-1}^0 \varphi(s) ds - a \int_0^{t-1} x(s) ds \right| \leq \left| \varphi(0) - a \int_{-1}^0 \varphi(s) ds \right| + a \int_0^{t-1} |x(s)| ds \leq \\ &\leq M + a \int_0^t |x(s)| ds. \end{aligned}$$

Podle Gronwallova lemmatu (viz např. J. KALAS, M. RÁB: *Obyčejné diferenciální rovnice*. MU, Brno 2001, str. 19) tedy platí  $|x(t)| \leq Me^{at}$ . To znamená, že řešení úlohy je funkce exponenciálního řádu, a proto může existovat jeho Laplaceův obraz (přesněji: funkce formálně zapsaná jako Laplaceův obraz řešení je definována alespoň v okolí nekonečna). Proto budeme řešení hledat pomocí Laplaceovy transformace.

Laplaceova transformace levé strany rovnice (3.12) je  $s\mathcal{L}x(s) - \varphi(0)$  a její pravé strany

$$\begin{aligned} -a \int_0^{\infty} x(t-1)e^{-st} dt &= -a \int_{-1}^{\infty} x(t)e^{-s(t+1)} dt = \\ &= -ae^{-s} \left( \int_{-1}^0 \varphi(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \right) = -ae^{-s} \int_{-1}^0 \varphi(t)e^{-st} dt - ae^{-s} \mathcal{L}x(s). \end{aligned}$$

Z transformované úlohy

$$s\mathcal{L}x(s) - \varphi(0) = -ae^{-s} \int_{-1}^0 \varphi(t)e^{-st} dt - ae^{-s} \mathcal{L}x(s)$$

tedy dostaneme Laplaceův obraz řešení úlohy (3.12) ve tvaru

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{s + ae^{-s}} \left( \varphi(0) - ae^{-s} \int_{-1}^0 \varphi(t)e^{-st} dt \right). \quad (3.13)$$



Pokud je počáteční funkce  $\varphi$  tvaru

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & 0 > t \geq -1, \end{cases}$$

pak řešená úloha (3.12) je již vyřešenou úlohou (3.7), (3.9), (3.10). V takovém případě je

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{s + ae^{-s}} = \mathcal{L}k(s), \quad (3.14)$$

kde  $k(\cdot)$  je fundamentální řešení rovnice (3.7) dané formulí (3.11).

Označme na chvíli

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t-1), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak je

$$e^{-s} \int_{-1}^0 \varphi(t)e^{-st} dt = e^{-s} \int_0^1 \varphi(t-1)e^{-s(t-1)} dt = \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\tilde{\varphi}(s).$$

Dosazením tohoto výsledku a (3.14) do vyjádření (3.13) dostaneme

$$\mathcal{L}x(s) = \mathcal{L}k(s)(\varphi(0) - a\mathcal{L}\tilde{\varphi}(s)) = \varphi(0)\mathcal{L}k(s) - a\mathcal{L}\tilde{\varphi}(s)\mathcal{L}k(s).$$

Poněvadž součin Laplaceových obrazů funkcí je Laplaceovým obrazem konvoluce funkcí, platí

$$\mathcal{L}x(s) = \varphi(0)\mathcal{L}k(s) - a\mathcal{L}\tilde{\varphi} * k(s) = \mathcal{L}(\varphi(0)k - a\tilde{\varphi} * k)(s).$$

To znamená, že řešení úlohy (3.12) je dáno formulí

$$x(t) = \varphi(0)k(t) - a\tilde{\varphi} * k(t).$$

Ještě upravíme konvoluci na pravé straně rovnosti:

$$\tilde{\varphi} * k(t) = \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(s)k(t-s)ds = \int_0^1 \varphi(s-1)k(t-s)ds.$$

Dostáváme tak řešení úlohy (3.12) ve tvaru

$$x(t) = \varphi(0)k(t) - a \int_0^1 k(t-s)\varphi(s-1)ds. \quad (3.15)$$

### 3.1.3 Charakteristická rovnice

Rovnice (3.7) je lineární homogenní, splňuje princip superpozice. To napovídá, že by mohla mít řešení tvaru  $x(t) = e^{\lambda t}$ , kde  $\lambda$  je zatím neznámá hodnota. Dosadíme toto vyjádření do rovnice (3.7),

$$\lambda e^{\lambda t} = -ae^{\lambda(t-1)}$$

a po vynásobení výrazem  $e^{-\lambda t}$  dostaneme *charakteristickou rovnici*

$$\lambda + ae^{-\lambda} = 0; \quad (3.16)$$

její řešení se nazývá *charakteristický kořen*.

Připomeňme, že číslo  $\xi$  je  $n$ -násobným kořenem rovnice  $f(\xi) = 0$ , pokud platí

$$f'(\xi) = 0, f''(\xi) = 0, \dots, f^{(n-1)}(\xi) = 0, f^{(n)}(\xi) \neq 0;$$

je-li  $n = 1$ , mluvíme o jednoduchém kořenu.

**Tvrzení 6.** Funkce  $x(t) = e^{\lambda t}$  je řešením rovnice (3.7) právě tehdy, když  $\lambda$  je kořenem charakteristické rovnice (3.16).

Funkce  $x(t) = te^{\lambda t}$  je řešením rovnice (3.7) právě tehdy, když  $\lambda$  je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice (3.16).

Charakteristická rovnice (3.16) s parametrem  $a \neq 0$  má kořeny nejvýše násobnosti 2.

Důkaz: Je-li  $x(t) = e^{\lambda t}$  řešením rovnice (3.7), pak  $\lambda$  rovnici (3.16) splňuje, neboť charakteristická rovnice byla z tohoto předpokladu odvozena.

Nechť  $\lambda$  je řešením charakteristické rovnice. Pak pro funkci  $x(t) = e^{\lambda t}$  platí

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} = -ae^{-\lambda} e^{\lambda t} = -ae^{\lambda(t-1)} = -ax(t-1).$$

Hodnota  $\lambda$  je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice právě tehdy, když  $\lambda = -ae^{-\lambda}$  a  $1 = ae^{-\lambda}$ . Odtud plyne, že rovnosti

$$x'(t) = (te^{\lambda t})' = e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t} = (1 + \lambda t)e^{\lambda t} = (ae^{-\lambda} - ae^{-\lambda}t) e^{\lambda t} = -a(t-1)e^{\lambda(t-1)}$$

platí právě tehdy, když  $\lambda$  je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice.

Trojnásobný kořen  $\lambda$  charakteristické rovnice by musel splňovat rovnost  $ae^{-\lambda} = 0$ , ale  $e^{-\lambda} \neq 0$  pro každou komplexní hodnotu  $\lambda$ .  $\square$

**Důsledek 2.** Má-li charakteristická rovnice (3.16) jednoduchý nebo dvojnásobný komplexní kořen  $\lambda = \alpha + \beta i$ , pak má také kořen  $\lambda = \alpha - \beta i$  stejné násobnosti a funkce definované rovnostmi  $x(t) = t^j e^{\alpha t} \cos \beta t$ ,  $x(t) = t^j e^{\alpha t} \sin \beta t$ ,  $j = 0, 1$ , jsou řešením rovnice (3.7)

Důkaz: Je-li  $\alpha + \beta i$  kořenem charakteristické rovnice (3.16), pak

$$0 = \alpha + \beta i + ae^{-\alpha} e^{-i\beta} = \alpha + \beta i + ae^{-\alpha} (\cos \beta - i \sin \beta) = \alpha + ae^{-\alpha} \cos \beta + i(\beta - e^{-\alpha} \sin \beta)$$

a proto také

$$\alpha - \beta i + ae^{-\alpha} e^{i\beta} = \alpha + ae^{-\alpha} \cos \beta - i(\beta - e^{-\alpha} \sin \beta) = 0.$$

Je-li  $\alpha + \beta i$  dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice (3.16), pak navíc

$$0 = 1 - a(\alpha + \beta i)e^{-(\alpha + \beta i)} = 1 - a(\alpha + \beta i)e^{-\alpha} (\cos \beta - i \sin \beta) = 1 - a\alpha e^{-\alpha} \cos \beta + ia\beta \sin \beta$$

a tedy také

$$1 - a(\alpha - \beta i)e^{-(\alpha - \beta i)} = 1 - a(\alpha - \beta i)e^{-\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta) = 1 - a\alpha e^{-\alpha} \cos \beta + ia\beta \sin \beta = 0.$$

Jsou-li  $\alpha \pm i\beta$  kořeny charakteristické rovnice, pak podle Tvrzení 6 a již dokázané vlastnosti má rovnice (3.7) dvojici řešení

$$z_1(t) = e^{(\alpha + \beta i)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad z_2(t) = e^{(\alpha - \beta i)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

a podle principu superpozice má také řešení

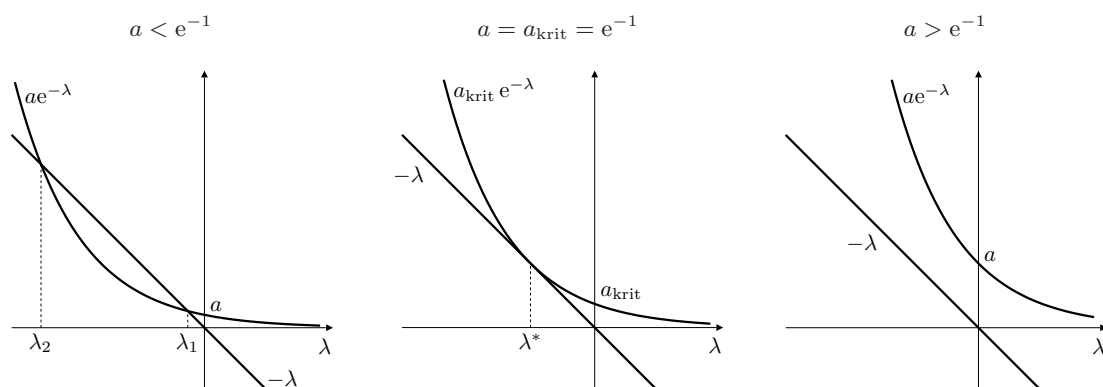
$$x_1(t) = \frac{1}{2}(z_1(t) + z_2(t)) = e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{a} \quad x_2(t) = -\frac{i}{2}(z_1(t) - z_2(t)) = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Platnost tvrzení pro dvojnásobný kořen se ukáže stejně.  $\square$

Charakteristickou rovnici (3.16) můžeme přepsat ve tvaru

$$ae^{-\lambda} = -\lambda.$$

Grafem pravé strany je osa druhého a čtvrtého kvadrantu, grafem levé strany je klesající exponenciála. Ta může osu druhého kvadrantu protínat ve dvou bodech (charakteristická rovnice má dva reálné různé kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$ ), může se jí dotýkat (charakteristická rovnice má dvojnásobný



Obrázek 3.3: Grafické znázornění charakteristické rovnice (3.16) pro různé hodnoty parametru  $a$ .

reálný kořen  $\lambda^*$ ), nebo s ní nemít žádný společný bod (charakteristická rovnice nemá reálný kořen), viz obr. 3.3.

Najdeme kritickou hodnotu  $a_{\text{krit}}$  parametru  $a$ , pro kterou má charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen  $\lambda^*$ . Hodnoty  $a_{\text{krit}}$  a  $\lambda^*$  jsou řešením soustavy rovnic

$$a_{\text{krit}}e^{-\lambda^*} = -\lambda^*, \quad \frac{d}{d\lambda}a_{\text{krit}}e^{-\lambda} = -a_{\text{krit}}e^{-\lambda^*} = -1.$$

Tedy  $\lambda^* = -1$ ,  $a_{\text{krit}} = e^{-1}$ .

Nyní můžeme zformulovat první výsledek: Pokud parametr  $a$  splňuje podmínky  $0 < a \leq e^{-1}$ , pak existuje monotonní řešení  $x = x(t)$  rovnice (3.7) takové, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Charakteristická rovnice (3.16) může také mít komplexní kořeny tvaru  $\lambda = \alpha + \beta i$ . Ty samozřejmě rovnici splňují, tj.

$$\alpha + \beta i + ae^{-\alpha}(\cos \beta - i \sin \beta) = 0.$$

Porovnáním reálné a imaginární části dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \alpha &= -ae^{-\alpha} \cos \beta, \\ \beta &= ae^{-\alpha} \sin \beta \end{aligned} \tag{3.17}$$

pro reálné hodnoty  $\alpha, \beta$ . Bezprostředně je vidět, že s každým řešením  $(\alpha, \beta)$  je také dvojice  $(\alpha, -\beta)$  řešením této soustavy. Stačí se tedy omezit na hledání řešení s  $\beta > 0$ .

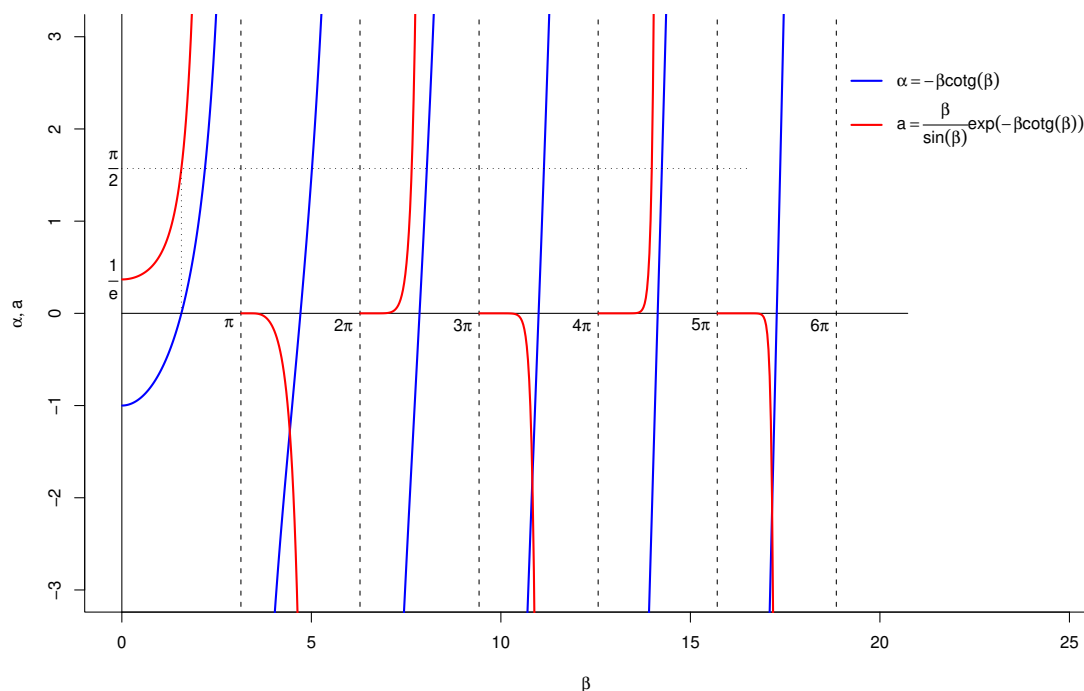
Přímým výpočtem ověříme, že pro  $a = \frac{1}{2}\pi$  má soustava (3.17) řešení  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{1}{2}\pi$ . Pro hodnotu parametru  $a = \frac{1}{2}\pi$  tedy existují periodická řešení rovnice (3.7)

$$x(t) = \cos \frac{1}{2}\pi t \quad \text{a} \quad x(t) = \sin \frac{1}{2}\pi t.$$

Soustavu rovnic (3.17) můžeme dále upravit na tvar

$$\begin{aligned} \alpha &= -\beta \cotg \beta, \\ a &= \frac{\beta}{\sin \beta} e^{-\beta \cotg \beta}, \end{aligned}$$

v jehož pravých stranách se objevuje pouze neznámá  $\beta$ . Vyšetříme průběh pravých stran, které budeme považovat za funkce nezávisle proměnné  $\beta$ . Výsledek je na obr. 3.4. Tento obrázek můžeme využít tak, že pro zvolenou hodnotu parametru  $a$  najdeme příslušné hodnoty  $\beta$  (jako první



Obrázek 3.4: Grafické řešení soustavy rovnic (3.17), tj. hledání komplexních kořenů charakteristické rovnice (3.16).

souřadnice průsečíků přímky rovnoběžné s vodorovnou osou ve výšce  $a$  s červenými čarami). K těmto hodnotám  $\beta$  najdeme hodnoty  $\alpha$  (jako druhou souřadnici modré čáry v příslušné hodnotě  $\beta$ ). Na obrázku 3.4 je takto znázorněna nejmenší hodnota  $\beta$  odpovídající hodnotě  $a = \frac{1}{2}\pi$  a k němu příslušná hodnota  $\alpha = 0$ .

Z obrázku 3.4 je vidět, že pro libovolnou hodnotu  $a > 0$  existuje nekonečně mnoho dvojic  $(\alpha, \beta)$ , které vyhovují rovnicím (3.17). To znamená, že rovnice (3.7) má nekonečně mnoho nezávislých oscilatorických řešení. Dále pro hodnoty  $a > \frac{1}{2}\pi$  existuje dvojice  $(\alpha, \beta)$  vyhovující rovnicím (3.17) taková, že  $\alpha > 0$ . To znamená, že pro  $a > \frac{1}{2}\pi$  existuje řešení rovnice (3.7), které osciluje s rostoucí amplitudou.

Poněvadž rovnice (3.7) splňuje princip superpozice, množina jejích řešení tvoří vektorový prostor. Provedené úvahy však ukazují, že tento prostor nemá konečnou dimenzi.

## 3.2 Rovnice s distribuovaným zpožděním

Uvažujme rovnici (3.3) s váhovou funkcí  $w$  splňující podmínky (3.4) s nezávisle proměnnou (časem)  $s$ :

$$\frac{dy(s)}{ds} = \beta \left( \alpha - \int_{-\infty}^s y(\sigma)w(t-\sigma)d\sigma \right).$$

Parametr  $\beta$  má rozměr převrácené hodnoty času a parametr  $\alpha$  má týž rozměr jako regulovaná veličina  $y$ . „Váha minulosti“  $w$  má rozměr převrácené hodnoty času a je současně hustotou nezáporné náhodné veličiny „zpoždění signálu, který určuje regulaci veličiny  $y$ “. Předpokládejme,

že hustota  $w$  náhodné veličiny je leptokurtická, tj. že existuje konečná střední hodnota zpoždění

$$\tau = \int_{-\infty}^{\infty} sw(s)ds = \int_0^{\infty} sw(s)ds.$$

Přitom samozřejmě platí  $\tau > 0$ ; hodnota  $\tau$  má rozměr času a představuje očekávané zpoždění signálu potřebného k regulaci veličiny  $y$ .

Podobně jako v případě rovnice s diskrétním zpožděním zavedeme bezrozměrný čas  $t$  a bezrozměrnou stavovou veličinu  $x = x(t)$  vztahy

$$t = \frac{s}{\tau}, \quad x(t) = y(\tau t) - \alpha.$$

Stavová proměnná  $x$  vyjadřuje (absolutní) odchylku regulované veličiny  $y$  od cílové hodnoty  $\alpha$ . Dále zavedeme hustotu  $k$  bezrozměrného zpoždění změnou měřítka

$$k(t) = \tau w(\tau t).$$

Pak je

$$\begin{aligned} x'(t) &= \tau y'(\tau t) = \tau \beta \left( \alpha - \int_{-\infty}^{\tau t} y(\sigma) w(\tau t - \sigma) d\sigma \right) = \tau \beta \left( \alpha - \int_{-\infty}^{\tau t} y(\sigma) w \left( \tau \left( t - \frac{\sigma}{\tau} \right) \right) d\sigma \right) = \\ &= \tau \beta \left( \alpha + \int_{\infty}^0 y(\tau(t - \sigma)) \tau w(\tau \sigma) d\sigma \right) = a \left( \alpha - \int_0^{\infty} (x(t - \sigma) + \alpha) k(\sigma) d\sigma \right) = \\ &= -a \int_0^{\infty} x(t - \sigma) k(\sigma) d\sigma = -a \int_{-\infty}^t x(\sigma) k(t - \sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Rovnice (3.3) je tedy ekvivalentní s rovnicí

$$x'(t) = -a \int_{-\infty}^t x(s) k(t - s) ds, \quad (3.18)$$

nebo stručněji s rovnicí, jejíž pravá strana je ve tvaru konvoluce

$$x' = -ax * k.$$

Tato rovnice vypadá jako obyčejná diferenciální rovnice pro neznámou funkci  $x$ , na jejíž pravé straně se nezávisle proměnná explicitně nevyskytuje; jedná se tedy o rovnici „svého druhu autonomní“. Transformovaná rovnice formálně obsahuje jediný parametr  $a$ . Ovšem další parametry jsou skryty v hustotě  $k$ .

Jako počáteční podmínku k rovnici (3.18) je potřebné zadat všechny hodnoty hledané funkce  $x$  až do počátečního času  $t_0$ , tj. podmínku

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \leq t_0. \quad (3.19)$$

Nyní zvolíme  $t_0 = 0$  a speciální počáteční funkci  $\varphi$ , konkrétně

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Integrací rovnice (3.18) podle času v mezích od 0 po  $t$  dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) - a \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)k(\sigma - s)ds \right) d\sigma = \\ &= x(0) - a \int_0^t \left( \int_{-\infty}^0 x(s)k(\sigma - s)ds + \int_0^{\sigma} x(s)k(\sigma - s)ds \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Pokud funkce  $x$  splňuje počáteční podmínku (3.19) s funkcí  $\varphi$  danou předpisem (3.20), pak platí

$$x(t) = 1 - a \int_0^t \left( \int_0^{\sigma} x(s)k(\sigma - s)ds \right) d\sigma. \quad (3.21)$$

Zavedeme funkci  $K$  vztahem

$$K(s) = \int_0^s k(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^s k(\sigma)d\sigma.$$

Pokud váhovou funkci  $k$  interpretujeme jako hustotu pravděpodobnosti beyzměrné náhodné veličiny „zpoždění regulačního signálu“, pak funkce  $K$  představuje distribuční funkci této náhodné veličiny.

Nyní v dvojnásobném integrálu na pravé straně rovnosti (3.21) změňme pořadí integrace a integrál upravíme,

$$\begin{aligned} \int_0^t \left( \int_0^{\sigma} x(s)k(\sigma - s)ds \right) d\sigma &= \int_0^t \left( \int_s^t x(s)k(\sigma - s)d\sigma \right) ds = \\ &= \int_0^t x(s) \left( \int_s^t k(\sigma - s)d\sigma \right) ds = \int_0^t x(s) \left( \int_0^{t-s} k(\sigma)d\sigma \right) ds = \int_0^t x(s)K(t - s)ds. \end{aligned}$$

Celkem tak dostáváme výsledek, že řešení počáteční úlohy

$$\begin{aligned} x'(t) &= -a \int_{-\infty}^t x(s)k(t - s)ds, & t > 0, \\ x(0) &= 1, & t = 0, \\ x(t) &= 0, & t < 0 \end{aligned}$$

pro diferenciální rovnici s distribuovaným zpožděním je současně řešením integrální rovnice

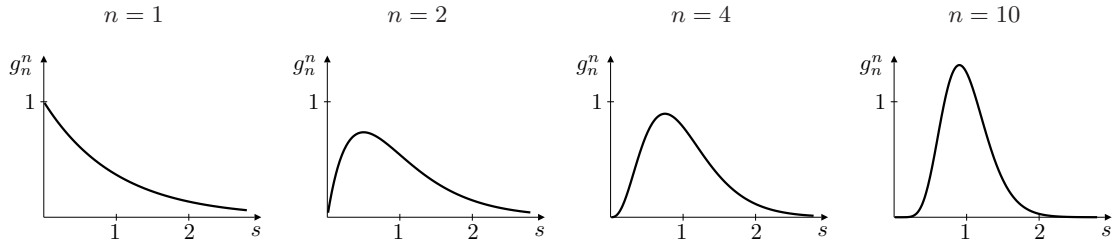
$$x(t) + a \int_0^t x(s)K(t - s)ds = 1.$$

Jedná se o speciální případ Volterrový integrální rovnice druhého druhu.

### 3.2.1 Distribuované zpoždění typu $\Gamma$

V rovnici (3.18) zvolíme speciální váhovou funkci  $w$ , konkrétně hustotu gama rozdělení pravděpodobnosti,

$$w(s) = g_{\alpha}^p(s) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} e^{-\alpha s} s^{p-1},$$



Obrázek 3.5: Hustota gama rozdělení pravděpodobnosti s parametry  $p = \alpha = n \in \mathbb{N}$  pro několik hodnot  $n$ .

kde  $\alpha$  a  $p$  jsou kladné parametry. Tato funkce má vlastnosti (3.4). Náhodnou veličinu  $T$  s hustotou  $g_\alpha^p$  interpretujeme jako zpoždění signálu. Očekávaná (střední) doba zpoždění  $\tau$  je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T &= \int_0^\infty s g_\alpha^p(s) ds = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-\alpha s} s^p ds = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \left( \left[ -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha s} s^p \right]_{s=0}^\infty + \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha s} s^{p-1} ds \right) = \\ &= \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} e^{-\alpha s} s^{p-1} ds = \frac{p}{\alpha} \int_0^\infty g_\alpha^p(s) ds = \frac{p}{\alpha}, \end{aligned}$$

druhý moment náhodné veličiny  $T$  je

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^2 g_\alpha^p(s) ds &= \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-\alpha s} s^{p+1} ds = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \left( \left[ -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha s} s^{p+1} \right]_{s=0}^\infty + \frac{p+1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha s} s^p ds \right) = \\ &= \frac{p+1}{\alpha} \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty s e^{-\alpha s} s^{p-1} ds = \frac{p+1}{\alpha} \int_0^\infty s g_\alpha^p(s) ds = \frac{p+1}{\alpha} \mathbb{E}T = \frac{(p+1)p}{\alpha^2}, \end{aligned}$$

takže rozptyl zpoždění je roven

$$\text{var } T = \mathbb{E}T^2 - (\mathbb{E}T)^2 = \frac{(p+1)p}{\alpha^2} - \left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 = \frac{p}{\alpha^2}.$$

Zejména pro  $p = \alpha = n \in \mathbb{N}$  platí

$$g_n^n(s) = \frac{n^n}{(n-1)!} e^{-ns} s^{n-1}, \quad \mathbb{E}T = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var } T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

To znamená, že posloupnost funkcí  $\{g_n^n\}_{n=1}^\infty$  je vytvářející posloupností Diracovy distribuce soustředěné v bodě 1. Grafy hustot  $g_n^n$  pro několik hodnot parametru  $n$  jsou zobrazeny na obrázku 3.5.

### Rovnice s diodistribovaným zpožděním typu $\Gamma$ v bezrozměrném tvaru

Vzhledem k tomu, že  $\tau = \mathbb{E}T = p/\alpha$ , je hustota  $k$  bezrozměrného zpoždění dána rovností

$$\begin{aligned} k(s) &= \tau w(\tau s) = \frac{p}{\alpha} g_\alpha^p(\tau s) = \frac{p}{\alpha} \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} e^{-\alpha \tau s} (\tau s)^{p-1} = \\ &= \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} e^{-ps} \left(\frac{p}{\alpha}\right)^p s^{p-1} = \frac{p^p}{\Gamma(p)} e^{-ps} s^{p-1} = g_p^p(s) \end{aligned}$$

a rovnice (3.18) získá tvar

$$x'(t) = -a \int_{-\infty}^t x(s) g_p^p(t-s) ds \quad (3.22)$$

s bezrozměrným časem  $t$  a s bezrozměrnými parametry  $a, p$ . Také tuto rovnici lze přepsat v kratším tvaru s konvolucí na pravé straně

$$x' = -ax * g_p^p.$$

Pokud zvolíme  $p \in \mathbb{N}$ , můžeme rovnici (3.7) s diskrétním zpožděním považovat za limitní případ rovnice (3.22) s distribuovaným zpožděním pro  $p \rightarrow \infty$ .

**Příklad: Řešení rovnice (3.22) s parametrem  $p = 1$**

Hustota gama rozdělení pravděpodobnosti s parametry  $p = \alpha = 1$  je klesající exponenciální funkce,  $g_1^1(s) = e^{-s}$ , tedy hustota náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením a střední hodnotou 1. Uvažujme tedy počáteční úlohu

$$\begin{aligned} x'(t) &= -a \int_{-\infty}^t x(s)e^{-(t-s)} ds, & t > 0, \\ x(t) &= \varphi(t), & t \leq 0. \end{aligned}$$

Zavedeme pomocnou funkci  $y = y(t)$  vztahem

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(s)e^{-t+s} ds.$$

Pak je

$$y'(t) = x(t) - \int_{-\infty}^t x(s)e^{-t+s} ds = x(t) - y(t)$$

a dále platí

$$x(0) = \varphi(0), \quad y(0) = \int_{-\infty}^0 \varphi(s)e^s ds. \quad (3.23)$$

Funkce  $x$  a  $y$  tedy splňují soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -ay \\ y' &= x - y \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami (3.23). Tato počáteční úloha je ekvivalentní s počátečním problémem pro obyčejnou lineární homogenní rovnici druhého řádu s konstantním koeficientem

$$x'' + x' + ax = 0, \quad x(0) = \varphi(0), \quad x'(0) = -a \int_{-\infty}^0 \varphi(s)e^s ds,$$

který má jediné řešení

$$x(t) = \begin{cases} \left( \varphi(0) \cosh \frac{1}{2} \sqrt{1-4a} t + \frac{A}{\sqrt{1-4a}} \sinh \frac{1}{2} \sqrt{1-4a} t \right) e^{-\frac{1}{2}t}, & a < \frac{1}{4}, \\ \left( \varphi(0) + \frac{1}{2}At \right) e^{-\frac{1}{2}t}, & a = \frac{1}{4}, \\ \left( \varphi(0) \cos \frac{1}{2} \sqrt{4a-1} t + \frac{A}{\sqrt{4a-1}} \sin \frac{1}{2} \sqrt{4a-1} t \right) e^{-\frac{1}{2}t}, & a > \frac{1}{4}, \end{cases}$$

kde jsme označili

$$A = \varphi(0) - 2a \int_{-\infty}^0 \varphi(s)e^s ds.$$



Tato funkce je současně řešením dané úlohy. Platí pro ni

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

a funkce  $x$  je v okolí nekonečna monotonní (pro  $a \leq \frac{1}{4}$ ), nebo osciluje kolem 0 (pro  $a > \frac{1}{4}$ ).

Z výsledků výpočtu vidíme, že regulace pomocí zpětné vazby s exponenciálně klesajícím vlivem minulosti, vede vždy k dosažení žádaného cílového stavu; při jeho dosahování se mohou objevit tlumené oscilace – pokud „intenzita regulování“ je příliš velká, nebo regulaci ovlivňuje příliš vzdálená minulost.

### Charakteristická rovnice a nestabilita

Rovnice (3.22) splňuje princip superpozice, jak se můžeme snadno přesvědčit přímým výpočtem. Proto zkusíme hledat její řešení ve tvaru exponenciální funkce  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Takové řešení musí splňovat rovnost

$$\lambda e^{\lambda t} = x'(t) = -a \int_{-\infty}^t e^{\lambda s} g_p^p(t-s) ds,$$

tedy pro  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > -p$  a  $p > 1$  bude platit

$$\begin{aligned} \lambda &= -a \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} g_p^p(t-s) ds = -a \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g_p^p(s) ds = \frac{-ap^p}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+p)s} s^{p-1} ds = \\ &= -\frac{ap^p}{\Gamma(p)} \left( \left[ -\frac{1}{\lambda+p} e^{-(\lambda+p)s} s^{p-1} \right]_{s=0}^{\infty} + \frac{p-1}{\lambda+p} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+p)s} s^{p-2} ds \right) = \\ &= -\frac{ap^p}{(\lambda+p)\Gamma(p-1)} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+p)s} s^{p-2} ds = -a \left( \frac{p}{\lambda+p} \right)^p \int_0^{\infty} \frac{(\lambda+p)^{p-1}}{\Gamma(p-1)} e^{-(\lambda+p)s} s^{p-2} ds = \\ &= -a \left( \frac{p}{\lambda+p} \right)^p \int_0^{\infty} g_{\lambda+p}^{p-1}(s) ds = -a \left( \frac{p}{\lambda+p} \right)^p, \end{aligned}$$

neboť  $g_{\lambda+p}^{p-1}$  je hustotou rozdělení pravděpodobnosti. Analogickým výpočtem se lze přesvědčit, že odvozená rovnost platí i pro  $p = 1$  a také pro  $\lambda$  komplexní s reálnou částí větší než  $-p$ . Dostáváme tak *charakteristickou rovnici příslušnou k rovnici (3.22)* ve tvaru

$$\lambda(\lambda+p)^p + ap^p = 0. \quad (3.24)$$

Z provedených výpočtů je zřejmé, že pro každý kořen  $\lambda$  této rovnice je exponenciální funkce  $x$ ,  $x(t) = e^{\lambda t}$  řešením diferenciální rovnice s distribuovaným zpožděním (3.22).

Pokud je parametr  $p$  přirozené číslo, pak je charakteristická rovnice (3.24) rovnicí algebraickou stupně  $p+1$ . V takovém případě můžeme vyšetřit standardními metodami, např. užitím Hurwitzova kritéria, za jakých podmínek má kořeny s kladnou reálnou částí, tedy za jakých podmínek je nulové řešení rovnice (3.22) nestabilní. Výsledky pro několik hodnot parametru  $p$  jsou shrnuty v následující tabulce:

| $p$ | dostatečná podmínka nestability                  |
|-----|--|
| 2   | $a > 4$  |
| 3   | $a > \frac{8}{3} \doteq 2,6667$                  |
| 4   | $a > 32(5\sqrt{2} - 7) \doteq 2,2742$            |
| 5   | $a > \frac{16}{5}(7\sqrt{5} - 15) \doteq 2,0879$ |

**Ekvivalence rovnice (3.22) se systémem obyčejných lineárních rovnic**

Nechť  $p \in \mathbb{N}$  a uvažujme počáteční úlohu pro rovnici s distribuovaným zpožděním

$$\begin{aligned} x'(t) &= -a \int_{-\infty}^t x(s)g_p^p(t-s)ds, & t > 0, \\ x(t) &= \varphi(t), & t \leq 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pro funkce  $g_p^j$  definované vztahy

$$g_p^j(s) = \frac{p^j}{(j-1)!} e^{-ps} s^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

platí

$$g_p^1(0) = p, \quad g_p^j(0) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, p,$$

$$\frac{d}{ds} g_p^1(s) = \frac{d}{ds} p e^{-ps} = -p^2 e^{-ps} = -p g_p^1(s),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} g_p^j(s) &= \frac{p^j}{(j-1)!} (-ps^{j-1} + (j-1)s^{j-2}) e^{-ps} = \\ &= p \left( \frac{p^{j-1}}{(j-2)!} s^{j-2} - \frac{p^j}{(j-1)!} s^{j-1} \right) e^{-ps} = p (g_p^{j-1}(s) - g_p^j(s)), \quad j = 2, 3, \dots, p. \end{aligned}$$

Nechť nyní funkce  $x = x(t)$  je řešením úlohy (3.25). Položme

$$y_0(t) = x(t), \quad y_j(t) = \int_{-\infty}^t x(s)g_p^j(t-s)ds, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Pak platí

$$y_0(0) = \varphi(0), \quad y_j(0) = \int_{-\infty}^0 \varphi(s)g_p^j(t-s)ds, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (3.26)$$

dále

$$y_0'(t) = -a \int_{-\infty}^t x(s)g_p^p(t-s)ds = -a y_p(t)$$

a s využitím odvozených identit pro funkce  $g_p^j$  dostaneme

$$y_1'(t) = x(t)g_p^1(0) + \int_{-\infty}^t x(s) \frac{d}{ds} g_p^1(t-s)ds = p x(t) - p \int_{-\infty}^t x(s)g_p^1(t-s)ds = p(y_0(t) - y_1(t)),$$

$$\begin{aligned} y_j'(t) &= x(t)g_p^j(0) + \int_{-\infty}^t x(s) \frac{d}{ds} g_p^j(t-s)ds = p \int_{-\infty}^t x(s) (g_p^{j-1}(t-s) - g_p^j(t-s)) ds = \\ &= p(y_{j-1}(t) - y_j(t)), \quad j = 2, 3, \dots, p. \end{aligned}$$

To znamená, že funkce  $y_0, y_1, \dots, y_p$  jsou řešením systému obyčejných homogenních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} y_0' &= -a y_p, \\ y_j' &= p(y_{j-1} - y_j), \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (3.27)$$

a s počátečními podmínkami (3.26). Tuto počáteční úlohu můžeme zapsat v obvyklém vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{p-1} \\ y_p \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a \\ p & -p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & -p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{p-1} \\ y_p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_0(0) \\ y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_{p-1}(0) \\ y_p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi * g_p^1(0) \\ \varphi * g_p^2(0) \\ \vdots \\ \varphi * g_p^{p-1}(0) \\ \varphi * g_p^p(0) \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Nultá složka řešení tohoto systému je řešením počáteční úlohy (3.25).

Ještě si můžeme všimnout, že charakteristická rovnice příslušná k systému obyčejných lineárních rovnic (3.28) je tvaru (3.24).

Část III  
Aplikace



## Kapitola 4

# Model věkově strukturované populace

V úvodu ke Kapitole 1 jsme jako model vývoje věkově strukturované populace zkonstruovali McKendrickovu-von Foersterovu rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(a)u, \quad t > 0, \quad a > 0 \quad (4.1)$$

s počáteční podmínkou

$$u(0, a) = \varphi(a), \quad a > 0 \quad (4.2)$$

a okrajovou podmínkou

$$u(t, 0) = \int_0^{\infty} \beta(\xi)u(t, \xi)d\xi, \quad t > 0. \quad (4.3)$$

Hodnota  $u(t, 0)$  vyjadřuje hustotu jedinců (nebo samic) věku  $a$  v čase  $t$ , kladná funkce  $\mu$  je věkově specifická úmrtnost a nezáporná funkce  $\beta$  je věkově specifická porodnost.

### Řešení úlohy (4.1), (4.2), (4.3)

Rovnice (4.1) je lineární homogenní parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných. Můžeme ji tedy řešit postupem uvedeným v části 1.1.2.

Okrajová podmínka má pravou stranu ve tvaru integrálu, tj. lineárního funkcionálu. „Okrajovou funkci“  $u(\cdot, 0)$  pro zjednodušení zápisu označíme symbolem  $x$ , tj.

$$u(t, 0) = x(t). \quad (4.4)$$

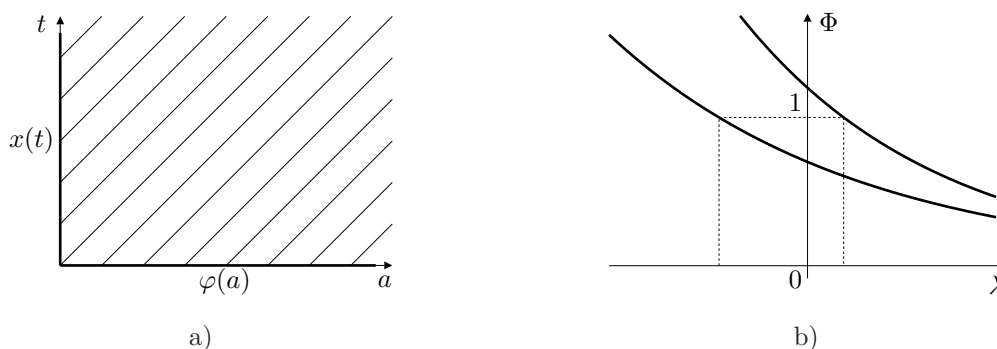
Charakteristická rovnice příslušná k parciální rovnici (4.1) je

$$\frac{da}{dt} = 1$$

a má obecné řešení v implicitním vyjádření

$$a - t = \text{const.}$$

Charakteristiky rovnice (4.1) jsou tedy polopřímky rovnoběžné s osou prvního kvadrantu. Z toho je také vidět, že charakteristiky určené kladnou konstantou na pravé straně této rovnosti protínají osu  $a$ ; na charakteristikách s kladnou konstantou jsou tedy hodnoty funkce  $u$  určeny počáteční podmínkou (4.2). Podobně, charakteristiky určené zápornou konstantou na pravé straně uvedené rovnosti protínají osu  $t$  a hodnoty funkce  $u$  jsou na nich určeny okrajovou podmínkou (4.3). Situace je znázorněna na Obrázku 4.1 a).



Obrázek 4.1: K řešení McKendrickovy-von Foersterovy rovnice. a) charakteristiky rovnice (4.1), b) možný průběh funkce  $\Phi$ , tj. pravé strany rovnice (4.19).

Pro  $t \leq a$  zavedeme nové souřadnice  $\tau$  a  $\xi$  vztahy

$$\tau = t, \quad \xi = a - t.$$

Po této transformaci rovnice (4.1) s počáteční podmínkou (4.2) nabude tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\mu(\xi + \tau)u, \quad u(0, \xi) = \varphi(\xi).$$

Řešení této počáteční úlohy pro obyčejnou lineární homogenní rovnici je

$$u(\tau, \xi) = \varphi(\xi) e^{-\int_{\xi}^{\xi+\tau} \mu(\sigma) d\sigma}.$$

Návratem k původním proměnným dostaneme

$$u(t, a) = \varphi(a - t) e^{-\int_{a-t}^a \mu(\xi) d\xi}. \quad (4.5)$$

Pro  $t > a$  zavedeme nové souřadnice  $\tau$  a  $\xi$  vztahy

$$\tau = t - a, \quad \xi = a;$$

transformaci tohoto tvaru volíme proto, aby transformovaný čas  $\tau$  plynul od minulosti do budoucnosti, tj. rostl s rostoucím původním časem  $t$ . Nyní dostaneme rovnici (4.1) v kanonickém tvaru a k ní příslušnou transformovanou okrajovou podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\mu(\xi)u, \quad u(\tau, 0) = x(\tau).$$

Řešením této Cauchyovy úlohy je funkce  $u$  definovaná vztahem

$$u(\tau, \xi) = x(\tau) e^{-\int_0^{\xi} \mu(\xi) d\xi}.$$

V původních proměnných tedy

$$u(t, x) = x(t - a) e^{-\int_0^a \mu(\xi) d\xi}. \quad (4.6)$$

Pro zjednodušení zápisu dosud dosažených výsledků zavedeme podobně jako v úvodu Kapitoly 1 označení

$$\ell(a) = e^{-\int_0^a \mu(\xi) d\xi}. \quad (4.7)$$

Zřejmě je  $\ell(a) > 0$  pro každé  $a \geq 0$ . Řešení úlohy (4.1), (4.2), (4.3) rozepsané rovnostmi (4.5), (4.6) můžeme jednotně zapsat jako

$$u(t, a) = \begin{cases} \varphi(a-t) \frac{\ell(a)}{\ell(a-t)}, & t \leq a, \\ x(t-a)\ell(a), & t > a. \end{cases} \quad (4.8)$$

V tomto zápisu zůstává neurčená „okrajová funkce“  $x$ , jejíž hodnota vyjadřuje hustotu novorozenců v čase  $t$ .

Funkce  $x$  zavedená vztahem (4.4) je definována integrálem na pravé straně rovnosti (4.3), v němž vystupuje funkce  $u$ , která je definována vztahem (4.8). Z toho je vidět, že je potřebné integrál z rovnosti (4.3) rozdělit na součet dvou integrálů,

$$x(t) = \int_0^\infty \beta(s)u(t, s)ds = \int_0^t \beta(s)u(t, s)ds + \int_t^\infty \beta(s)u(t, s)ds.$$

Každý z těchto integrálů upravíme:

$$\begin{aligned} \int_0^t \beta(s)u(t, s)ds &= \int_0^t \beta(s)x(t-s)\ell(s)ds = \int_0^t \beta(t-\xi)\ell(t-\xi)x(\xi)d\xi, \\ \int_t^\infty \beta(s)u(t, s)ds &= \int_t^\infty \beta(s)\varphi(s-t) \frac{\ell(s)}{\ell(s-t)}ds = \int_0^\infty \beta(\xi+t) \frac{\ell(\xi+t)}{\ell(\xi)}\varphi(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Celkem tak dostáváme, že funkce  $x$  je řešením integrální rovnice

$$x(t) = \int_0^t \beta(t-\xi)\ell(t-\xi)x(\xi)d\xi + \int_0^\infty \beta(\xi+t) \frac{\ell(\xi+t)}{\ell(\xi)}\varphi(\xi)d\xi. \quad (4.9)$$

Tato rovnice bývá v demografických aplikacích nazývána *spojitá Lotkova rovnice obnovy v nehomogenním tvaru*.

**Závěr:** Řešení úlohy (4.1), (4.2), (4.3) je dáno rovností (4.8), kde funkce  $\ell$  je definována rovností (4.7) a funkce  $x$  je řešením integrální rovnice (4.9).

### Lotkova rovnice obnovy

Nehomogenní Lotkovu rovnici obnovy (4.9) můžeme vyjádřit i jinými způsoby:

- Označme

$$K(t, s) = \beta(t-s)\ell(t-s), \quad F(t) = \int_0^\infty \beta(\xi+t) \frac{\ell(\xi+t)}{\ell(\xi)}\varphi(\xi)d\xi.$$

Při tomto označení rovnice (4.9) nabude tvar

$$x(t) = \int_0^t K(t, s)x(s)ds + F(t).$$

Integrální rovnice tohoto tvaru se nazývá *Volterrova integrální rovnice druhého druhu*, funkce  $K$  je její jádro.



- Označme

$$k(t) = \begin{cases} \beta(t)\ell(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

V prvním integrálu na pravé straně rovnice (4.9) tak dostaneme konvoluci,

$$x(t) = \int_0^{\infty} k(t-\xi)x(\xi)d\xi + F(t),$$

takže integrální rovnici (4.9) můžeme přepsat jako rovnici konvolučního typu

$$x = k * x + F.$$

- Rovnici (4.12) zderivujeme podle času. S využitím vztahu

$$\frac{d}{dt}\ell(t-\xi) = \frac{d}{dt}e^{\int_0^{t-\xi}\mu(s)ds} = e^{\int_0^{t-\xi}\mu(s)ds}(-\mu(t-\xi)) = -\mu(t-\xi)\ell(t-\xi)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} x'(t) &= \beta(0)\ell(0)x(t) + \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt}(\beta(t-\xi)\ell(t-\xi))x(\xi)d\xi = \\ &= \beta(0)x(t) + \int_{-\infty}^t (\beta'(t-\xi) - \mu(t-\xi)\beta(t-\xi))\ell(t-\xi)x(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Označíme  $w(s) = (\beta'(s) - \mu(s)\beta(s))\ell(s)$  a výsledek přepíšeme:

$$x'(t) = \beta(0)x(t) + \int_{-\infty}^t w(t-\xi)x(\xi)d\xi. \quad (4.10)$$

To je obyčejná diferenciální rovnice s distribuovaným zpožděním. Příslušná počáteční podmínka je (4.13).

Také řešení úlohy (4.1), (4.2), (4.3) můžeme vyjádřit i jinak. Povšimněme si, že řešení této úlohy je zúžením řešení okrajové úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(a)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

$$u(t, 0) = \begin{cases} \frac{\varphi(-t)}{\ell(-t)}, & t \leq 0, \\ \int_0^{\infty} \beta(s)u(t, s)ds, & t > 0, \end{cases} \quad a > 0. \quad (4.11)$$

Jedná se o úlohu pro stejnou rovnici na širším oboru, tvar okrajové podmínky plyne z tvaru řešení původní úlohy na charakteristikách. Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že řešení pomocné úlohy (4.11) je tvaru

$$u(t, a) = u(t-a, 0)\ell(a) = x(t-a)\ell(a).$$

Pro okrajovou funkci  $x = x(t) = u(t, 0)$  nyní platí: pro  $t > 0$  je

$$x(t) = \int_0^{\infty} \beta(s)u(t, s)ds = \int_0^{\infty} \beta(s)\ell(s)x(t-s)ds = \int_{-\infty}^t \beta(t-\xi)\ell(t-\xi)x(\xi)d\xi,$$

a pro  $t \leq 0$  je  $x(t) = \varphi(-t)/\ell(-t)$ . Funkce  $x$  je tedy řešením integrální rovnice

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \beta(t-\xi)\ell(t-\xi)x(\xi)d\xi, \quad t > 0 \quad (4.12)$$

s podmínkou

$$x(t) = \frac{\varphi(-t)}{\ell(-t)}, \quad t \leq 0. \quad (4.13)$$

Rovnice (4.12) bývá nazývána *homogenní Lotkova rovnice obnovy*.

### Specifická míra přežití a specifická úmrtnost

Úloha (4.1), (4.2), (4.3) má řešení dané rovnostmi (4.8), (4.7) a (4.9). Podívejme se podrobněji na interpretaci tohoto výsledku.

Nejprve si povšimněme, že pro funkci  $\ell$  definovanou rovností (4.7) platí

$$\ell(0) = e^{-\int_0^0 \mu(\xi)d\xi} = 1, \quad \ell'(a) = -\mu(a)e^{-\int_0^a \mu(\xi)d\xi} = -\mu(a)\ell(a).$$

Funkce  $\ell$  je tedy řešením Cauchyovy úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{d\ell}{da} = -\mu(a)\ell, \quad \ell(0) = 1. \quad (4.14)$$

Věnujme se interpretaci této funkce.

Za novorozence budeme považovat jedince, který má věk z intervalu  $[0, \alpha]$ , kde  $\alpha$  je nějaké „malé“ kladné číslo. Množství novorozenců v čase  $t$  je tedy

$$N(t, 0, \alpha) = \int_0^\alpha u(t, s)ds.$$

Množství jedinců, kteří byli v čase  $t$  novorozenci a dožili se věku  $a$  je

$$N(t+a, a, \alpha) = \int_a^{a+\alpha} u(t+a, s)ds.$$

Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu existují čísla  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 1]$  taková, že

$$\int_0^\alpha u(t, s)ds = \alpha u(t, \alpha\vartheta_1), \quad \int_a^{a+\alpha} u(t, s)ds = \alpha u(t, a + \alpha\vartheta_2).$$

Klasickou pravděpodobnost, že se jedinec dožije věku  $a$  nyní vyjádříme podílem

$$\frac{N(t+a, a, \alpha)}{N(t, 0, \alpha)} = \frac{u(t, a + \alpha\vartheta_2)}{u(t, \alpha\vartheta_1)}.$$

Pomocí řešení (4.8) úlohy (4.1), (4.2), (4.3) a s využitím počáteční podmínky v úloze (4.14) vypočítáme limitu

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{N(t+a, a, \alpha)}{N(t, 0, \alpha)} = \frac{u(t+a, a)}{u(t, 0)} = \frac{x(t)\ell(a)}{x(t)\ell(0)} = \ell(a).$$

Funkce  $\ell(a)$  tedy vyjadřuje pravděpodobnost, že se jedinec dožije věku  $a$ . Pro  $a_0 \in [0, a]$  vyjadřuje podíl

$$\frac{\ell(a)}{\ell(a_0)}$$

podmíněnou pravděpodobnost, že se jedinec dožije věku  $a$  za podmínky, že se již dožil věku  $a_0$ . Proto se funkce  $\ell$  nazývá *specifická míra přežití* (*age-specific survivorship*).

Řešení (4.8) úlohy (4.1), (4.2), (4.3) pro  $a > t$  lze tedy číst tak, že (očekávaná) hustota jedinců věku  $a$  v čase  $t$  je rovna hustotě jedinců, kteří měli před časem  $t$  věk  $a - t$  a časového okamžiku  $t$  se dožili. Slovo „hustota“ v předchozí větě lze nahradit poněkud vágním slovem „množství“.

Hodnota  $a_H$ , pro kterou platí  $\ell(a_H) = \frac{1}{2}$ , představuje jakýsi „poločas přežití“, tj. věk, do kterého vymře polovina jedinců narozených ve stejném čase<sup>1</sup>. Můžeme ho také vyjádřit pomocí věkově specifické úmrtnosti  $\mu$  jako hodnotu, která je řešením rovnice

$$\int_0^{a_H} \mu(s) ds = \ln 2. \quad (4.15)$$

Obvyklý průběh věkově specifické úmrtnosti  $\mu$  pro přirozenou lidskou populaci je znázorněn na Obrázku 1.1 – poměrně velká úmrtnost novorozenců rychle klesne na nějakou malou kladnou hodnotu, řekněme  $\mu_0$ , po většinu života na této hodnotě zůstává a v seniu prudce naroste (po šedesátce se holt umírá i bez koronaviru)<sup>2</sup>.

Dobu vysoké novorozenecké úmrtnosti budeme považovat za zanedbatelně krátkou a podíváme se na průběh úmrtnosti od dosažení minima  $\mu_0$ . V aplikacích (v pojišťovnictví) bývá používána Gompertzova úmrtnost  $\mu_G$ , která je definována vztahem

$$\mu_G(a) = \mu_0 e^{\kappa a}, \quad (4.16)$$

kde  $\kappa$  je kladný koeficient. Příslušná Gompertzova míra přežití je

$$\ell_G(a) = \exp \left\{ - \int_0^a \mu_0 e^{\kappa \xi} d\xi \right\} = \exp \left\{ \frac{\mu_0}{\kappa} (1 - e^{\kappa a}) \right\}.$$

Hodnoty konstant  $\kappa$  a  $\mu_0$  se obvykle volí jako

$$\kappa = \frac{1}{a_H}, \quad \mu_0 = \frac{\ln 2}{a_H(e - 1)},$$

Gompertzova míra přežití pak závisí na jediném parametru  $a_H$ . Při této volbě platí

$$\ell_G(a_H) = \exp \left\{ \frac{\ln 2}{e - 1} (1 - e^{a_H/a_H}) \right\} = \frac{1}{2}$$

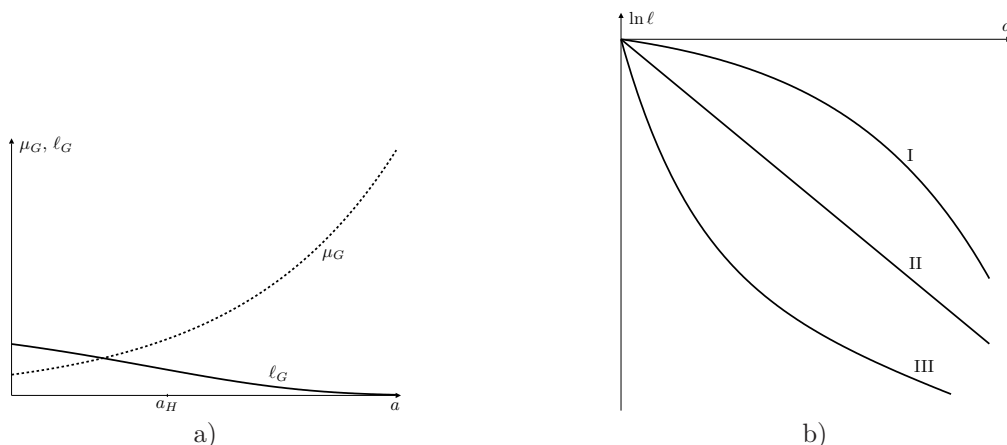
v souladu s definicí hodnoty  $a_H$ . Průběh Gompertzovy úmrtnosti a míry přežití je znázorněn na Obrázku 4.2 a).

U populace jiných živočichů může průběh specifické míry přežití vypadat i jinak. Rozlišíme tři její typy, viz Obrázek 4.2 b).

- I. Většina jedinců se dožije jistého věku a pak ve velké míře umírají. Typickým představitelem takových populací jsou velcí savci (včetně člověka), příkladem je zmíněná Gompertzova míra přežití.
- II. Úmrtnost je konstantní po celou dobu života,  $\mu(a) = \text{const}$ . To je typické např. pro malé ptáky.
- III. Úmrtnost je na začátku života velká a s postupujícím věkem klesá. Tato situace je typická pro ryby (mnoho potěru, málo vzrostlých ryb) nebo některé plazy.

<sup>1</sup>Množina jedinců narozených ve stejném čase bývá, zejména v analýze přežití, nazývána *kohorta*.

<sup>2</sup>Tato poznámka zůstala jako památka na dobu, kdy tato část textu vznikala.



Obrázek 4.2: a) Průběh Gompertzovy specifické úmrtnosti  $\mu_G$  a příslušné míry přežití  $\ell_G$ . b) Možné průběhy specifické míry přežití (stupnice na svislé ose je logaritmická).

### Věkově stabilizované řešení rovnice (4.1)

Okrajová funkce  $x = u(t, 0)$  je řešením Lotkovy rovnice (4.9). Počáteční funkce  $\varphi$  se vyskytuje pouze ve druhém sčítanci na pravé straně této rovnice. Pokud má specifická porodnost  $\beta$  tvar uvedený na Obrázku 1.1 b), tedy pokud funkce  $\beta$  má kompaktní nosič, je pro dostatečně velkou hodnotu proměnné  $t$  její hodnota  $\beta(\xi + t)$  nulová při libovolném  $\xi \geq 0$ . To znamená, že řešení úlohy po dostatečně dlouhém čase nezávisí na počáteční hustotě  $\varphi$ . V tomto smyslu je tedy McKendrickova-von Foersterova rovnice (4.1) *ergodická*.

Uvažujme nyní populaci, která se dostatečně dlouho vyvíjela; její počátek je v nedohledné minulosti. Vývoj hustoty takové populace můžeme modelovat homogenní okrajovou úlohou

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(a)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

$$u(t, 0) = \int_0^{\infty} \beta(\xi)u(t\xi)d\xi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tato úloha má podle výsledků uvedených části 1.3.3 řešení tvaru  $u(t, a) = e^{\lambda t}A(a)$ , kde funkce  $A$  je v obecném případě řešením obyčejné diferenciální rovnice (1.94). V našem konkrétním případě se tedy ptáme, zda existuje číslo  $\lambda$  takové, že úloha

$$-A' - \mu(a)A = \lambda A, \quad a > 0, \quad (4.17)$$

$$A(0) = \int_0^{\infty} \beta(s)A(s)ds, \quad (4.18)$$

má nějaké „zajímavé“ řešení. Tato úloha samozřejmě má triviální nulové řešení  $A \equiv 0$  pro libovolnou hodnotu  $\lambda$ . Takové řešení zajímavé není; lze ho interpretovat jako model populace s nulovou hustotou, tedy nepřítomnost populace.

Obyčejná lineární homogenní rovnice (4.17) má obecné řešení

$$A(a) = C \exp^{-\lambda a - \int_0^a \mu(\xi)d\xi} = C\ell(a)e^{-\lambda a}.$$

Řešení je nenulové, pokud  $C \neq 0$ . Po dosazení do podmínky (4.18) a vydělení konstantou  $C$  dostaneme

$$1 = \int_0^{\infty} \beta(s)\ell(s)e^{-\lambda s} ds. \quad (4.19)$$

Číslo  $\lambda$  má být řešením této rovnice. Označme její pravou stranu symbolem  $\Phi(\lambda)$ .

Předpokládejme, že funkce  $\beta$  a  $\mu$  splňují přirozené podmínky kladené na věkově specifickou plodnost a úmrtnost, tedy že jsou to funkce integrabilní a nezáporné; funkce  $\beta$  je navíc ohraničená a kladná na nějakém uzavřeném intervalu  $[a_1, a_2]$ . Za těchto předpokladů je  $\ell$  nerostoucí funkce splňující nerovnosti  $0 < \ell(s) \leq 1$  pro každé  $s \geq 0$  a integrál na pravé straně rovnosti (4.19) je kladný. Dále odvodíme:

$$\Phi'(\lambda) = - \int_0^{\infty} s\beta(s)\ell(s)e^{-\lambda s} ds < 0, \quad \text{pro každé } \lambda;$$

označíme  $\beta^* = \sup \{\beta(s) : s \geq 0\}$  a dostaneme

$$0 < \Phi(\lambda) \leq \beta^* \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} ds = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\beta^*}{\lambda} (1 - e^{-\lambda s}) = \frac{\beta^*}{\lambda}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\beta^*}{\lambda} = 0, \quad \text{tj. } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(\lambda) = 0;$$

nakonec označíme minimum funkce  $\beta$  na uzavřeném intervalu  $[a_1, a_2]$  symbolem  $\beta_*$ , tj.

$$\beta_* = \min \{\beta(s) : a_1 \leq s \leq a_2\} > 0,$$

a pro  $\lambda < 0$  dostaneme

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \int_0^{\infty} \beta(s)\ell(s)e^{-\lambda s} ds \geq \int_{a_1}^{a_2} \beta(s)\ell(s)e^{-\lambda s} ds \geq \int_{a_1}^{a_2} \beta(s)\ell(s)e^{-\lambda s} ds \geq \\ &\geq \beta_* \ell(a_2) e^{-\lambda(a_1)} \int_{a_1}^{a_2} ds = \beta_* \ell(a_2) e^{-\lambda(a_1)} (a_2 - a_1), \end{aligned}$$

z čehož plyne

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \Phi(\lambda) \geq (a_2 - a_1) \beta_* \ell(a_2) \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^{-\lambda a_1} = \infty.$$

Celkem vidíme, že  $\Phi$  je klesající funkce, která na intervalu  $(-\infty, \infty)$  klesne od nekonečna k nule. To znamená, že rovnice

$$1 = \Phi(\lambda)$$

má právě jedno reálné řešení. Existuje tedy jediné reálné číslo  $\lambda$  takové, že okrajová úloha (4.17), (4.18) má nenulové řešení tvaru

$$A(a) = C\ell(a)e^{-\lambda a}.$$

Vzhledem k faktu, že funkce  $\Phi$  je klesající, znaménko vlastního čísla  $\lambda$  je určeno hodnotou výrazu

$$\Phi(0) = \int_0^{\infty} \beta(s)\ell(s)ds,$$

viz Obrázek 4.1 b). Je-li  $\Phi(0) > 1$ , pak  $\lambda > 0$ ; je-li  $\Phi(0) < 1$ , pak  $\lambda < 0$ .

Dosažené výsledky nyní můžeme shrnout: Rovnice (4.1) s okrajovou podmínkou (4.3) má řešení tvaru

$$u(t, a) = C\ell(a)e^{-\lambda a}e^{\lambda t};$$

přitom  $C$  je nějaké kladné číslo, které vyjadřuje hustotu novorozenců v čase  $t = 0$ ,  $C = u(0, 0)$ , parametr  $\lambda$  je řešením rovnice (4.19).

Celková velikost věkově stabilizované populace v čase  $t$  je dána integrálem

$$\int_0^{\infty} u(t, \xi) d\xi = Ce^{\lambda t} \int_0^{\infty} \ell(\xi) e^{-\lambda \xi} d\xi.$$

To znamená, že celková velikost takové populace roste exponenciálně. Hodnota  $\lambda$  tedy vyjadřuje (Malthusovský) *koefficient růstu (growth rate)*. Viděli jsme, že pro vlastní hodnotu  $\lambda$  platí

$$\Phi(0) > 1 \Rightarrow \lambda > 0 \text{ (populace roste),} \quad \Phi(0) < 1 \Rightarrow \lambda < 0 \text{ (populace vymírá).}$$

Odtud plyne, že hodnota

$$R_0 = \Phi(0) = \int_0^{\infty} \beta(s)\ell(s)ds,$$

zvaná *čistá míra reprodukce (net reproduction rate)*<sup>3</sup> určuje, zda populace vymírá nebo roste. Integrovaná funkce je specifická porodnost „diskontovaná“ pravděpodobností přežití. Vyjadřuje tedy očekávaný počet potomků, který jedinec (samice, pár) „vyprodukuje“ za celý svůj život.

### Demografické charakteristiky populace

Funkce  $w$  daná předpisem

$$w(a) = \ell(a)e^{-\lambda a} \tag{4.20}$$

popisuje stabilizovanou strukturu populace (distribuci věku). Trochu podrobněji: Množství jedinců ve věku od  $a_1$  do  $a_2$  a množství všech jedinců v čase  $t$  je dáno integrály

$$\int_{a_1}^{a_2} Ce^{\lambda t} w(\xi) d\xi \quad \text{a} \quad \int_0^{\infty} Ce^{\lambda t} w(\xi) d\xi.$$

To znamená, že (klasická) pravděpodobnost jevu „náhodně vybraný jedinec z populace bude mít věk mezi  $a_1$  a  $a_2$ “ je dána podílem těchto integrálů a tedy je rovna

$$\frac{\int_{a_1}^{a_2} w(\xi) d\xi}{\int_0^{\infty} w(\xi) d\xi} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} w(a) da}{\int_0^{\infty} w(\xi) d\xi} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} \ell(a)e^{-\lambda a} da}{\int_0^{\infty} \ell(\xi)e^{-\lambda \xi} d\xi}.$$

Z této úvahy plyne, že funkce nezávisle proměnné  $a$  daná předpisem

$$\frac{\ell(a)e^{-\lambda a}}{\int_0^{\infty} \ell(\xi)e^{-\lambda \xi} d\xi} = \frac{w(a)}{\int_0^{\infty} w(\xi) d\xi}$$

je hustotou spojitě náhodné veličiny „věk jedince ze strukturně stabilizované populace“.

Pro funkci  $w$  danou předpisem (4.20) podle (4.14) dále platí

$$w'(a) = \ell' e^{-\lambda a} - \lambda \ell(a)e^{-\lambda a} = -(\mu(a) + \lambda)\ell(a)e^{-\lambda a}.$$

Pokud tedy  $\lambda \geq 0$  (populace nevymírá), je  $w'(a) < 0$  a funkce  $w$  je klesající. To znamená, že v nevymírající populaci jsou novorozenci nejpočetnější skupinou, s rostoucím věkem zastoupení jedinců klesá. Nebo naopak, nejsou-li novorozenci nejpočetnější skupinou v populaci, tato populace vymírá.

Zvolme nyní pevně čas  $t$  a věk  $a$ . Při následující úvaze budeme předpokládat, že populace má stabilizovanou věkovou strukturu a roste, tj.  $\lambda > 0$ . Hodnota  $\beta(a)$ , zhruba řečeno, vyjadřuje množství novorozenců, které „vyprodukuje“ jedinec věku  $a$  za jednotku času. Hodnota

$$\beta(s) \frac{\ell(s)}{\ell(a)}$$

<sup>3</sup>Nezaměňovat s populárním koefficientem  $R_0$  používaným v epidemiologických modelech!

vyjadřuje očekávaný (střední) počet novorozenců, které tento jedinec „vyprodukuje“ v čase  $t+s-a$ , kdy bude mít věk  $s$ ; jedná se o počet novorozenců „vyprodukovaných“ za jednotku času jedincem věku  $s$  násobený pravděpodobností, že tento jedinec v čase  $t$  žil a měl v něm věk  $a$ . V čase  $t+s-a$  však bude populace  $e^{\lambda(s-a)}$ krát větší, než v čase  $t$ ; relativní příspěvek těchto novorozenců v čase  $t+s-a$  k velikosti populace tedy bude  $e^{\lambda(s-a)}$ krát menší, než by byl v čase  $t$ . Z těchto úvah uzavřeme, že hodnota

$$\beta(s) \frac{\ell(s)}{\ell(a)} \frac{1}{e^{\lambda(s-a)}}$$

vyjadřuje očekávaný relativní příspěvek jedince, který měl v čase  $t$  věk  $a$  k reprodukci populace (k „produkci“ potomstva). Z těchto důvodů definujeme *reprodukční hodnotu jedince věku  $a$*  (*reproductive value of an individual of age  $a$* ) jako

$$v(a) = \int_a^{\infty} \beta(s) \frac{\ell(s)}{\ell(a)} e^{-\lambda(s-a)} ds = \frac{e^{\lambda a}}{\ell(a)} \int_a^{\infty} \beta(s) \ell(s) e^{-\lambda s} ds = \frac{1}{w(a)} \int_a^{\infty} \beta(s) \ell(s) e^{-\lambda s} ds,$$

tj. očekávaný relativní počet novorozenců, kterým jedinec věku  $a$  přispěje k velikosti populace až do konce svého života.

V teorii přežití (teorii spolehlivosti) je základním pojmem náhodná veličina  $T$  vyjadřující čas do smrti (poruchy) zvaná *doba přežití* (*survival time*). Funkce  $\ell$  je pravděpodobnost, že se jedinec z populace popsané McKendrickovou-von Foersterovou rovnicí dožije věku  $a$ . Proto distribuční funkce náhodné veličiny  $T$  pro tuto populaci je

$$P(T < a) = 1 - P(T \geq a) = 1 - \ell(a).$$

Funkce  $\ell$  je v teorii přežití nazývána *funkce přežití* (*survivor function*), specifická úmrtnost  $\mu$  se nazývá *riziková funkce* (*hazard function*) a její integrál  $\int_0^a \mu(\xi) d\xi$  je nazýván *kumulativní riziková funkce* (*integrated hazard*).

Hodnota  $a_H$  definovaná rovností (4.15), tj.  $\ell(a_H) = \frac{1}{2}$ , se nazývá *medián přežití* (*median survival time*).

Derivace distribuční funkce náhodné veličiny  $T$ , tedy její hustota, je podle (4.14) rovna  $\mu\ell$ . Střední hodnota veličiny  $T$  nazývaná *střední délka života* nebo *očekávaná doba dožití* (*life expectancy*) je dána výrazem

$$e_0 = ET = \int_0^{\infty} a\mu(a)\ell(a)da. \quad (4.21)$$

Obě veličiny – medián přežití a střední délka života – nějak vyjadřují pravděpodobnou délku života. Je ovšem potřebné zdůraznit, že žádnou z nich nelze chápat jako předpověď délky života. Byly totiž odvozeny za předpokladu, že vývoj věkově strukturované populace je popsán autonomní rovnicí (4.1). Veličiny  $a_H$  a  $ET$  lze tedy interpretovat jako střední nebo očekávanou délku života pouze za předpokladu, že se nemění základní charakteristiky populace, tedy plodnost  $\beta$  a úmrtnost  $\mu$ . Stručně řečeno, hodnoty  $a_H$  a  $ET$  nejsou *predikcí* délky života, ale pouze *projekcí* nebo *extrapolací* současného stavu.

Střední hodnotu (4.21) náhodné veličiny  $T$  lze podrobněji charakterizovat jako dobu dožití očekávanou při narození. Můžeme však také vyšetřovat náhodnou veličinu  $T_a$  vyjadřující čas do smrti jedince ve věku  $a > 0$ . Distribuční funkce a hustota této náhodné veličiny jsou

$$P(T < \xi | T \geq a) = \frac{1 - \ell(\xi)}{\ell(a)} \quad \text{a} \quad \mu(\xi) \frac{\ell(\xi)}{\ell(a)}.$$

To znamená, že *očekávaná doba dožití ve věku  $a$*  je dána výrazem

$$e_a = ET_a = \int_0^{\infty} \xi \mu(\xi) \frac{\ell(\xi)}{\ell(a)} da.$$

Medián náhodné veličiny  $T_a$  se nazývá *pravděpodobná délka života ve věku  $a$*  a značí se symbolem  $\epsilon_a$ . Je to hodnota, která splňuje rovnost

$$\ell(\epsilon_a) = 1 - \frac{1}{2}\ell(a).$$

Samozřejmě, že také platí  $a_H = \epsilon_0$ .

Stojí za povšimnutí, že obě veličiny  $e_a$  i  $\epsilon_a$  jsou kladné pro každé  $a \geq 0$ . To znamená, že o jedinci v libovolně vysokém věku lze racionálně očekávat, že se dožije věku ještě vyššího. Jinak řečeno, každá smrt je předčasná.

Jinou náhodnou veličinou charakterizující délku života může být věk při úmrtí (úhynu) jedince v jistém čase. Klasická pravděpodobnost  $P$ , že jedinec, který zemřel v časovém intervalu od  $t$  do  $t + \Delta t$ , mměl věk z intervalu od  $a$  do  $a + \Delta a$ , je dána podílem

$$P = \frac{\int_t^{t+\Delta t} \left( \int_a^{a+\Delta a} \mu(\xi)u(s, \xi)d\xi \right) ds}{\int_t^{t+\Delta t} \left( \int_0^{\infty} \mu(\xi)u(s, \xi)d\xi \right) ds};$$

to jednoduše plyne z definice specifické úmrtnosti  $\mu$  a hustoty populace  $u$ . S využitím první věty o střední hodnotě integrálního počtu tento výraz postupně upravíme,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_a^{a+\Delta a} \mu(\xi)u(s, \xi)d\xi \right) ds &= \int_t^{t+\Delta t} \Delta a (\mu(a + \vartheta_1 \Delta a)u(s, a + \vartheta_1 \Delta a)) ds = \\ &= \Delta t \mu(a + \vartheta_1 \Delta a)u(t + \vartheta_2 \Delta t, a + \vartheta_1 \Delta a) \Delta a, \\ \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_0^{\infty} \mu(\xi)u(s, \xi)d\xi \right) ds &= \Delta t \int_0^{\infty} \mu(\xi)u(t + \vartheta_3 \Delta t, \xi)d\xi, \\ P &= \frac{\mu(a + \vartheta_1 \Delta a)u(t + \vartheta_2 \Delta t, a + \vartheta_1 \Delta a)}{\int_0^{\infty} \mu(\xi)u(t + \vartheta_3 \Delta t, \xi)d\xi} \Delta a; \end{aligned}$$

přitom  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  jsou nějaká čísla z intervalu  $(0,1)$ . Pro  $\Delta t \rightarrow 0$  dostaneme

$$P = \frac{\mu(a + \vartheta_1 \Delta a)u(t, a + \vartheta_1 \Delta a)}{\int_0^{\infty} \mu(\xi)u(t, \xi)d\xi} \Delta a.$$

To znamená, že hustota  $f_M$  spojitě náhodné veličiny  $M$  „věk jedince při úmrtí v čase  $t$ “ je

$$f_M(a) = \frac{\mu(a)u(t, a)}{\int_0^{\infty} \mu(\xi)u(t, \xi)d\xi}.$$

Střední hodnota této veličiny, tedy *očekávaný věk při úmrtí v čase  $t$  (expected age of death)* je dán integrálem

$$EM = \int_0^{\infty} a \frac{\mu(a)u(t, a)}{\int_0^{\infty} \mu(\xi)u(t, \xi)d\xi} da = \frac{\int_0^{\infty} a \mu(a)u(t, a) da}{\int_0^{\infty} \mu(a)u(t, a) da}.$$

Pokud má populace stabilizovanou věkovou strukturu, je tato hodnota rovna

$$EM = \frac{\int_0^{\infty} a e^{\lambda t} w(a) da}{\int_0^{\infty} \mu(a) e^{\lambda t} w(a) da} = \frac{\int_0^{\infty} a \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da}{\int_0^{\infty} \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da}. \quad (4.22)$$



Vidíme, že očekávaný věk při úmrtí závisí na růstovém koeficientu  $\lambda$ . Porovnáním s rovností (4.21) dostáváme, že v případě, kdy  $\lambda = 0$ , tj. populace má stabilizovanou i velikost, je očekávaný věk při úmrtí shodný s očekávanou délkou života.

Podívejme se ještě na charakter závislosti očekávaného věku při úmrtí na růstovém koeficientu.

$$\frac{\partial EM}{\partial \lambda} = \frac{-\int_0^{\infty} a^2 \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da \int_0^{\infty} \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da + \left( \int_0^{\infty} a \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da \right)^2}{\left( \int_0^{\infty} \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da \right)^2}.$$

Jmenovatel tohoto zlomku je kladný, pro jeho čítecil platí

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^{\infty} a \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da \right)^2 - \int_0^{\infty} a^2 \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da \int_0^{\infty} \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da = \\ & = \left( \int_0^{\infty} a \sqrt{\mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a)} \sqrt{\mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a)} da \right)^2 - \int_0^{\infty} a^2 \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da \int_0^{\infty} \mu(a) e^{-\lambda a} \ell(a) da < 0 \end{aligned}$$

podle Cauchyho-Bunjakovského-Schwarzovy nerovnosti. To znamená, že očekávaný věk při úmrtí roste s klesajícím růstovým koeficientem; pro zvýšení průměrného věku stačí zmenšit porodnost.

### Omezená adekvátnost modelu

Žádný mnohobuněčný organismus nežije neomezeně dlouho. Existuje tedy nějaký (druhově specifický) maximální možný věk  $a_{\text{Max}}$ . Ten je charakterizován vlastností, že pro věk  $a > a_{\text{Max}}$  a libovolný čas  $t$  by mělo platit  $u(t, a) = 0$ . Ovšem v případě, že počáteční funkce  $\varphi$  je nenulová (což je jediný rozumný případ), existuje nějaký věk  $a_0$  takový, že  $\varphi(a_0) > 0$ . Pak také pro libovolné  $a > a_{\text{Max}}$  a pro  $t = a - a_0$  platí

$$u(t, a) = \varphi(a_0) \frac{\ell(a)}{\ell(a_0)} > 0.$$

Model tedy není plně realistický a jeho použitelnost je omezená. Tento nedostatek však není nikterak zásadní. Pro dostatečně velké  $a$  totiž platí

$$u(t, a) = \varphi(a_0) \frac{\ell(a)}{\ell(a_0)} = \frac{\varphi(a_0)}{\ell(a_0)} e^{-\int_0^a \mu(\xi) d\xi} \leq \frac{\varphi(a_0)}{\ell(a_0)} e^{-a \mu_{\min}},$$

kde

$$\mu_{\min} = \min \{ \mu(a) : a \geq 0 \}.$$

Funkce  $\mu$  je kladná a v okolí nekonečna neklesající. Proto  $\mu_{\min} > 0$  a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} u(t, a) = 0.$$

Pro dostatečně velký věk  $a$  je hodnota  $u(t, a)$  malá a pravděpodobnost, že nějaký jedinec bude mít tento veliký věk  $a > a_{\text{Max}}$ , je zanedbatelná.

Závažnějším problémem modelu (4.1), (4.2), (4.3) je použitý předpoklad, že jeho základní funkcionální parametry  $\mu$  a  $\beta$  závisí pouze na věku. Tento předpoklad může být splněn pouze v neomezeném prostředí s neomezenými zdroji. V reálných podmínkách dojde ke konkurenci o omezené, tj. vzácné, zdroje mezi jedinci populace. Porodnost a úmrtnost proto mohou záviset na složení populace nebo přinejmenším na její velikosti. Tedy

$$\mu = \mu((a, u(t, a))), \quad \beta = \beta(a, u(t, a)), \quad \text{nebo} \quad \mu = \mu((a, N(t))), \quad \beta = \beta(a, u(t)),$$

kde

$$N(t) = \int_0^{\infty} (u, t) da.$$

Modelům tohoto typu se budeme věnovat v části 4.2.

## 4.1 Dvojpolavní populace

Uvažujme populaci složenou ze samic a samců rozmanitého věku. Samice a samci mohou vytvořit páry, spárovaná dvojice může „vyprodukovat“ potomky. Jedinec může být součástí nejvýše jednoho páru.

Označme  $u_f = u_f(t, x)$  hustotu samic věku  $x$  v čase  $t$ ,  $s_f = s_f(t, x)$  hustotu nespárovaných (single) samic věku  $x$  v čase  $t$ ,  $u_m = u_m(t, y)$  hustotu samců věku  $y$  v čase  $t$ ,  $s_m = s_m(t, y)$  hustotu nespárovaných samců věku  $y$  v čase  $t$ ,  $c(t, x, y)$  hustotu párů tvořených samicí věku  $x$  a samcem věku  $y$  v čase  $t$ . Integrály

$$\int_0^{\infty} c(t, x, y) dy, \quad \text{resp.} \quad \int_0^{\infty} c(t, x, y) dx$$

vyjadřují hustotu párů, v nichž je samice věku  $x$ , resp. samec věku  $y$ . Stavové veličiny jsou tedy vázány vztahy

$$s_f(t, x) = u_f(t, x) - \int_0^{\infty} c(t, x, y) dy, \quad s_m(t, y) = u_m(t, y) - \int_0^{\infty} c(t, x, y) dx. \quad (4.23)$$

Zavedeme dále věkově specifickou úmrtnost samců  $\mu_m = \mu_m(y)$  a samic  $\mu_f = \mu_f(x)$ , specifickou plodnost  $\beta = \beta(x, y)$  páru tvořenou samicí věku  $x$  a samcem věku  $y$  a primární poměr pohlaví  $p$ . Funkce  $\mu_m$  a  $\mu_f$  jsou kladné, funkce  $\beta$  je nezáporná. Parametr  $p$  je z intervalu  $(0, 1)$  a interpretujeme ho tak, že podíl samiček mezi všemi novorozenci je roven  $p$ . Analogicky jako v případě jednopohlavní populace je vývoj hustoty samic popsán rovnicí

$$\frac{\partial u_f}{\partial t} + \frac{\partial u_f}{\partial a} = -\mu_f(x)u_f, \quad t > 0, \quad x > 0 \quad (4.24)$$

s počáteční podmínkou

$$u_f(0, x) = \varphi_f(x), \quad x > 0 \quad (4.25)$$

a okrajovou podmínkou

$$u_f(t, 0) = p \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \beta(x, z) c(t, x, z) dx dy, \quad t > 0; \quad (4.26)$$

funkce  $\varphi_f$  vyjadřuje počáteční hustotu samic. Podobně pro hustotu samců můžeme napsat rovnici s počáteční a okrajovou podmínkou:

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial u_m}{\partial a} = -\mu_m(y)u_m, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (4.27)$$

$$u_m(0, y) = \varphi_m(y), \quad y > 0, \quad (4.28)$$

$$u_f(t, 0) = (1 - p) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \beta(x, z) c(t, x, z) dx dy, \quad t > 0. \quad (4.29)$$

Ještě zbývá popsat vývoj hustoty párů  $c$ .

## Dynamika párů

Je zřejmé že pro krátký časový interval délky  $\Delta t$  platí

$$c(t + \Delta t, x + \Delta t, y + \Delta t) = c(t, x, y) - \text{zaniklé páry} + \text{vzniklé páry} = c(t, x, y) - \sigma c(t, x, y)\Delta t + M\Delta t,$$

kde  $\sigma$  je koeficient zániku párů a  $M$  je funkce manželství (*marriage function*) nebo funkce partnerství (*mating function*).

Koeficient zániku  $\sigma$  závisí na věku partnerů tvořících pár. K zániku páru dochází proto, že jeden z partnerů zemře nebo se partneri rozejdou. Tedy

$$\sigma = \sigma(x, y) = \mu_f(x) + \mu_m(y) + \delta(x, y). \quad (4.30)$$

funkce  $\delta = \delta(x, y)$  je *specifická míra rozchodu (divorce rate)*, vyjadřuje pravděpodobnost, že se pár tvořený samicí věku  $x$  a samcem věku  $y$  rozejde během časového intervalu jednotkové délky.

Funkce partnerství  $M$  vyjadřuje hustotu (a tím i množství) párů vzniklých za jednotku času. Závisí jednak na věku samců a samic, kteří pár vytvoří, a také na jejich „dostupnosti“, tj. na množství volných samic a samců příslušného věku.<sup>4</sup> Tedy

$$M = M(x, y, s_f, s_m) = M(x, y, s_f(t, x), s_m(t, y)).$$

Pro časovou změnu hustoty párů tak dostáváme rovnost

$$c(t + \Delta t, x + \Delta t, y + \Delta t) = c(t, x, y) - \sigma(x, y)c(t, x, y)\Delta t + M(x, y, s_f, s_m)\Delta t.$$

Současně podle Taylorovy věty platí (připomeňme si, že  $\Delta t = \Delta x = \Delta y$ )

$$c(t + \Delta t, x + \Delta t, y + \Delta t) = c(t, x, y) + \frac{\partial c}{\partial t}(t, x, y)\Delta t + \frac{\partial c}{\partial x}(t, x, y)\Delta t + \frac{\partial c}{\partial y}(t, x, y)\Delta t + O(\Delta t^2).$$

Odtud dostáváme, že hustota párů splňuje parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} = -\sigma(x, y)c + M(x, y, s_f, s_m), \quad t > 0, x > 0, y > 0. \quad (4.31)$$

Spolu s touto rovnicí uvažujeme počáteční podmínku

$$c(0, x, y) = \psi(x, y), \quad x > 0, y > 0, \quad (4.32)$$

kde funkce  $\psi$  vyjadřuje počáteční hustotu párů. Dále budeme předpokládat, že novorozenci páry netvoří. Tento předpoklad zapíšeme jako okrajovou podmínku

$$c(t, 0, y) = 0 = c(t, x, 0), \quad t > 0, x > 0, y > 0. \quad (4.33)$$

Model vývoje věkově strukturované dvoupohlavní populace je tedy tvořen systémem tří parciálních diferenciálních rovnic (4.24), (4.27), (4.31) s počátečními podmínkami (4.25), (4.28), (4.32) a s okrajovými podmínkami (4.26), (4.29), (4.33). Funkce  $s_f$  a  $s_m$  jsou dány rovnostmi (4.23), funkce  $\sigma$  je dána rovností (4.30). Funkce partnerství  $M$  je dosud neurčena.

## Funkce partnerství

Funkce  $M$  vystupující v rovnici (4.31) musí mít následující „přirozené“ vlastnosti.

- P1) Nemůže vznikat méně než žádný pár (rozpad párů je popsán lineárním členem na pravé straně rovnice (4.31)), hustoty samic i samců také nemohou být záporné:

$$M : [0, \infty)^4 \rightarrow [0, \infty).$$

<sup>4</sup>Funkce  $M$  je funkcí čtyř proměnných  $x, y, s_f, s_m$ . Ovšem hodnota  $s_f$  závisí na  $t$  a  $x$ , hodnota  $s_m$  závisí na  $t$  a  $y$ . Hodnota  $M$  tedy závisí na třech proměnných  $x, y, t$ .

- P2) Pokud v populaci nejsou žádné „volné“ samice nebo žádní „volní“ samci, pak nemůže žádný pár vzniknout:

$$M(x, y, 0, s_m) = 0 = M(x, y, s_f, 0)$$

- P3) Pokud se stejně změní počet „volných“ samic i samců, množství nově vzniklých párů se změní „nějak úměrně“ této změně. Jednoduše uvažováno, pokud se zdvojnásobí počet volných samic věku  $x$  a volných samců věku  $y$ , pak se také zdvojnásobí množství párů vyjádřených hustotou  $c(x, y)$ . Trochu obecněji zapsáno  $M(x, y, \alpha s_f, \alpha s_m) = \alpha M(x, y, s_f, s_m)$ .

U skutečných populací tento vztah nemusí být takto jednoduchý. Je-li populace velká, může být snazší setkání jedinců opačného pohlaví a nárůst počtu párů je větší než zvětšení  $\alpha$  množství „volných“ jedinců (projeví se Alleho efekt). Nebo naopak, ve velké populaci jsou již zdroje spotřebované natolik, že je málo energie na tvorbu párů a nárůst je menší než  $\alpha$  (projeví se vnitrodruhová konkurence).

Obecně postulujeme, že funkce  $M$  je homogenní řádu  $r > 0$  ve třetí a čtvrté proměnné:

$$M(x, y, \alpha s_f, \alpha s_m) = \alpha^r M(x, y, s_f, s_m).$$

- P4) Celkové množství nově vzniklých párů, v nichž je samice věku  $x$ , nemůže být větší, než bylo množství „volných“ samic tohoto věku. Analogické tvrzení platí pro samce, tj.

$$\int_0^{\infty} M(x, y, s_f(t, x), s_m(t, y)) dy \leq s_f(t, x), \quad \int_0^{\infty} M(x, y, s_f(t, x), s_m(t, y)) dx \leq s_m(t, y).$$

Těmto postulátům vyhovují (a v aplikacích byly používány) např. funkce

- *minimum*  $M(x, y, s_f, s_m) = \varrho(x, y) \min \{s_f, s_m\}$ ,
- *harmonický průměr*  $M(x, y, s_f, s_m) = 2\varrho(x, y) \frac{s_f s_m}{s_f + s_m}$ ,
- *vážený harmonický průměr*  $M(x, y, s_f, s_m) = \varrho(x, y) \frac{s_f s_m}{q s_f + (1 - q) s_m}$ ,  $0 < q < 1$ .

Přitom  $\varrho$  je nějaká funkce s hodnotami mezi nulou a jedničkou. Lze ji interpretovat jako pravděpodobnost, že potenciální pár skutečně vznikne. Všechny tyto funkce jsou homogenní řádu 1. Funkce *minimum* v případě  $\varrho \equiv 1$  vyjadřuje skutečnost, že žádný jedinec, pro něhož existuje partner/ka příslušného věku, nezůstane nespárován/a.

Pod pojmem „pár“ si nemusíme představovat páry trvalé. Může jít o krátkodobé spojení jen za účelem produkce potomků. V takovém případě lze v případě váženého harmonického průměru připustit i hodnoty  $q = 0$  (všechny samice jsou oplozeny) nebo  $q = 1$  (všichni samci realizují své geny).

Postuláty P1)–P4) ještě plně nevystihují „fungování manželského trhu“. „Volné“ samice a „volní“ samci představují nabídkovou stranu tohoto „trhu“, vzniklé páry poptávkovou. A na tomto „trhu“ existuje konkurence. Z těchto důvodů přidáme dva další požadavky:

- P5) Zvýšení nabídky vyvolá zvýšení poptávky. Podrobněji, pokud se zvětší množství „volných“ samic a samců jistých věkových kategorií, pak se zvětší (nebo aspoň nezmenší) množství vzniklých párů těchto věkových kategorií. Tj. pokud pro nějaké hodnoty  $x_1, x_2, y_1, y_2$  takové, že  $x_1 < x_2$  a  $y_1 < y_2$ , pro nějaké  $t$  a pro funkce  $s_f, s_m, \tilde{s}_f, \tilde{s}_m$  platí

$$s_f(t, x) \begin{cases} \leq \tilde{s}_f(t, x) & \text{pro } x \in [x_1, x_2], \\ = \tilde{s}_f(t, x) & \text{pro } x \notin [x_1, x_2] \end{cases} \quad \text{a} \quad s_m(t, y) \begin{cases} \leq \tilde{s}_m(t, y) & \text{pro } y \in [y_1, y_2], \\ = \tilde{s}_m(t, y) & \text{pro } y \notin [y_1, y_2] \end{cases}$$

pak pro tato  $x_1, x_2, y_1, y_2, t, s_f, s_m, \tilde{s}_f, \tilde{s}_m$  také platí

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} M(x, y, s_f(t, x), s_m(t, x)) dx dy \leq \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} M(x, y, \tilde{s}_f(t, x), \tilde{s}_m(t, x)) dx dy.$$

P6) „Volní“ jedinci jistého věku konkurují „volným“ jedincům věku jiného. Podrobněji, množství vzniklých párů nějaké věkové kategorie samic a samců se zmenší (nebo aspoň nezvětší), pokud se zvýší „nabídka“ „volných“ jedinců jiných věkových kategorií. Tj. pokud pro nějaká  $x_1, x_2, y_1, y_2$  taková, že  $x_1 < x_2$  a  $y_1 < y_2$ , pro nějaké  $t$  a pro funkce  $s_f, s_m, \tilde{s}_f, \tilde{s}_m$  platí

$$s_f(t, x) \begin{cases} = \tilde{s}_f(t, x) & \text{pro } x \in [x_1, x_2], \\ \leq \tilde{s}_f(t, x) & \text{pro } x \notin [x_1, x_2] \end{cases} \quad \text{a} \quad s_m(t, y) \begin{cases} = \tilde{s}_m(t, y) & \text{pro } y \in [y_1, y_2], \\ \leq \tilde{s}_m(t, y) & \text{pro } y \notin [y_1, y_2] \end{cases}$$

pak pro tato  $x_1, x_2, y_1, y_2, t, s_f, s_m, \tilde{s}_f, \tilde{s}_m$  také platí

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} M(x, y, s_f(t, x), s_m(t, x)) dx dy \geq \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} M(x, y, \tilde{s}_f(t, x), \tilde{s}_m(t, x)) dx dy.$$

Příkladem funkce, která splňuje všechny postuláty P1)–P6) je *Hadeleroва funkce*

$$M(x, y, s_f, s_m) = M(t, x, y) = 2\varrho(x, y) \frac{s_f(t, x)s_m(t, x)}{\int_0^\infty s_f(t, \xi)d\xi + \int_0^\infty s_m(t, \eta)d\eta}.$$

Jedná se o analogii harmonického průměru; k označení nezávisle proměnných sr. poznámku <sup>4</sup> pod čarou na str. 152.

## 4.2 Populace s porodností nebo úmrtností závislou na její velikosti

Celková velikost populace  $N = N(t)$  v čase  $t$  je dána integrálem hustoty

$$N(t) = \int_0^\infty u(t, a) da. \quad (4.34)$$

V populaci se mohou projevat nějaké vnitrodruhové vztahy, konkurence nebo mutualismus. Tuto skutečnost lze vyjádřit tak, že základní charakteristiky populace – specifická plodnost a specifická úmrtnost – závisí kromě věku na celkové velikosti populace. Místo rovnice (4.1) s podmínkami (4.2), (4.3) pak modelujeme vývoj populace rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(a, N)u, \quad t > 0, \quad a > 0, \quad (4.35)$$

s počáteční podmínkou

$$u(0, a) = \varphi(a), \quad a > 0, \quad (4.36)$$

a okrajovými podmínkami

$$u(t, 0) = \int_0^\infty \beta(s, N)u(t, s)ds, \quad N(t) = \int_0^\infty u(t, a)da, \quad t > 0.$$

Podíváme se podrobněji na tři speciální případy této úlohy pro nelineární parciální diferenciální rovnici prvního řádu.

### 4.2.1 Porodnost i úmrtnost závislé pouze na velikosti populace, nikoliv na věku

Uvažujme porodnost  $\beta = \beta(N)$  a úmrtnost  $\mu = \mu(N)$  nezávislé na věku (nejsou věkově specifické), ale závislé na celkové velikosti populace. V tomto případě se rovnice (4.35) zjednoduší na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(N)u, \quad t > 0, \quad a > 0. \quad (4.37)$$

Počáteční podmínkou je rovnost (4.36), jedna okrajová podmínka je

$$u(t, 0) = \int_0^{\infty} \beta(N)u(t, s)ds, \quad t > 0 \quad (4.38)$$

a jako druhá zůstává (4.34).

Je přirozené předpokládat, že  $\lim_{a \rightarrow \infty} u(t, a) = 0$  pro každé  $t$ , tj. že v populaci neexistují nesmrtelní jedinci. Za tohoto předpokladu integrujme levou strany rovnice podle věku a s využitím okrajových podmínek dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial u(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, a)}{\partial a} \right) da &= \int_0^{\infty} \frac{\partial u(t, a)}{\partial t} da + [u(t, a)]_{a=0}^{\infty} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} u(t, a) da - u(t, 0) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} N(t) - \int_0^{\infty} \beta(N(t))u(t, a) da = N'(t) - \beta(N(t))N(t). \end{aligned}$$

Integrace pravé strany rovnice (4.37) dává

$$- \int_0^{\infty} \mu(N(t))u(t, a) da = -\mu(N(t))N(t).$$

Celkem dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci  $N$

$$N' = (\beta(N) - \mu(N))N. \quad (4.39)$$

Tato rovnice má evidentně stacionární řešení  $N(t) = 0$ , tzv. extinkční rovnováhu, kdy žádný jedinec neexistuje a tedy se populace nijak nevyvíjí.

Konkrétní modely dostaneme specifikací funkcí  $\beta$  a  $\mu$ .

#### Porodnost větší než úmrtnost a vnitrodruhová konkurence

Porodnost převyšující úmrtnost při malých populačních hustotách zajistí růst populace. Naproti tomu vnitrodruhová konkurence zmenšuje porodnost nebo zvětšuje úmrtnost při zvětšující se populaci („nebo“ je samozřejmě klasická logická spojka, není vylučovací). Tyto předpoklady zapíšeme formálně jako relace

$$\mu(0) < \beta(0), \quad \frac{d\beta}{dN} \leq 0, \quad \frac{d\mu}{dN} \geq 0. \quad (4.40)$$

Z monotonnosti funkcí  $\beta$  a  $\mu$  nyní plyne existence jejich limit v nevlastním bodě  $\infty$ ; limita funkce  $\mu$  může být nevlastní.

Pokud

$$\beta_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta(N) > \mu_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(N),$$

pak  $\delta = \beta_{\infty} - \mu_{\infty} > 0$  a  $N' > \delta N$  a tedy  $N(t) \geq N_0 e^{\delta t}$ , což znamená, že řešení rovnice (4.39) neomezeně roste,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty.$$

Pokud naopak

$$\beta_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta(N) < \mu_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(N), \quad (4.41)$$

pak existuje hodnota  $N^* > 0$  taková, že

$$\beta(N^*) = \mu(N^*) \quad (4.42)$$

(nakreslete si obrázek). Pokud je navíc tato hodnota určena jednoznačně (a k tomu stačí, aby všechny nerovnosti v podmínce (4.40) byly ostré), pak platí

$$(\beta(N) - \mu(N))(N - N^*) < 0 \quad \text{pro každé } N > 0.$$

V takovém případě má rovnice (4.39) asymptoticky stabilní stacionární řešení  $N(t) = N^*$ , oblast přitažení tohoto řešení je celý interval  $(0, \infty)$ . Extinkční rovnováha  $N \equiv 0$  je v tomto případě nestabilní. Tento výsledek můžeme interpretovat tak, že hodnota  $N^*$  představuje kapacitu prostředí (úživnost) pro modelovanou populaci. Pro jakoukoliv počáteční hodnotu  $N(0) > 0$  má řešení rovnice (4.39) vlastnost  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N^*$ .

Počáteční velikost populace je dána integrálem z počáteční funkce  $\varphi$  vystupující v počáteční podmínce (4.36) k původní rovnici (4.34), tj.

$$N(0) = N_0 = \int_0^\infty \varphi(s) ds. \quad (4.43)$$

Vidíme, že populace modelovaná okrajovou úlohou (4.37), (4.34), (4.38) může mít řešení se stabilizovanou velikostí  $N^*$ . Nyní budeme hledat takové řešení, které má navíc stabilizovanou věkovou strukturu  $w^* = w^*(a)$ . Toto řešení musí splňovat rovnici (4.35), v tomto případě tedy

$$\frac{\partial}{\partial a} w^* = -\mu(N^*) w^*,$$

což je obyčejná lineární homogenní rovnice pro neznámou funkci  $w^*$ . Její řešení je dáno formulí

$$w^*(a) = C e^{-\mu(N^*)a},$$

kde  $C$  je integrační konstanta. Funkce  $w^*$  musí dále splňovat okrajovou podmínku (4.34), v tomto případě

$$N^* = \int_0^\infty C e^{-\mu(N^*)a} da = -\frac{C}{\mu(N^*)} \left[ e^{-\mu(N^*)a} \right]_{a=0}^\infty = \frac{C}{\mu(N^*)},$$

neboť  $\mu(N^*) > 0$ . Odtud dostaneme  $C = N^* \mu(N^*)$ , tedy

$$w^*(a) = N^* \mu(N^*) e^{-\mu(N^*)a}. \quad (4.44)$$

Ještě ověříme, že takto definovaná funkce splňuje okrajovou podmínku (4.38). Platí

$$w^*(0) = N^* \mu(N^*), \quad \text{a} \quad \int_0^\infty \beta(N^*) w^*(a) da = N^* \beta(N^*) \mu(N^*) \int_0^\infty e^{-\mu(N^*)a} da = N^* \beta(N^*),$$

což vzhledem k první rovnosti (4.42) znamená, že  $w^*(0) = \int_0^\infty \beta(N^*) w^*(a) da$ .

Dosažené výsledky můžeme shrnout: *Jsou-li splněny podmínky (4.40) a (4.41), pak má okrajová úloha (4.37), (4.34), (4.38) stacionární řešení  $w^*$  definované rovností (4.44), kde  $N^*$  je definováno rovností (4.42). Pokud je navíc hodnota  $N^*$  určena jednoznačně a číslo  $N_0$  definované rovností (4.43) je kladné, pak pro řešení  $u = u(t, a)$  této okrajové úlohy s počáteční podmínkou (4.36) platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, a) = w^*(a)$ .*

## Vnitrodruhová konkurence a Alleho efekt

Předpokládejme, že vnitrodruhová konkurence se stejně jako v předchozím případě projevuje zvětšováním úmrtnosti při zvětšování populace. Plodnost ale ovlivňuje vnitrodruhová konkurence až od jisté velikosti populace. Při malé populaci je plodnost nízká, neboť je malá pravděpodobnost, že se potkají partneři pro rozmnožování, s rostoucí velikostí populace tato pravděpodobnost a tedy i plodnost roste, při velké populaci u plodnosti převáží vliv vnitrodruhové konkurence. Předpokládáme tedy, že existuje jistá velikost populace  $\tilde{N}$ , že

$$\beta(0) < \mu(0), \quad \frac{d\mu}{dN} \geq 0, \quad \frac{d\beta}{dN}(N) \begin{cases} \geq 0, & N < \tilde{N}, \\ \leq 0, & N \geq \tilde{N}, \end{cases}$$

Za těchto předpokladů je extinkční rovnováha  $N(t) = 0$  rovnice (4.39) asymptoticky stabilní (promyslete si, proč). Pokud navíc

$$\beta(\tilde{N}) > \mu(\tilde{N}) \quad \text{a} \quad \beta_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta(N) > \mu_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(N),$$

pak existují hodnoty  $\Theta$  a  $N^*$  splňující rovnosti

$$\beta(\Theta) = \mu(\Theta), \quad \beta(N^*) = \mu(N^*)$$

takové, že  $0 < \Theta < \tilde{N} < N^*$ . V tomto případě jsou funkce  $N(t) = \Theta$  a  $N(t) = N^*$  stacionárními řešeními rovnice (4.39). Pokud jsou navíc hodnoty  $\Theta$  a  $N^*$  určeny jednoznačně, pak

$$\beta(N) - \mu(N) \begin{cases} > 0, & \Theta < N < N^*, \\ < 0, & N < \Theta \text{ nebo } N > N^*. \end{cases}$$

To znamená, že rovnováha  $\Theta$  je nestabilní a rovnováha  $N^*$  je asymptoticky stabilní.

Hodnota  $\Theta$  představuje jakousi prahovou hodnotu velikosti populace nutnou pro její přežití. Je-li  $N(0) < \Theta$ , populace vymře, je-li  $N(0) > \Theta$ , populace přežívá a její velikost se ustálí na hodnotě  $N^*$ . Stabilizovaná věková struktura populace při stabilizované velikosti  $N^*$  je opět dána formulí (4.44).

### 4.2.2 Úmrtnost závislá pouze na věku, plodnost klesající s věkem

Budeme uvažovat populaci organismů s potenciálně neomezenou dobou života, které se rodí březí a jejich věkově specifická plodnost klesá s věkem<sup>5</sup>. Přesněji, jejich kladná úmrtnost  $\mu$  závisí pouze na velikosti populace, plodnost  $\beta$  exponenciálně klesá s věkem, tedy

$$\mu = \mu(N), \quad \beta = \beta(a) = \beta_0 e^{-\gamma a},$$

kde  $\beta_0, \gamma$  jsou kladné konstanty. Rovnice (4.35) nabývá tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(N)u, \quad t > 0, \quad a > 0. \quad (4.45)$$

Okrajovou podmínku zapíšeme ve tvaru

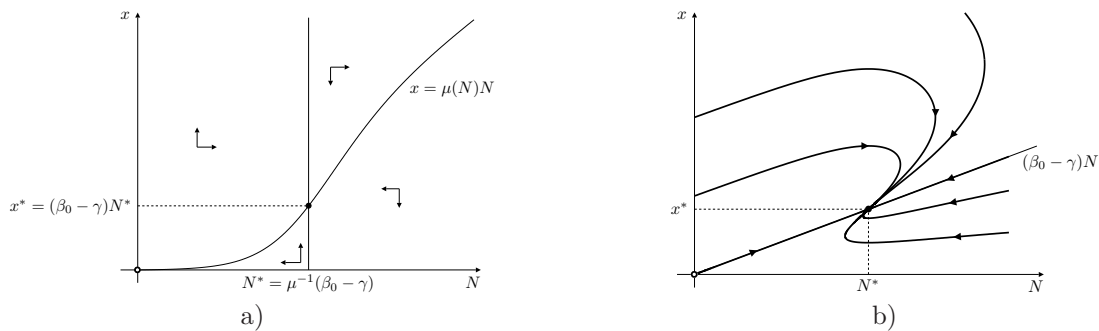
$$u(t, 0) = \beta_0 \int_0^\infty e^{-\gamma a} u(t, a) da, \quad t > 0. \quad (4.46)$$

Hustotu novorozenců  $u(t, 0)$  v čase  $t$  označíme jako  $x(t)$ . Pak integrací rovnice (4.45) podle věku dostaneme podobně jako v 4.2.1 obyčejnou diferenciální rovnici

$$N' = -\mu(N)N + x. \quad (4.47)$$

<sup>5</sup>Populace s těmito vlastnostmi se objevuje v epizodě „The Trouble with Tribbles“ ságy *Star Trek*.





Obrázek 4.3: Kvalitativní analýza systému obyčejných diferenciálních rovnic (4.47), (4.48), který popisuje dynamiku velikosti populace  $N$  a množství novorozenců  $x$ : a) „fázový portrét“ systému, b) trajektorie a invariantní množina systému. Pro konstrukci obrázku byla použita úmrtnost tvaru  $\mu(N) = \mu_0 + \frac{\nu}{1 + e^{K-N}}$ .

V této rovnici jsou dvě neznámé funkce,  $N$  a  $x$ . Potřebujeme tedy ještě jednu rovnici. Tu získáme tak, že rovnici (4.45) vynásobíme výrazem  $\beta_0 e^{-\gamma a}$  a poté ji zintegrujeme podle věku.

Počítejme postupně:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta_0 e^{-\gamma a} \frac{\partial u(t, a)}{\partial t} da &= \frac{\partial}{\partial t} \beta_0 \int_0^{\infty} e^{-\gamma a} u(t, a) da = \frac{\partial}{\partial t} x(t), \\ \int_0^{\infty} \beta_0 e^{-\gamma a} \frac{\partial u(t, a)}{\partial a} da &= \beta_0 \left( [e^{-\gamma a} u(t, a)]_{a=0}^{\infty} + \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma a} u(t, a) da \right) = \\ &= -\beta_0 u(t, 0) + \gamma \beta_0 \int_0^{\infty} e^{-\gamma a} u(t, a) da = -\beta_0 x(t) + \gamma x(t) = (\gamma - \beta_0) x(t), \\ &- \int_0^{\infty} \beta_0 e^{-\gamma a} \mu(N) u(t, a) da = -\mu(N) x(t). \end{aligned}$$

Celkem tak dostáváme  $x'(t) + (\gamma - \beta_0)x(t) = -\mu(N)x$ . Druhá obyčejná diferenciální rovnice tedy je

$$x' = (\beta_0 - \gamma - \mu(N))x \quad (4.48)$$

Celková velikost populace  $N$  a hustota novorozenců  $x$  jsou řešením dvojrozměrného nelineárního systému obyčejných diferenciálních rovnic (4.47) a (4.48). Vyšetříme jeho kvalitativní vlastnosti za předpokladu, že v populaci se projevuje vnitrodruhová konkurence, tj.

$$\frac{d\mu}{dN} \geq 0. \quad (4.49)$$

Pravá strana rovnice (4.47) je nulová právě tehdy, když  $x = \mu(N)N$ . Křivka o této rovnici je tedy jedinou  $N$ -nulklinou systému. Z předpokladu (4.49) plyne, že

$$\frac{dx}{dN} = \frac{d}{dN} \mu(N)N = N \frac{d\mu}{dN} + \mu(N) > 0,$$

takže  $N$ -nulklina je grafem rostoucí funkce vycházejícím z počátku souřadnic, viz Obrázek 4.3 a).

Systém má vždy jednu  $x$ -nulklina danou rovností  $x = 0$ . Pokud platí nerovnosti

$$0 < \mu(0) \leq \beta_0 - \gamma < \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(N), \quad (4.50)$$

pak existuje  $N^* > 0$  takové, že  $\mu(N^*) = \beta_0 - \gamma$ . Má-li navíc funkce  $\mu$  v libovolném takovém bodě  $N^*$  kladnou derivaci,

$$\mu'(N^*) > 0, \quad \text{kde } \mu(N^*) = \beta_0 - \gamma, \quad (4.51)$$

pak je toto  $N^*$  určeno jednoznačně a přímka  $N = N^*$  je druhou  $x$ -nulklinou systému, viz Obrázek 4.3 a). V takovém případě má systém (4.47), (4.48) dvě stacionární řešení –  $(0, 0)$ , které odpovídá extinkční rovnováze, a  $(N^*, x^*)$ .

Variační matice systému je

$$J(N, x) = \begin{pmatrix} -\mu'(N)N - \mu(N) & 1 \\ -\mu'(N)x & \beta_0 - \gamma - \mu(N) \end{pmatrix}.$$

Konkrétně, pro extinkční rovnováhu platí

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu(0) & 1 \\ 0 & \beta_0 - \gamma - \mu(0) \end{pmatrix}, \quad \det J(0, 0) = -\mu(0)(\beta_0 - \gamma - \mu(0)) < 0,$$

což znamená, že stacionární bod  $(0, 0)$  je sedlo. Pro stacionární bod  $(N^*, x^*) = (N^*, (\beta_0 - \gamma)N^*)$  platí

$$J(N^*, x^*) = \begin{pmatrix} -\mu'(N^*)N^* - \beta_0 + \gamma & 1 \\ -\mu'(N^*)N^*(\beta_0 - \gamma) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det J(N^*, x^*) = \mu'(N^*)N^*(\beta_0 - \gamma) > 0, \quad \text{tr } J(N^*, x^*) = -\mu'(N^*)N^* - (\beta_0 - \gamma) < 0,$$

$$\begin{aligned} (\text{tr } J(N^*, x^*))^2 - 4 \det J(N^*, x^*) &= (\mu'(N^*)N^* + (\beta_0 - \gamma))^2 - 4\mu'(N^*)N^*(\beta_0 - \gamma) = \\ &= (\mu'(N^*)N^* - (\beta_0 - \gamma))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

To znamená, že stacionární bod  $(N^*, x^*)$  je stabilní uzel.

Ještě ukážeme, že přímka  $p$  o rovnici  $x = (\beta_0 - \gamma)N$  je invariantní množinou systému (4.47), (4.48). Za  $x$  v rovnici (4.47) dosadíme  $(\beta_0 - \gamma)N$  a rovnici (4.48) vydělíme rovnicí (4.47). Dostaneme

$$\frac{dx}{dN} = \frac{x}{N}, \quad \text{a tedy } \frac{x}{N} = \text{const.}$$

Směr trajektorie začínající na přímce  $p$  je incidentní se směrovým vektorem této přímky, tj.  $p$  je invariantní množinou.

Stacionární bod  $(N^*, (\beta_0 - \gamma)N^*)$  leží na invariantní přímce. Z toho usuzujeme, že uvnitř prvního kvadrantu neexistuje cyklus systému (4.47), (4.48), který by měl tento bod ve svém vnitřku. Odtud dále plyne, že oblast přitažení vnitřního stacionárního bodu  $(N^*, x^*)$  je celý vnitřek prvního kvadrantu. Trajektorie systému jsou zobrazeny na Obrázku 4.3 b).

Vývoj populace modelované parciální diferenciální rovnicí (4.45) s okrajovou podmínkou (4.46) směřuje ke konstantní velikosti  $N^*$ , která závisí na tvaru úmrtnosti  $\mu$  a parametrech porodnosti  $\beta_0, \gamma$ . Poměr množství novorozenců a celkové velikost populace směřuje k číslu

$$\frac{x^*}{N^*} = \beta_0 - \gamma.$$

Stacionární řešení  $u(t, a) = w^*(a)$  rovnice (4.45) s podmínkou (4.46), tj. hustotu modelované populace se stabilizovanou věkovou strukturou a konstantní velikostí, dostaneme jako řešení obyčejné rovnice

$$\frac{dw^*}{da} = -\mu(N^*)w^* = -(\beta_0 - \gamma)w^*$$

s podmínkou

$$x^* = \beta_0 \int_0^\infty e^{-\gamma a} w^*(a) da,$$

tedy

$$w^*(a) = x^* e^{-(\beta_0 - \gamma)a} = (\beta_0 - \gamma) N^* e^{-(\beta_0 - \gamma)a} = (\beta_0 - \gamma) \mu^{-1} (\beta_0 - \gamma) e^{-(\beta_0 - \gamma)a}. \quad (4.52)$$

Dosažené výsledky můžeme shrnout: *Jsou-li splněny podmínky (4.49), (4.50) a (4.51), pak má okrajová úloha (4.45), (4.34), (4.46) stacionární řešení  $w^*$  definované rovnostmi (4.52). Pokud je navíc číslo  $N_0$  definované rovností (4.41) kladné, pak pro řešení  $u = u(t, a)$  této okrajové úlohy s počáteční podmínkou (4.36) platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, a) = w^*(a)$ .*

### 4.2.3 Populace složená z jedinců juvenilních a plodných

Nyní budeme předpokládat, že jedinci jsou plodní až od určitého věku  $\tau$ . Můžeme si to také představovat tak, že v populaci jsou jedinci dvou stádií – larvy a dospělci. Dospělí (plodní) jedinci si konkurují a tato konkurence se projevuje zmenšením plodnosti s rostoucím množstvím dospělých jedinců. O úmrtnosti budeme předpokládat, že je stejná pro obě stadia a je konstantní.

Celková velikost dospělé populace je dána integrálem

$$N_A = N_A(t) = \int_{\tau}^{\infty} u(t, a) da. \quad (4.53)$$

Úmrtnost  $\mu$  je konstantní, porodnost je dána rovností

$$\beta = \beta(a, N_A) = \begin{cases} 0, & a \leq \tau, \\ \beta_0 e^{-\gamma N_A}, & a > \tau, \end{cases}$$

kde  $\beta_0$  a  $\gamma$  jsou kladné konstanty. Rovnice (4.35) je nyní tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu u, \quad t > 0, \quad a > 0 \quad (4.54)$$

a okrajová podmínka

$$u(t, 0) = \int_{\tau}^{\infty} \beta_0 e^{-\gamma N_A(t)} u(t, a) da$$

vzhledem k (4.53) je

$$u(t, 0) = \beta_0 e^{-\gamma N_A(t)} N_A(t), \quad t > 0. \quad (4.55)$$

Opět označíme  $x(t) = u(t, a)$ , podrobněji

$$x(t) = \beta_0 e^{-\gamma N_A(t)} N_A(t).$$

Poněvadž je úmrtnost konstantní, věkově specifická míra přežití je dána rovností  $\ell(a) = e^{-\mu a}$ . Podle výsledku (4.8) je pro  $t > \tau$  řešení rovnice (4.54) dáno formulí

$$u(t, \tau) = x(t - \tau) \ell(\tau) = \beta_0 e^{-\gamma N_A(t - \tau) - \mu \tau} N_A(t - \tau). \quad (4.56)$$

Rovnici (4.54) nyní zintegrujeme podle věku  $a$  v mezích od  $\tau$  do  $\infty$ . Při výpočtu využijeme rovnosti (4.53), (4.56) a postulovanou vlastnost hustoty  $\lim_{a \rightarrow \infty} u(t, a) = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} \left( \frac{\partial u(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, a)}{\partial a} \right) da &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau}^{\infty} u(t, a) da + [u(t, a)]_{a=\tau}^{\infty} = \\ &= N_A'(t) - u(t, \tau) = N_A'(t) - \beta_0 e^{-\gamma N_A(t - \tau) - \mu \tau} N_A(t - \tau), \end{aligned}$$

$$\int_{\tau}^{\infty} (-\mu u(t, a)) da = -\mu N_A(t).$$

Celkem tak dostáváme, že velikost plodné části populace  $N_A(t)$  v čase  $t$  je řešením nelineární obyčejné diferenciální rovnice s jedním konstantním zpožděním

$$N_A'(t) = -\mu N_A(t) + \beta_0 e^{-\gamma N_A(t-\tau) - \mu\tau} N_A(t-\tau). \quad (4.57)$$

Najdeme nenulové stacionární řešení  $N(t) = N_A^*$ . Hodnota  $N_A^*$  musí splňovat rovnici

$$\mu = \beta_0 e^{-\mu\tau - \gamma N_A^*},$$

tedy

$$N_A^* = \frac{1}{\gamma} \left( \ln \frac{\beta_0}{\mu} - \mu\tau \right). \quad (4.58)$$

Tedy, pokud  $\beta_0 > \mu e^{\mu\tau}$ , pak existuje kladné stacionární řešení rovnice (4.57), které je dáno rovností (4.58). Příslušná stabilizovaná věková struktura  $w^*$  je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{d}{da} w^* = -\mu w^*$$

s počáteční podmínkou

$$w^*(0) = \beta_0 N_A^* e^{-\gamma N_A^*} = \frac{\beta_0}{\gamma} \left( \ln \frac{\beta_0}{\mu} - \mu\tau \right) e^{-\ln(\beta_0/\mu) + \mu\tau} = \frac{\mu}{\gamma} \left( \ln \frac{\beta_0}{\mu} - \mu\tau \right) e^{\mu\tau},$$

tedy

$$w^*(a) = \frac{\mu}{\gamma} \left( \ln \frac{\beta_0}{\mu} - \mu\tau \right) e^{-\mu(a-\tau)}.$$



## Kapitola 5

# Modely prostorově strukturované populace

Představme si nějakou populaci tvořenou jedinci, kteří se nějak pohybují v prostoru. Těmi jedinci mohou být nějaké organismy, prostor si můžeme představovat jako jednorozměrný (např. členovci v potoce), dvourozměrný (např. kopytníci v savaně), nebo trojrozměrný (např. ryby ve vodě). Takovou populaci můžeme charakterizovat její hustotou  $u$ , která může být jiná v každém časovém okamžiku  $t$  a v každém bodě prostoru  $\mathbf{x}$ , tedy  $u = u(t, \mathbf{x})$ .

Vyberme nějakou oblast  $\Omega$  v uvažovaném prostoru. Na této oblasti se v časovém okamžiku  $t$  nachází populace o velikosti  $N(t, \Omega)$ ; velikostí populace může být počet jedinců, jejich celková biomasa a podobně. Hustota a velikost populace jsou vázány vztahem<sup>1</sup>

$$N(t, \Omega) = \int_{\Omega} u(t, \mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} u(t, \cdot) dV.$$

Zvolme nyní libovolně délku časového intervalu  $\Delta t$ . Označme na chvíli  $T(t, \Omega, \Delta t)$  čistou velikost části populace, která v čase od  $t$  do  $t + \Delta t$  přešla z oblasti  $\Omega$  přes její hranici, a  $R(t, \Omega, \Delta t)$  velikost populace, která v tomto časovém intervalu v oblasti  $\Omega$  vznikla nebo zanikla. Pokud přes hranici prošlo více jedinců dovnitř oblasti  $\Omega$ , bude mít veličina  $T$  záporné znaménko, v opačném kladné. Podobně, pokud více jedinců v oblasti vzniklo než zaniklo, bude mít veličina  $R$  kladné znaménko, v opačném případě záporné. Při tomto označení je

$$N(t + \Delta t, \Omega) = N(t, \Omega) - T(t, \Omega, \Delta t) + R(t, \Omega, \Delta t). \quad (5.1)$$

---

<sup>1</sup>Abychom zachovali obecnost, tj. aby formule nezávisely na dimenzi uvažovaného prostoru, budeme integrály zapisovat pomocí symboliky, obvyklé ve fyzice. Objemový integrál

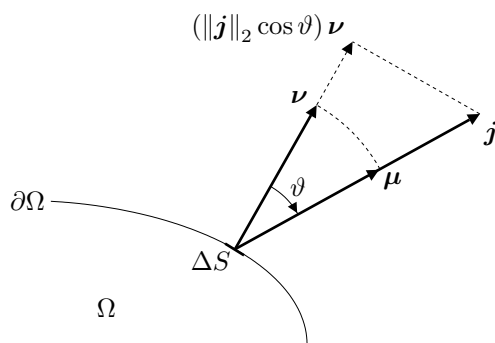
$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}, \quad \text{stručněji} \quad \int_{\Omega} f dV$$

zastupuje integrál z funkce  $f$  přes oblast  $\Omega$ , tj.

$$\int_{\Omega} f dV = \begin{cases} \int_a^b f(x) dx, & \Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \\ \iint_{\Omega} f(x, y) = dx dy, & \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \\ \iiint_{\Omega} f(x, y, z) = dx dy dz, & \Omega \subseteq \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Podobně pro povrchový integrál přes hranici oblasti  $\Omega$  (krivkový integrál v  $\mathbb{R}^2$ , plošný integrál v  $\mathbb{R}^3$ ) budeme používat symbol

$$\int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} = \int_{\partial\Omega} f dS.$$



Obrázek 5.1: K procesu přechodu jedinců přes hranici oblasti  $\Omega$ . Symbol  $\|\cdot\|_2$  označuje eukleidovskou normu vektoru,  $\nu$  je jednotkový vektor vnější normály k hranici oblasti.

Proces vzniku nebo zániku jedinců bývá obvykle nazýván „reakce“. (Tato terminologie pochází z chemické kinetiky – za jedince populace jsou považovány molekuly, které vznikají nebo zanikají nějakou reakcí.) Vyjadřujeme ho pomocí funkce  $f$ , zvané *intenzita reakce*. Ta se může měnit s časem, může být v každém bodě jiná, může také záviset na hustotě v daném čase a v daném bodě, tedy  $f = f(t, \mathbf{x}, u) = f(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x}))$ . Pro krátký časový interval  $\Delta t$  vyjádříme

$$R(t, \Omega, \Delta t) = \left( \int_{\Omega} f(t, \cdot, u(t, \cdot)) dV \right) \Delta t. \quad (5.2)$$

Proces přechodu jedinců přes hranici oblasti  $\Omega$  charakterizuje *vektor toku*  $\mathbf{j}$ , o kterém budeme předpokládat, že závisí na čase i na bodu hranice, v němž k přechodu dochází, tj.  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ . Zavedeme jednotkový vektor  $\mu$  stejného směru, jako je vektor toku  $\mathbf{j}$ , tj.

$$\mu = \frac{\mathbf{j}}{\|\mathbf{j}\|_2},$$

kde  $\|\cdot\|_2$  označuje eukleidovskou normu vektoru. Jednotkový vektor vnější normály v bodě  $\mathbf{x}$  označíme  $\nu(\mathbf{x})$ . Předpokládejme, že přes vybraný malý úsek hranice o míře (délce, obsahu)  $\Delta S$  přechází více jedinců z oblasti  $\Omega$ , než do ní (při opačné orientaci by úvaha byla analogická). Dále označme  $\vartheta$  orientovaný úhel od vektoru  $\nu$  k vektoru  $\mathbf{j}$ . Pro celkové množství jedinců  $\Delta T$  přecházejících přes tento úsek hranice za jednotkový čas platí (viz Obrázek 5.1)

$$\Delta T = \|\mathbf{j}\|_2 \cos \vartheta \Delta S = \|\mathbf{j}\|_2 \mu \cdot \nu \Delta S = \mathbf{j} \cdot \nu \Delta S,$$

kde  $\cdot$  označuje skalární součin. Celkové množství jedinců přecházejících přes hranici oblasti  $\Omega$  za jednotku času je tedy dáno povrchoým integrálem

$$T(t, \Omega, 1) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{j}(t, \cdot) \cdot \nu dS.$$

Ten můžeme přepsat pomocí Gaussovy věty jako integrál objemový,

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{j}(t, \cdot) \cdot \nu dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \cdot) dV,$$

kde  $\nabla$  označuje vektor parciálních derivací. Pro množství jedinců přecházejících přes hranici oblasti  $\Omega$  tak dostáváme

$$T(t, \Omega, \Delta t) = \left( \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \cdot) dV \right) \Delta t. \quad (5.3)$$

Výrazy (5.3) a (5.2) dosadíme do rovnosti (5.1). Dostaneme

$$\int_{\Omega} u(t + \Delta t, \cdot) dV = \int_{\Omega} u(t, \cdot) dV + \left( - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \cdot) dV + \int_{\Omega} f(t, \cdot, u(t, \cdot)) dV \right) \Delta t$$

a po úpravě

$$\int_{\Omega} \left( \frac{u(t + \Delta t, \cdot) - u(t, \cdot)}{\Delta t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \cdot) - f(t, \cdot, u(t, \cdot)) \right) dV = 0.$$

Oblast  $\Omega$  byla zvolena libovolně. Proto za předpokladu, že integrovaná funkce je spojitá, může být poslední rovnost splněna jen tehdy, když

$$\frac{u(t + \Delta t, \mathbf{x}) - u(t, \mathbf{x})}{\Delta t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}, u(t, \mathbf{x})) = 0$$

pro všechna  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Limitním přechodem  $\Delta t \rightarrow 0$  odtud dostaneme parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + f(t, \mathbf{x}, u). \quad (5.4)$$

V této rovnici zůstává neurčený vektor toku  $\mathbf{j}$ .

Jedinci mohou přecházet přes hranici oblasti buď proto, že jsou unášeni médiem, v němž žijí (proudění vzduchu nebo vody), nebo proto, že se sami přemísťují. První proces se nazývá *advekce*, druhý *disperse*. Předpokládejme, že tyto procesy jsou aditivní, tj. že pro vektor toku platí

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_a + \mathbf{j}_d,$$

kde vektor  $\mathbf{j}_a$  vyjadřuje advekci a vektor  $\mathbf{j}_d$  dispersi. Předpokládejme dále, že jedinci jsou unášeni rychlostí  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ , tedy že  $\mathbf{j}_a(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ .

Budeme uvažovat pouze nejjednodušší dispersi, konkrétně takovou, že jedinci vyhledávají volný prostor, tj. přechází z místa s větší hustotou do místa s hustotou menší. Jednoduše budeme předpokládat, že čisté množství jedinců, přecházejících z jednoho místa do jiného je úměrné gradientu hustoty. Tedy

$$\mathbf{j}_d = -D\nabla u.$$

Předchozí rovnost se nazývá *Fickův zákon*, disperse, která se jím řídí se nazývá *difúze*. Koeficient úměrnosti  $D$  se nazývá *difuzivita*. Může být v každém bodě jiná a také se může měnit s časem,  $D = D(t, \mathbf{x})$ .

Dosazením do (5.4) s využitím aditivity skalárního součinu dostaneme *rovnici reakce-advekce-difúze*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot D(t, \mathbf{x})\nabla u - \nabla \cdot u\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + f(t, \mathbf{x}, u). \quad (5.5)$$

Povšimněme si, že v případě jednorozměrného prostoru tato rovnice splývá s rovnicí (2.8). Reakční i advekční člen mohou být nulové,  $f \equiv 0$  nebo  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{o}$ . V případě, že difuzivita  $D$  je konstantní, je rovnice tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - \nabla \cdot u\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + f(t, \mathbf{x}, u); \quad (5.6)$$

přítom  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  je Laplaceův operátor – součet druhých parciálních derivací.

V populační dynamice se nejčastěji používají reakční členy nezávislé na čase a často i nezávislé na prostorové proměnné. Konkrétně

$$f = f(u) = ru$$

vyjadřující exponenciální růst populace (Malthusovskou populaci), nebo

$$f = f(u) = ru \left( 1 - \frac{u}{K} \right)$$



vyjadřující logistický růst (Verhulstovskou populaci), případně

$$f = f(\mathbf{x}, u) = r(\mathbf{x})u \left(1 - \frac{u}{K(\mathbf{x})}\right),$$

logistický růst s prostorově nehomogenními parametry, růstovým koeficientem a/nebo kapacitou prostředí. Samozřejmě, že je možné použít libovolné funkce známé z modelování nestrukturovaných populací.

## 5.1 Model biologické invaze

Uvažujme populaci, v níž se neprojevuje vnitrodruhová konkurence, tj. její velikost roste exponenciálně. Tato populace se pohybuje v dvojrozměrném homogenním prostoru (na povrchu Země) a není unášena nějakými vnějšími silami. Navíc si představme, že v počátečním čase byla vysazena populace o velikosti  $M$  na nějakém místě.

Zavedeme souřadnou soustavu tak, že její počátek je v bodě, kde byla počáteční populace vysazena. Vývoj takové populace je modelován rovnicí reakce-difúze

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + ru, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \quad (5.7)$$

s počáteční podmínkou

$$u(0, x, y) = M\delta(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.8)$$

kde  $\delta$  označuje Diracovu distribuci soustředěnou v počátku. V nekonečnu, tj. „velice daleko“ od počátku souřadnic, je v konečném čase hustota populace nulová. Můžeme tedy uvažovat okrajovou podmínku

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u(t, x, y) dx dy < \infty, \quad t > 0. \quad (5.9)$$

Rovnice (5.7) bývá v ekologické literatuře nazývána *KiSS*, tj. *Kierstead-Slobodkin-Skellam model*.<sup>2</sup>

Řešení úlohy (5.7), (5.8), (5.9) lze najít buď metodou Fourierovy transformace, nebo úvahou analogickou úvaze při intuitivním řešení rovnice (2.22) na konci úvodní části Kapitoly 2. Toto řešení je dáno formulí

$$u(t, x, y) = \frac{M}{4\pi Dt} \exp\left(rt - \frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right) = Me^{rt} \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right); \quad (5.10)$$

jedná se tedy o  $Me^{rt}$ -násobek hustoty dvojrozměrného normálního (Gaussova) rozložení pravděpodobnosti se střední hodnotou  $(0, 0)$  a s kovarianční maticí  $2DtI$ , kde  $I$  označuje jednotkovou matici.

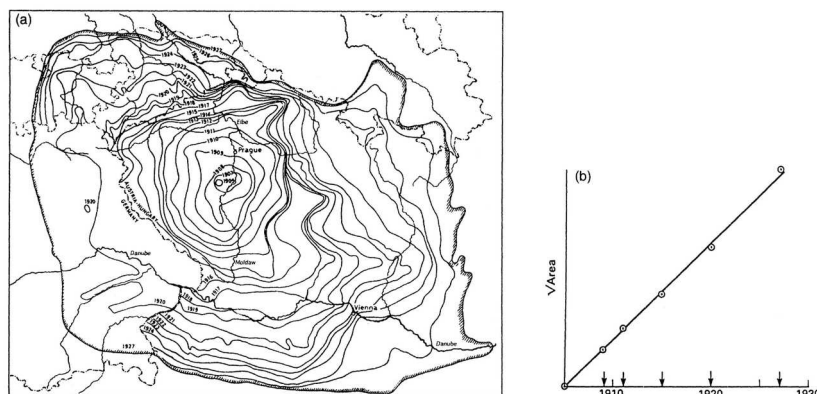
Tento výsledek ukazuje, že model nepopisuje skutečnost úplně přesně. Pro jakkoliv malou kladnou hodnotu  $t$  a pro libovolně velké hodnoty  $x$  a  $y$  je totiž  $u(t, x, y) > 0$ . To by znamenalo, že jedinci se do prostoru šíří neomezenou rychlostí, což není možné. Reálně ale hustota blízká nule prakticky znamená, že se „široko daleko“ žádný jedinec nevyskytuje, tedy že tam po modelované populaci „není ani potuchy“.

Pro studium populační invaze zavádíme „efektivně nulovou hustotu“, tj. takovou kladnou hodnotu  $\varepsilon$ , že relaci  $u(t, x, y) < \varepsilon$  interpretujeme jako nepřítomnost populace v okolí bodu  $(x, y)$  v čase  $t$ . Jako „čelo populační vlny“ definujeme kružnici se středem v počátku a poloměrem  $R(t)$  takovým, že  $u(t, x, y) = \varepsilon$  na této kružnici; formálně  $x^2 + y^2 = R(t)^2 \Rightarrow u(t, x, y) = \varepsilon$ . Platí tedy

$$\varepsilon = \frac{M}{4\pi Dt} \exp\left(rt - \frac{R(t)^2}{4Dt}\right).$$

<sup>2</sup>H. KIERSTEAD, L.B. SLOBODKIN: The size of water masses containing plankton blooms. *Journal of Marine Research* 1985, vol. 12, p. 141–147.

J.G. SKELLAM: Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika* 1951, vol. 38, p. 196–218.



Obrázek 5.2: Rozšíření ondatry pižmové v Evropě: (a) areál rozšíření do roku 1927; (b) odmocnina z plochy osídlené ondatrami v závislosti na čase. (Obrázek je z knihy N. SHIGESADA, K. KAWASAKI: *Biological Invasions: Theory and Practice*. Oxford University Press, 1997, Fig. 2.1.)

Z této rovnosti vyjádříme

$$R(t)^2 = 4Dt \left( rt - \ln t - \ln \frac{4\pi D\varepsilon}{M} \right).$$

Poněvadž platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{4\pi D\varepsilon}{M} = 0,$$

tak pro „veliké“  $t$  jsou  $\ln t$  i konstanta  $\ln \frac{4\pi D\varepsilon}{M}$  vzhledem k němu „zanedbatelně malé“. To znamená, že  $R(t)^2 \approx 4rDt^2$ . Poloměr  $R(t)$  je tedy po dostatečně dlouhém čase roven

$$R(t) \approx 2\sqrt{rD}t.$$

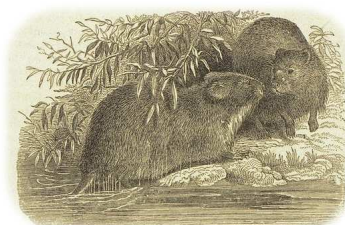
To znamená, že rychlost populační vlny je konstantní.

Prostor považujeme za homogenní, proto areál zaujímaný populací v čase  $t$  je kruh o poloměru  $R(t)$ , jeho obsah je tedy

$$S(t) = \pi R(t)^2 \approx 4\pi rDt^2.$$

Odmocnina z plochy rozšíření populace je tedy přímo úměrná času šíření.

Tento výsledek byl již dávno ověřen pozorováním. Někdy kolem roku 1906 kníže Colloredo-Mannsfeld nechal do Čech z Ohia dopravit deset párů „bobříků pižmových“ (ondatra pižmová, *Ondatra zibethicus*). Vysadil je do Charvátova rybníka u Voznice na Dobříšsku. Zde zvířata rychle zdomácněla a začala se množit. První hlodavci mimo Dobříš byli objeveni v roce 1908 u Chrástu na Plzeňsku. Od té doby se rozšířili prakticky do celé Eurasie. Počáteční velikosti areálu rozšíření jsou v následující tabulce:



| Rok $t$                                   | 1907 | 1908  | 1909  | 1910  | 1911   |
|---|------|-------|-------|-------|--------|
| plocha rozšíření $S(t)$ , km <sup>2</sup> | 550  | 2 250 | 5 550 | 9 450 | 14 100 |
| $\sqrt{S(t)}$                             | 23,5 | 47,4  | 74,5  | 97,2  | 118,7  |
| $\sqrt{S(t)} - \sqrt{S(t-1)}$             |      | 23,9  | 27,1  | 22,7  | 21,5   |

Rozšíření ondatry do roku 1927 je znázorněno na Obrázku 5.2.

## 5.2 Šíření populace v omezeném prostoru

Uvažujme populaci tvořenou jedinci, kteří zaujímají nějakou omezenou část prostoru (nějaký „potravní ostrůvek“, habitat, biotop, patch), na ní se jednak pohybují difúzí, jednak se rodí a hynou. Stav této populace samozřejmě vyjadřujeme její hustotou  $u = u(t, \mathbf{x})$ , rození a úhyn „reakční“ funkcí  $f = f(\mathbf{x}, u)$ , její rozšíření v prostoru vyjadřujeme jako difúzi s konstantní difuzivitou  $D$ . „Životní prostor“ populace je nějaká část prostoru o příslušné dimenzi  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Budeme o ní předpokládat, že má nějak „rozumnou“ hranici  $\partial\Omega$  (spojitou, konečné délky/obsahu). Jinak řečeno, populaci modelujeme rovnicí (5.6) s nulovou advekční rychlostí, tj. rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(\mathbf{x}, u). \quad (5.11)$$

Tato rovnice má být splněna pro každý čas  $t > 0$  a pro každý bod  $\mathbf{x}$  z vnitřku oblasti  $\Omega$ .

Zajímá nás, zda taková populace v oblasti  $\Omega$  přežívá, případně za jakých podmínek kladených na funkci  $f$ , difuzivitu  $D$ , velikost oblasti  $\Omega$ , podmínky na hranici  $\Omega$  a podobně.

### 5.2.1 Malthusovská populace v jednorozměrnému prostoru

V tomto případě je „reakční“ funkce tvaru  $f(u) = ru$ , kde  $r > 0$ . „Životní prostor“ budeme považovat homogenní, tj. že v každém jejím vnitřním bodě jsou pro populaci stejné podmínky, reakční člen nezávisí na prostorové souřadnici. Dostáváme tak KiSS rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru, \quad t > 0, \quad 0 < x < \ell. \quad (5.12)$$

Budeme dále předpokládat, že na hranici populace nemůže přežít, tedy uvažujeme homogenní Dirichletovy okrajové podmínky

$$u(t, 0) = 0 = u(t, \ell), \quad t > 0. \quad (5.13)$$

Dále uvažujeme obecnou počáteční podmínku

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (5.14)$$

kde  $\varphi$  je nějaká nezáporná funkce taková, že

$$\int_0^\ell \varphi(\xi) d\xi > 0, \quad (5.15)$$

tj. populace je v uvažovaném prostoru na počátku přítomna.

Snadno ověříme, že řešení rovnice (5.12) je tvaru  $u(t, x) = e^{rt}v(t, x)$ , kde funkce  $v$  je řešením rovnice difúze

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v, \quad t > 0, \quad 0 < x < \ell,$$

s počáteční podmínkou

$$v(0, x) = \varphi(x), \quad 0 < x < \ell,$$

a okrajovou podmínkou

$$v(t, 0) = 0 = v(t, \ell), \quad t > 0.$$

S využitím výsledků části 2.3.5, konkrétně formulí (2.81) a (2.81), dostaneme řešení úlohy (5.12), (5.13), (5.14) ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{(r - (k\pi/\ell)^2 D)t} \sin \frac{k\pi}{\ell} x \int_0^\ell \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi d\xi. \quad (5.16)$$

Je-li výraz  $r - (k\pi/\ell)^2 D$  z exponentu kladný alespoň pro jedno  $k$ , pak  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \infty$  pro každé  $x \in (0, \ell)$ , pokud je záporný pro všechna  $k$ , pak  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$  pro každé  $x \in (0, \ell)$ . Ještě si uvědomíme, že pokud existuje  $k_0$  takové, že  $r - (k_0\pi/\ell)^2 D < 0$ , pak je výraz na levé straně záporný pro každé  $k \geq k_0$ . Dostáváme tak výsledek: Je-li

$$\ell > \pi \sqrt{\frac{r}{D}}, \quad (5.17)$$

pak populace modelovaná rovnicí (5.12) s okrajovou podmínkou (5.13) přežívá a její velikost roste nade všechny meze; je-li

$$\ell < \pi \sqrt{\frac{r}{D}}, \quad (5.18)$$

pak populace modelovaná rovnicí (5.12) s okrajovou podmínkou (5.13) vyhyne.

## 5.2.2 Malthusovská populace ve dvojrozměrném prostoru, radiálně symetrická

Uvažujme populaci obývající homogenní kruhový prostor, na jehož hranici jedinci hynou. Označme průměr této oblasti  $\ell$ . Vývoj takové populace je opět modelován KiSS rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + ru, \quad t > 0, \quad x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\ell^2 \quad (5.19)$$

s okrajovou podmínkou

$$u(t, x, y) = 0, \quad t > 0, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\ell^2. \quad (5.20)$$

Pro jednoduchost se omezíme na takové populace, jejichž hustota závisí pouze na vzdálenosti od středu, nikoliv na konkrétní poloze (hustota je radiálně symetrická). K takové situaci dojde tehdy, pokud na počátku byla populace koncentrována ve středu, nebo (obecněji) její hustota byla na počátku radiálně symetrická. Tento předpoklad zapíšeme druhou okrajovou podmínkou

$$u(t, x_1, y_1) = u(t, x_2, y_2), \quad t > 0, \quad x_1 y_2 = x_2 y_1. \quad (5.21)$$

Z takto uvažované symetrie plyne, že při vyjádření prostorových bodů v polárních souřadnicích  $\varrho, \varphi$  bude hustota záviset pouze na průvodiči  $\varrho$ , nikoliv na úhlu  $\varphi$ , tj.  $u = u(t, \varrho)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ . Proto při transformaci rovnice (5.19) do polárních souřadnic dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho} \right) + ru, \quad t > 0, \quad 0 < \varrho < \frac{1}{2}\ell, \quad (5.22)$$

tedy rovnici na úsečce. Okrajová podmínka v pravém krajním bodě  $\varrho = \frac{1}{2}\ell$  plyne bezprostředně z podmínky (5.20). Dále ze symetrie řešení plyne, že funkce  $u$  musí být v proměnné  $\varrho$  sudá, a proto její derivace podle této proměnné v nule, tj. v levém krajním bodě, musí být nulová. Okrajové podmínky k rovnici (5.22) tedy jsou

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho}(t, 0) = 0 = u(t, \frac{1}{2}\ell), \quad t > 0. \quad (5.23)$$

Rovnici (5.22) vyjádříme v bezrozměrných veličinách, tedy změníme měřítko času i prostorové proměnné, a dále zavedeme novou neznámou funkci  $v$  vztahy

$$\tau = rt, \quad \xi = \frac{2}{\ell}\varrho, \quad v = e^{-\tau}u. \quad (5.24)$$

Pak je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{\tau} v = r \left( v + \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) e^{\tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\partial \xi}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{\tau} v = \frac{2}{\ell} \frac{\partial v}{\partial \xi} e^{\tau} = \frac{2e^{\tau}}{\ell} \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho} \right) = \frac{2}{\ell} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\ell}{2} \xi \frac{2e^\tau}{\ell} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = \frac{2e^\tau}{\ell} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right).$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (5.22) a vydělíme společným nenulovým faktorem  $e^\tau$ . Dostaneme rovnici

$$r \left( v + \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) = D \frac{4}{\ell^2} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + rv,$$

po úpravě

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{4}{\ell^2} \frac{D}{r} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right).$$

Ještě označíme

$$\delta = \frac{2}{\ell} \sqrt{\frac{D}{r}}. \quad (5.25)$$

Rovnice (5.22) se pomocí vztahů (5.24) a (5.25) transformuje na rovnici

$$\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right), \quad \tau > 0, \quad 0 < \xi < 1. \quad (5.26)$$

Příslušné okrajové podmínky jsou

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau, 0) = 0 = v(\tau, 1), \quad \tau > 0. \quad (5.27)$$

Úlohu (5.26), (5.27) budeme řešit pomocí separace proměnných, tj. řešení budeme hledat ve tvaru  $v(\tau, \xi) = T(\tau)X(\xi)$ . Po dosazení do rovnice a vydělení součinem  $TX$  dostaneme rovnost

$$\frac{1}{\delta^2} \frac{dT}{dT} = \frac{1}{\xi X} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dX}{d\xi} \right).$$

Výraz na levé straně nezávisí na proměnné  $\xi$ , výraz na pravé straně nezávisí na proměnné  $\tau$ . Oba tedy musí být rovny nějaké konstantě, označme ji  $-\lambda$ . Dostáváme tak dvě obyčejné lineární rovnice. Rovnici prvního řádu

$$\frac{dT}{dT} = -\lambda \delta^2 T,$$

která má řešení

$$T(\tau) = \text{const} \cdot e^{-\lambda \delta^2 \tau}, \quad (5.28)$$

a rovnici druhého řádu

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dX}{d\xi} \right) + \lambda X = 0, \quad 0 < \xi < 1. \quad (5.29)$$

Okrajovou podmínku k této rovnici dostaneme z podmínky (5.27)

$$X'(0) = 0, \quad X(1) = 0. \quad (5.30)$$

Tuto okrajovou úlohu budeme řešit Frobeniovou metodou, tj. budeme hledat řešení ve tvaru mocninné řady

$$X(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n.$$

Podle první z podmínek (5.30) musí být  $a_1 = 0$ . Postupně tak vypočítáme

$$X' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \xi^{n-1}, \quad \xi X' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \xi^n, \quad (\xi X')' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \xi^{n-1},$$

$$\frac{1}{\xi} (\xi X')' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \xi^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^2 a_{n+2} \xi^n.$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (5.29), dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)^2 a_{n+2} + \lambda a_n] \xi^n,$$

takže koeficienty  $a_n$  mocninné řady musí splňovat rekurentní vztah

$$a_{n+2} = \frac{-\lambda}{(n+2)^2} a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Z rovnosti  $a_1 = 0$  plyne, že všechny koeficienty s lichými indexy jsou nulové. Pro koeficienty se sudými indexy platí

$$a_{2(k+1)} = \frac{-\lambda}{4(k+1)^2} a_{2k},$$

tedy

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right)^{2k} a_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(odvoďte tento výsledek nebo ho dokažte indukcí). Dostáváme tak řešení rovnice (5.29) ve tvaru mocninné řady

$$X(\xi) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{\sqrt{\lambda} \xi}{2} \right)^{2k}.$$

Porovnáním s definicí 2 v dodatku D.2 vidíme, že je to Besselova funkce prvního druhu řádu 0,

$$X(\xi) = a_0 J_0(\sqrt{\lambda} \xi). \quad (5.31)$$

Z okrajové podmínky (5.30) v pravém krajním bodě plyne  $0 = X(1) = a_0 J_0(\sqrt{\lambda})$ . To znamená, že  $\sqrt{\lambda}$  je kořenem Besselovy funkce  $J_0$ .

Odtud a z rovností (5.28), (5.31) dostáváme řešení úlohy (5.26), (5.27):

$$v(\tau, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\beta_k^2 \delta^2 \tau} J_0(\beta_k \xi),$$

kde  $\beta_k$  jsou kořeny Besselovy funkce  $J_0$  a konstanty  $c_k$  závisí na počáteční podmínce. Zpětnou transformací (5.24) a (5.25) dostaneme řešení úlohy (5.22), (5.23)

$$u(t, \varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp \left\{ \left( 1 - \left( \frac{2\beta_k}{\ell} \right)^2 \frac{D}{r} \right) rt \right\} J_0 \left( \frac{2\beta_k}{\ell} \varrho \right).$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že pokud

$$1 - \left( \frac{2\beta_k}{\ell} \right)^2 \frac{D}{r} < 0$$

pro všechna  $k = 1, 2, 3, \dots$ , pak  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \varrho) = 0$  pro každé  $\varrho \in [1, \frac{1}{2}\ell]$ . Populace tedy může přežívat a šířit se v prostoru pouze tehdy, když

$$\ell > 2\beta_1 \sqrt{\frac{D}{r}} \doteq 4,8096 \sqrt{\frac{D}{r}}.$$

### 5.2.3 Malthusovská populace v nehomogenním prostoru

Homogenní Dirichletovy podmínky (5.13) – na hranici jsou všichni jedinci zabíjeni – je velice krutý způsob, jak populaci udržet uvnitř oblasti. Alternativní přístup k omezení „životního prostoru“ použili Gourney a Nisbet.<sup>3</sup> Uvažovali populaci na nekonečném prostoru, jejíž růstový koeficient klesá s druhou mocninou vzdálenost od středu a je kladný pouze na úsečce délky  $\ell$ . Jinak řečeno, reakční funkce je tvaru  $f(x) = r(1 - (2x/\ell)^2)$ .

Populaci tedy budeme modelovat rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \left[ 1 - \left( \frac{2x}{\ell} \right)^2 \right] u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.32)$$

Populace samozřejmě nemůže být rozšířená do nekonečna. Proto zavádíme okrajovou podmínku

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(t, x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x), \quad t > 0. \quad (5.33)$$

Položíme

$$\tau = rt, \quad \xi = \frac{2}{\ell}x, \quad v = e^{-\tau}u, \quad (5.34)$$

tj. změníme měřítko obou nezávisle proměnných a zavedeme novou neznámou funkci  $v$ . Pak je

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{\tau} v = r \left( v + \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) e^{\tau}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{\tau} v = \frac{2}{\ell} e^{\tau} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{2}{\ell} e^{\tau} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = \frac{4}{\ell^2} e^{\tau} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (5.32) a snadné úpravě dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{4}{\ell^2} \frac{D}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \xi^2 v.$$

Ještě označíme

$$\delta = \frac{2}{\ell} \sqrt{\frac{D}{r}} \quad (5.35)$$

a dostaneme rovnici

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \xi^2 v, \quad \tau > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.36)$$

K této rovnici ještě přidáme okrajovou podmínku

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\tau, \xi) = 0 = \lim_{\xi \rightarrow \infty} v(\tau, \xi), \quad \tau > 0, \quad (5.37)$$

která zaručí splnění původní okrajové podmínky (5.33).

V rovnici (5.36) budeme separovat časovou a prostorovou složku, tj. řešení budeme hledat ve tvaru

$$u(\tau, \xi) = T(\tau)S(\xi).$$

Po dosazení do rovnice dostaneme  $T'S = \delta^2 T S'' - \xi^2 T S$ , kde  $'$  označuje obyčejnou derivaci dané funkce podle příslušné nezávisle proměnné. Rovnici vydělíme výrazem  $\delta^2 T S$  a dostaneme

$$\frac{T'}{\delta^2 T} = \frac{S''}{S} - \frac{\xi^2}{\delta^2}.$$

<sup>3</sup>W.S.C. GOURNEY, R.M. NISBET: The regulation of inhomogeneous populations. *Journal of Theoretical Biology* 1975, vol. 52, p.441–457.

Výraz na levé straně závisí pouze na čase  $\tau$ , výraz na pravé straně pouze na prostorové proměnné  $\xi$ . To znamená, že na obou stranách rovnosti je nějaká konstanta; označme ji  $-\lambda$ . Dostáváme tak dvě obyčejné lineární diferenciální rovnice, rovnici prvního řádu pro funkci  $T$

$$\frac{d}{d\tau}T = -\lambda\delta^2T \quad (5.38)$$

a rovnici druhého řádu pro funkci  $S$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}S + \left(\lambda - \frac{\xi^2}{\delta^2}\right)S = 0. \quad (5.39)$$

Aby byla splněna okrajová podmínka (5.37), budeme požadovat, aby funkce  $S$  splňovala okrajovou podmínku

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} S(\xi) = 0 = \lim_{\xi \rightarrow \infty} S(\xi). \quad (5.40)$$

Ještě jednou změníme měřítko nezávisle proměnné, položíme

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{\delta}}\xi. \quad (5.41)$$

Pak

$$\frac{d}{d\xi}S = \frac{d\eta}{d\xi} \frac{d}{d\eta}S = \sqrt{\frac{1}{\delta}} \frac{d}{d\eta}S, \quad \frac{d^2}{d\xi^2}S = \frac{d\eta}{d\xi} \frac{d}{d\eta} \left( \sqrt{\frac{1}{\delta}} \frac{d}{d\eta}S \right) = \frac{1}{\delta} \frac{d^2}{d\eta^2}S$$

a po dosazení do rovnice (5.39) a snadné úpravě dostaneme

$$\frac{d^2}{d\eta^2}S + (\delta\lambda - \eta^2)S = 0.$$

Ještě zavedeme označení

$$p = \frac{\delta\lambda - 1}{2}. \quad (5.42)$$

Okrajová úloha (5.39), (5.40) pro obyčejnou diferenciální rovnici se tedy transformuje na rovnici<sup>4</sup>

$$\frac{d^2}{d\eta^2}S + (2p + 1 - \eta^2)S = 0 \quad (5.43)$$

s okrajovou podmínkou

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} S(\eta) = 0 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} S(\eta).$$

Okrajová podmínka bude splněna zejména tehdy, když funkce  $S$  bude tvaru

$$S(\eta) = e^{-\eta^2/2}H(\eta), \quad (5.44)$$

kde  $H$  je polynom. Při této substituci je

$$\frac{dS}{d\eta} = \left( -\eta H(\eta) + \frac{dH}{d\eta} \right) e^{-\eta^2/2},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2S}{d\eta^2} &= \left[ -H(\eta) - \eta \frac{dH}{d\eta} + \frac{d^2H}{d\eta^2} - \eta \left( -\eta H(\eta) + \frac{dH}{d\eta} \right) \right] e^{-\eta^2/2} = \\ &= \left( \frac{d^2H}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dH}{d\eta} + (\eta^2 - 1)H \right) e^{-\eta^2/2}, \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>To je Schrödingerova rovnice pro jednorozměrný kvantový harmonický oscilátor. Z jejího řešení jsou převzaty následující poněkud podivné triky.



takže polynom  $H$  je řešením rovnice

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dH}{d\eta} + 2pH = 0.$$

To je stejná rovnice jako (D.3), která má řešení ve tvaru polynomu pro  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$  a těmito řešeními jsou Hermiteovy-Čebyševovy polynomy  $H_p$ .

Řešení rovnice (5.39) jsou vzhledem k (5.44) a (5.41) dána vztahy

$$S_p(\xi) = e^{-\xi^2/2\delta} H_p\left(\frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right), \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Ze vztahu (5.42) vidíme, že  $\lambda = \frac{2p+1}{\delta}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ . Příslušné časové složky jsou řešením rovnice (5.38), tedy

$$T_p(\tau) = c_p e^{-(2p+1)\delta\tau},$$

kde  $c_p$  jsou integrační konstanty, takže řešením pomocné úlohy (5.36), (5.37) je funkce

$$v(\tau, \xi) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p e^{-(2p+1)\delta\tau - \xi^2/2\delta} H_p\left(\frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right).$$

Řešení původní úlohy v bezrozměrných proměnných  $\tau, \xi$  je vzhledem k třetí rovnosti v (5.34) dáno rovností

$$u(\tau, \xi) = e^{-\xi^2/2\delta} \sum_{p=0}^{\infty} c_p e^{[1-(2p+1)\delta]\tau} H_p\left(\frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right).$$

Pokud tedy

$$1 > \delta$$

pak má úloha (5.32), (5.33) řešení takové, že jeho limita pro  $t \rightarrow \infty$  není nula. V původních proměnných dostaneme podmínku přežití modelované populace ve tvaru

$$l > 2 \sqrt{\frac{D}{r}}.$$

## 5.2.4 Verhulstovská populace na prostoru se „smrtící“ hranicí

Malthusovská populace je nerealistická, neboť roste do nekonečna. Skutečné prostředí je však schopno uživit jen populaci do jisté konečné velikosti, má omezenou úživnost, kapacitu. V prostředí omezených zdrojů si jedinci vzájemně konkurují, soupeří o tyto zdroje. Proto růst populace popisujeme „reakční“ funkcí ve tvaru

$$f(u) = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

kde  $r$  a  $K$  jsou kladné konstanty,  $r$  je růstový koeficient populace bez vnitrodruhové konkurence,  $K$  je kapacita (úživnost) prostředí. Opět předpokládáme, že na hranici populace přežít nemůže. Za těchto předpokladů je vývoj populace modelován rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) \quad (5.45)$$

s okrajovou podmínkou (5.13).

Abychom rovnici zjednodušili, změníme měřítko u nezávisle proměnných i u hustoty, tj. zavedeme nové nezávisle proměnné a novou neznámou funkci vztahy

$$\tau = rt, \quad \xi = \sqrt{\frac{r}{D}} x, \quad v = \frac{u}{K}.$$

(Promyslete si, že nezávisle proměnné  $\tau$ ,  $\xi$  i závisle proměnná  $v$  jsou bezrozměrné.) Platí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} K v = K r \frac{\partial v}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} K v = K \sqrt{\frac{r}{D}} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( K \sqrt{\frac{r}{D}} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = K \frac{r}{D} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (5.45) a po snadné úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + v(1 - v).$$

To je Fisherova-Kolmogorova rovnice (2.113), která byla studována v části 2.4.2. Okrajová podmínka (5.13) se transformuje na podmínku

$$v(t, 0) = 0 = v\left(t, \sqrt{\frac{r}{D}} \ell\right), \quad t > 0.$$

Z analýzy rovnice (2.113) s okrajovou podmínkou (2.114) provedené v 2.4.2 nyní můžeme vyvodit závěr: Je-li splněna podmínka (5.17), pak populace modelovaná rovnicí (5.45) s okrajovou podmínkou (5.13) přežívá a pokud je splněna i počáteční podmínka (5.14), (5.15), pak se hustota populace ustálí; je-li splněna podmínka (5.18), pak populace modelovaná rovnicí (5.12) s okrajovou podmínkou (5.13) vyhyne.

#### Shrnutí:

Ve všech vyšetřovaných případech jsme dostali výsledek, že přežití populace závisí na velikosti prostoru  $\ell$  (délka, průměr) a na poměru koeficientu růstu  $r$  a difuzivity  $D$ . Konkrétně

$$\begin{aligned} \ell > 2\sqrt{\frac{r}{D}}, & \quad \text{KiSS 1D s kvadratickým poklesem růstového koeficientu.} \\ \ell > \pi\sqrt{\frac{r}{D}}, & \quad \text{KiSS 1D, Fisher-Kolmogorov 1D,} \\ \ell > 4,8096\sqrt{\frac{r}{D}}, & \quad \text{KiSS 2D.} \end{aligned}$$

Připomeňme, že ve všech případech se jednalo o prostor, na jehož hranici se populace nemůže množit (porodnost na hranici není větší než úmrtnost).

### 5.3 Prostorové šíření epidemie typu SIR

Epidemii typu SIR bez vitální dynamiky popisuje systém tří obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{dS}{d\tau} = -\beta IS, \quad \frac{dI}{d\tau} = \beta IS - \gamma I, \quad \frac{dR}{d\tau} = \gamma I$$

s počátečními podmínkami

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = N - S_0, \quad R(0) = 0,$$

kde  $N = S + I + R$  je celková velikost populace. Analýza tohoto systému (provedená např. ve skriptech KALAS J., POSPÍŠIL Z. *Spojité modely v biologii*, MU, Brno 2001, str. 87–91.) ukazuje, že pokud  $S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$ , pak pro řešení platí

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} S(\tau) = S_\infty > 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = R_\infty = N - S_\infty > 0.$$

Uvažujme situaci, kdy se v prostorově homogenní populaci citlivých jedinců objeví jeden infekční. Jako konkrétní epidemii si můžeme představit vzteklinu v populaci lišek. Zdravá liška žije ve svém teritoriu, v prostoru se nepřemisťuje. Nemocné lišky naopak v důsledku vznikajících konfliktů svá teritoria opouštějí, a vyhledávají oblasti, v nichž je menší pravděpodobnost setkání s jedinci nemocnými (vzteklými). Vzteklinu je choroba letální, nemocné lišky po nějakém čase umírají.

Nechť nyní  $S = S(\tau, \xi)$ ,  $I = I(\tau, \xi)$ ,  $R = R(\tau, \xi)$  označuje hustotu zdravých, infekčních a uhynulých lišek v čase  $\tau$  a v místě  $\xi$ . Model uvažované epidemie můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -\beta IS, \quad \frac{\partial I}{\partial \tau} = \beta IS - \gamma I + D \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial \tau} = \gamma I.$$

V tomto systému rovnic reakce-difúze nejprve změňme měřítko všech proměnných tak, aby všechny veličiny byly bezrozměrné, tj. zavedeme substituci

$$u = \frac{1}{N}S, \quad v = \frac{1}{N}I, \quad w = \frac{1}{N}R, \quad t = \gamma\tau, \quad x = \sqrt{\frac{\gamma}{D}}\xi, \quad R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}.$$

Pak je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{N} \frac{\partial S}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{N} \frac{1}{\gamma} (-\beta IS) = -\frac{\beta N}{\gamma} \frac{S}{N} \frac{I}{N} = R_0 uv, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{N} \frac{\partial R}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{N} \frac{1}{\gamma} \gamma I = v,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{N} \frac{\partial I}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{N} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial I}{\partial \tau} = \frac{1}{N} \frac{1}{\gamma} \left( \beta IS - \gamma I + D \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \right) = \\ &= \frac{\beta N}{\gamma} uv - v + \frac{1}{N\gamma} D \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial}{\partial x} Nv \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = R_0 uv - v + \frac{D}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{D}} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &= R_0 uv - v + \frac{D}{\gamma} \sqrt{\frac{\gamma}{D}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} = R_0 uv - v + \frac{D}{\gamma} \frac{\gamma}{D} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = R_0 uv - v + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy systém rovnic reakce-difúze ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -R_0 uv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = R_0 uv - v + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = v. \quad (5.46)$$

V analogii s modelem epidemie bez prostorové závislosti očekáváme, že výsledkem bude prostorově homogenní populace lišek zmenšená o ty, které uhynuly během epidemie, tedy že pro řešení systému (5.46) bude platit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = u_1 = \frac{S_\infty}{N}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(t, x) = 1 - u_1 = \frac{R_\infty}{N} \quad (5.47)$$

pro každé  $x \in \mathbb{R}$ . Budeme hledat takové řešení systému (5.46), že v okolí místa v prostoru, v němž se epidemie objevila je populace zredukovaná, ve vzdáleném místě má populace původní hustotu a přechod mezi těmito stavy putuje v prostoru zleva doprava (tj. v kladném smyslu osy  $x$ ) jako vlna rychlostí  $c$ . Přesněji řečeno, budeme hledat řešení systému (5.46), které splňuje podmínky

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u(0, x - ct), & \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t, x) &= 1, & \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) &= u_1, \\ v(t, x) &= v(0, x - ct), & \lim_{t \rightarrow -\infty} v(t, x) &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x) &= 0, \\ w(t, x) &= w(0, x - ct), & \lim_{t \rightarrow -\infty} w(t, x) &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} w(t, x) &= 1 - u_1 \end{aligned} \quad (5.48)$$

pro všechna  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Zavedeme novou nezávisle proměnnou  $z$  a nové funkce této proměnné vztahy

$$z = x - ct,$$

$$U(z) = u(0, z) = u(0, x - ct), \quad V(z) = v(0, z) = v(0, x - ct), \quad W(z) = w(0, z) = w(0, x - ct).$$

Pak podle (5.46) platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(z)}{\partial t} &= U'(z) \frac{\partial z}{\partial t} = -cU'(z) = -R_0U(z)V(z), \\ \frac{\partial V(z)}{\partial t} &= V'(z) \frac{\partial z}{\partial t} = -cV'(z) = -R_0U(z)V(z) - V(z) + V''(z), \\ \frac{\partial W(z)}{\partial t} &= W'(z) \frac{\partial z}{\partial t} = -cW'(z) = V(z). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$U' = \frac{R_0}{c}UV, \quad V' = -\frac{R_0}{c}UV + \frac{1}{c}V - \frac{1}{c}V'', \quad W' = -\frac{1}{c}V \quad (5.49)$$

s podmínkami

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = u_1, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} V(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} W(z) = 1 - u_1, \quad (5.50)$$

neboť  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z(x - ct) = \mp\infty$ . Dále budeme požadovat, aby funkce  $V$  byla v okolí  $\infty$  i v okolí  $-\infty$  monotonní. V opačném případě by totiž funkce  $V$  nabývala pro velké absolutní hodnoty nezávisle proměnné  $z$  záporných hodnot, což není realistické (infikovaných jedinců nemůže být méně, než žádný). Na řešení systému (5.49) tedy klademe další podmínku

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} V'(z) = 0. \quad (5.51)$$

Druhou z rovnic (5.49) vydělíme první z nich. Dostaneme

$$\frac{dV}{dU} = -1 + \frac{1}{R_0U} - \frac{V''}{R_0UV}.$$

Vyjádříme poslední člen pravé strany této rovnosti. Poněvadž

$$V'' = \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{d}{dU} \frac{dV}{dz} \frac{dU}{dz} = U' \frac{dV'}{dU} = \frac{R_0}{c}UV \frac{dV'}{dU},$$

platí

$$\frac{V''}{R_0UV} = \frac{\frac{R_0}{c}UV \frac{dV'}{dU}}{R_0UV} = \frac{1}{c} \frac{dV'}{dU}.$$

Máme tedy rovnost

$$\frac{dV}{dU} = -1 + \frac{1}{R_0U} - \frac{1}{c} \frac{dV'}{dU},$$

kteřou můžeme integrovat podle  $U$ . Obdržíme

$$V = -U + \frac{1}{R_0} \ln U - \frac{1}{c}V' + A,$$

kde  $A$  je integrační konstanta. Její hodnotu určíme z podmínek (5.50) a (5.51) limitním přechodem  $z \rightarrow \infty$  v poslední rovnosti. Dostaneme  $0 = -1 + 0 - 0 + A$ , tedy  $A = 1$ . Nyní můžeme vyjádřit  $V'$ . Spolu s první z rovnic (5.49) dostaneme dvourozměrný autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$U' = \frac{R_0}{c}UV, \quad V' = c \left( 1 - U - V + \frac{1}{R_0} \ln U \right). \quad (5.52)$$

Ve druhé z nich provedeme limitní přechod  $z \rightarrow -\infty$  a s využitím podmínek (5.50), (5.51) dostaneme

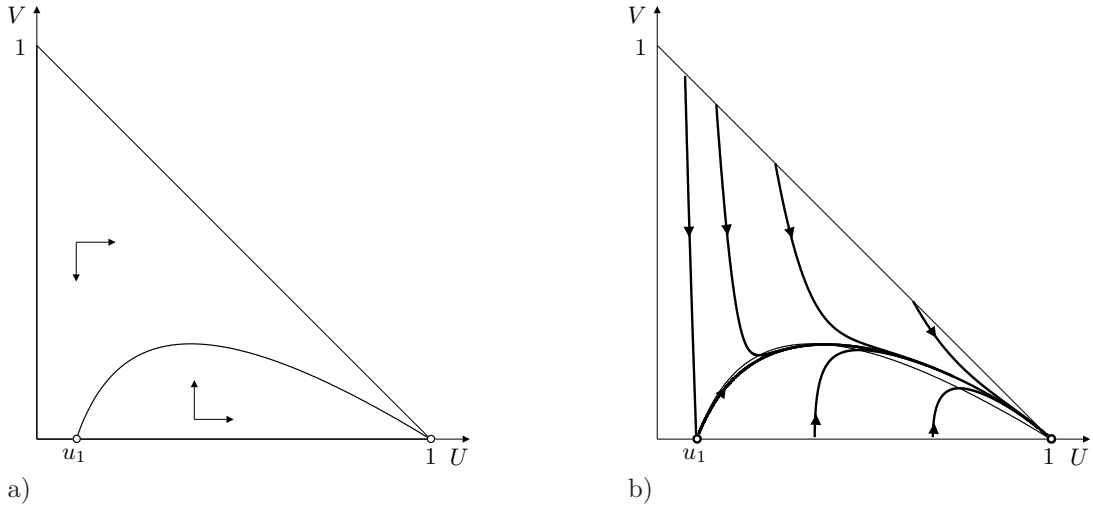
$$0 = c \left( 1 - u_1 + \frac{1}{R_0} \ln u_1 \right),$$

tedy

$$R_0 = \frac{\ln u_1}{u_1 - 1}. \quad (5.53)$$

Na pravé straně je výraz, který je pro  $u_1 \in (0, 1)$  větší než 1. Z tohoto pozorování plyne, že systém rovnic reakce-difúze (5.46) může mít řešení splňující podmínky (5.48) pouze tehdy, když  $R_0 > 1$ . (To je stejná podmínka, jako podmínka pro vypuknutí epidemie v prostorově homogenním případě.)

Stavový prostor systému (5.52) je množina  $\Omega = \{(U, V) \in \mathbb{R}^2 : U \geq 0, V \geq 0, U + V \leq 1\}$ . V této množině má za podmínky  $R_0 > 1$  systém dva stacionární body  $(1, 0)$  a  $(u_1, 0)$ , sr. obr. 5.3. Aby systém (5.46) měl řešení splňující podmínky (5.48), tj. aby systém (5.52) měl řešení splňující podmínky (5.50), (5.51), musí existovat heteroklinická trajektorie systému (5.52) vycházející ze stacionárního bodu  $(u_1, 0)$  a končící v bodě  $(1, 0)$ , která je celá v množině  $\Omega$ .



Obrázek 5.3: Fázový portrét a) a trajektorie b) systému (5.52). Nulkliny funkce  $U$  jsou úsečky  $(0, V)$ ,  $V \in [0, 1]$ ,  $(U, 0)$ ,  $U \in [0, 1]$ , nulklina funkce  $V$  má rovnici  $V = 1 - U + \frac{\ln U}{R_0}$ .

Variační matice systému (5.52) v obecném bodě je

$$J(U, V) = \begin{pmatrix} \frac{R_0}{c} V & \frac{R_0}{c} U \\ c \left( -1 + \frac{1}{R_0 U} \right) & -c \end{pmatrix},$$

takže

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{R_0}{c} \\ -c \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) & -c \end{pmatrix},$$

$$\det J(1, 0) = R_0 \frac{R_0 - 1}{R_0} = R_0 - 1 > 0, \quad \text{tr} J(1, 0) = -c < 0,$$

$$\text{tr} J(1, 0)^2 - 4 \det J(1, 0) = c^2 - 4(R_0 - 1),$$

což znamená, že pro

$$c \geq \sqrt{4(R_0 - 1)} \quad (5.54)$$

je stacionární bod  $(1, 0)$  stabilním uzlem a v opačném případě je stabilním ohniskem. Pokud by tento bod, který leží na hranici stavového prostoru  $\Omega$ , byl ohniskem, trajektorie v jeho okolí by opustila stavový prostor. To není realistické, takže nerovnost (5.54) je nutnou podmínkou pro existenci řešení systému (5.46) splňujícího podmínky (5.48).

Dále

$$J(u_1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{R_0 u_1}{c} \\ -c \left(1 - \frac{1}{R_0 u_1}\right) & -c \end{pmatrix}, \quad \det J(u_1, 0) = R_0 u_1 - 1.$$

Podle rovnosti (5.53) je

$$\frac{1}{u_1} - R_0 = \frac{1}{u_1} + \frac{\ln u_1}{1 - u_1} > 0,$$

neboť

$$\lim_{u_1 \rightarrow 1} \left( \frac{1}{u_1} + \frac{\ln u_1}{1 - u_1} \right) = 1 + \lim_{u_1 \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{u_1}}{-1} = 0$$

a

$$\begin{aligned} \frac{d}{du_1} \left( \frac{1}{u_1} + \frac{\ln u_1}{1 - u_1} \right) &= -\frac{1}{u_1^2} + \frac{\frac{1}{u_1}(1 - u_1) + \ln u_1}{(1 - u_1)^2} \leq -\frac{1}{u_1^2} + \frac{\frac{1}{u_1}(1 - u_1) - (1 - u_1)}{(1 - u_1)^2} = \\ &= -\frac{1}{u_1^2} + \frac{1 - u_1}{u_1(1 - u_1)} = \frac{u_1 - 1}{u_1^2} < 0 \end{aligned}$$

pro  $u_1 \in (0, 1)$ , což znamená, že  $J(u_1, 0) < 0$  s stacionární bod  $(u_1, 0)$  je sedlo.

Provedená analýza ukazuje, že v případě  $R_0 > 1$  může mít systém rovnic reakce-difúze (5.46) řešení ve tvaru putující vlny. Rychlost  $c$  jejího postupu je zdola omezena nerovností (5.54). Minimální rychlost šíření modelované epidemie tedy je

$$c = 2\sqrt{R_0 - 1},$$

nebo v původních jednotkách

$$c = 2\sqrt{D(\beta N - \gamma)}.$$

Rychlost postupu epidemie závisí na velikosti populace.



## Kapitola 6

# Modely šíření vzruchu v neuronu

Představme si idealizovaný neuron, specifictěji axon, jako válec, jehož průměr je vzhledem k délce zanedbatelný. Lze ho tedy považovat za jednorozměrný objekt. Uvnitř i vně je kapalina, v níž jsou rozptýleny různé ionty, zejména  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{Cl}^-$ . Jejich koncentrace je jiná vně a uvnitř neuronu a tedy uvnitř neuronu je jiný elektrický potenciál než vně, neuron je tak *polarizován*. (Konkrétně, iontů  $\text{K}^+$  je v neuronu více než v okolí, iontů  $\text{Na}^+$  méně; přitom celkové množství kladných iontů v neuronu je menší než v okolním prostředí.) Povrch neuronu (plášť válce) je tvořen membránou, v níž jsou specifické iontové kanálky schopné propouštět ionty. Tyto kanálky se mohou uzavírat nebo otevírat, jinak řečeno, počet kanálků se může měnit.

Přes membránu se ionty pohybují působením elektrostatické síly, uvnitř neuronu difúzí.

Vedení impulsu v neuronu začíná *depolarizací* — změnou elektrického potenciálu. Je-li depolarizace malá, neuron se téměř bezprostředně vrátí do svého obvyklého stavu. Větší depolarizace (změna potenciálu asi o  $-25\text{mV}$ ) však vyvolá následující změny:

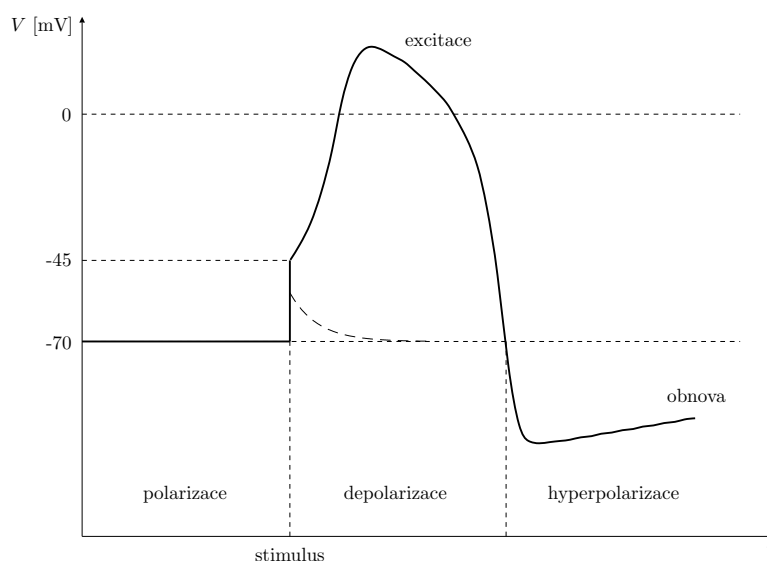
- Iontové kanálky pro sodík se vlivem depolarizace otevřou a kladné sodíkové ionty proudí do neuronu, čímž dále zvětší polarizaci. Tento proces způsobí, že neuron má kladný náboj, je *opačně polarizován*. Tato fáze je fází zdvihu (upstroke phase).
- Po delší době (řádově ms) se otevřou iontové kanálky pro draslík a draslíkové ionty vytékají z neuronu. Sodíkové ionty jsou s nimi po jistou dobu v rovnováze a potenciál se proto téměř nemění. To je fáze *excitace*.
- Nakonec vytékající draslíkové ionty převáží přitékající sodíkové ionty, takže neuron bude mít opět záporný náboj a ten uzavře iontové kanálky pro sodík. Záporný náboj bude dokonce větší, než je rovnovážná polarizace, a neuron je tak *hyperpolarizován*. Tato fáze je fází poklesu (downstroke phase).
- Většina iontových kanálků pro sodík je uzavřena a potřebuje nějaký čas k zotavení, než mohou být opět otevřeny. To je období *netečnosti* (*refractory period*), v němž má neuron více než obnovenou polarizaci, ale nereaguje na žádný další podnět.
- Postupně se iontové kanálky pro draslík uzavřou a iontové kanálky pro sodík opět začnou být aktivní. To je fáze *obnovy* (*recovery phase*).

### 6.1 Model

Nezávisle proměnnými budou čas  $t$  a poloha na neuronu  $x$ . Jako stavovou proměnnou zavedeme napětí na membráně  $V = V(t, x)$  v čase  $t$  a v místě  $x$ .

Membránové napětí  $V$  (rozdíl potenciálů uvnitř a vně neuronu) je určeno koncentrací iontů uvnitř neuronu; koncentraci iontů ve vnějším prostředí považujeme za konstantní. Pohyb iontů přes membránu neuronu a v neuronu (a tedy vývoj napětí  $V$ ) bude popsán rovnicí rekce-difúze.





Obrázek 6.1: Schématické znázornění časového průběhu membránového potenciálu

Reakce vyjadřuje změnu koncentrací iontů v určitém místě neuronu, tedy elektrický proud. K celkovému proudu  $I_a$  přispívá jednak tok jednotlivých iontů  $I_i$ , jednak kapacitance membrány, která je úměrná změnám membránového napětí. Tedy

$$I_a = C \frac{dV}{dt} + I_i,$$

kde kladná konstanta  $C$  označuje kapacitu membrány. Proud  $I_i$  vyjádříme ve tvaru součtu

$$I_i = I_{Na} + I_K + I_L,$$

kde  $I_{Na}$  a  $I_K$  vyjadřují příslušné toky sodíkových a draslíkových iontů, člen  $I_L$  vyjadřuje příspěvek iontů ostatních. Označme dále  $m = m(t, V)$  hustotu aktivačních kanálků pro sodíkové ionty (propouští  $Na^+$  dovnitř neuronu) v čase  $t$  při membránovém napětí  $V$ ,  $h = h(t, V)$  množství inaktivačních kanálků pro sodíkové ionty (propouští  $Na^+$  z neuronu do vnějšího prostředí) a  $n = n(t, V)$  množství aktivačních kanálků pro draslíkové ionty (propouští  $K^+$  dovnitř neuronu). Veličiny  $m, h, n$  nabývají hodnot z intervalu  $[0, 1]$ . Alan Hodgkin a Andrew Huxley<sup>1</sup> na základě měření získali vztah

$$I_i = I_i(V, m, h, n) = -(g_{Na}m^3h(V - V_{Na}) + g_Kn^4(V - V_K) + g_L(V - V_L));$$

přičemž  $V_{Na}, V_K, V_L$  vyjadřují rovnovážná napětí,  $g_{Na}, g_K, g_L$  jsou nějaké kladné empirické konstanty; např.  $g_{Na}m^3h$  vyjadřuje konduktanci sodíku. Pro tyto konstanty platí nerovnosti

$$V_K < V_L < V_{Na}, \quad g_L < g_K < g_{Na}.$$

Povšimněme si ještě, že funkce  $I_a$  je v první proměnné  $V$  lineární.

Pro celkový proud  $I_a = I_a(V, m, h, n)$  tak dostáváme rovnost

$$I_a = C \frac{dV}{dt} - (g_{Na}m^3h(V - V_{Na}) + g_Kn^4(V - V_K) + g_L(V - V_L)),$$

<sup>1</sup>A.L. HODGKIN, A.F. HUXLEY: A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *The Journal of Physiology* 1952, vol. 117, no. 4, p. 500–544.

Tento článek uzavíral sérii článků o toku elektricky nabitých částic přes membránu axonu a dal jim matematický tvar. Představuje jeden z největších úspěchů matematické biologie. Teorie byla totiž ověřena na nejdelším známém axonu, axonu krakatice obrovské (*Architeuthis dux*). Za tuto práci byli Hodgkin a Huxley spolu s J. C. Ecclesem v roce 1963 oceněni Nobelovou cenou.

Ještě poznamenejme, že Huxley řešil soustavu parciální diferenciální rovnice a tří obyčejných diferenciálních rovnic ručně s pomocí mechanické kalkulačky; výpočet jednoho akčního potenciálu trval tři týdny.

a tím i reakční člen hledané rovnice.

Z experimentů bylo déle patrné, že při konstantním membránovém napětí  $V$  se hustota iontových kanálků ustálí na nějaké rovnovážné hodnotě, konkrétně

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t, V) = m_\infty(V), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t, V) = h_\infty(V), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} n(t, V) = n_\infty(V).$$

Pro funkce  $m_\infty$ ,  $h_\infty$  a  $n_\infty$  platí

$$\begin{aligned} \frac{dm_\infty(V)}{dV} &> \frac{dh_\infty(V)}{dV}, \quad \frac{dn_\infty(V)}{dV} > 0, \\ \lim_{V \rightarrow -\infty} m_\infty(V) &= \lim_{V \rightarrow \infty} h_\infty(V) = \lim_{V \rightarrow -\infty} n_\infty(V) = 0, \\ \lim_{V \rightarrow \infty} m_\infty(V) &= \lim_{V \rightarrow -\infty} h_\infty(V) = \lim_{V \rightarrow \infty} n_\infty(V) = 1. \end{aligned}$$

Budeme předpokládat, že hodnoty funkcí  $m$ ,  $h$ ,  $n$  se ke svým rovnovážným hodnotám přibližují exponenciálně. Jinak řečeno, vývoj hustoty iontových kanálků je popsán obyčejnými lineárními rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \alpha_m(V)(m_\infty(V) - m), \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(V)(h_\infty(V) - h), \\ \frac{dn}{dt} &= \alpha_n(V)(n_\infty(V) - n). \end{aligned}$$

Nyní stačí přidat difúzní člen a dostaneme slavné Hodgkinovy-Huxleyho rovnice, což je systém jedné parciální diferenciální rovnice a tří obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} C \frac{\partial V}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - g_{\text{Na}} m^3 h (V - V_{\text{Na}}) - g_{\text{K}} n^4 (V - V_{\text{K}}) - g_{\text{L}} (V - V_{\text{L}}) + I_a, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_m(V)(m_\infty(V) - m), \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(V)(h_\infty(V) - h), \quad t > 0, \\ \frac{dn}{dt} &= \alpha_n(V)(n_\infty(V) - n). \end{aligned} \tag{6.1}$$

### 6.1.1 Redukce modelu

Veličiny  $C$  a  $\alpha_m(V)$  jsou řádově menší než veličiny  $\alpha_h(V)$  a  $\alpha_n(V)$ , tj. změny veličin  $V$  a  $m$  jsou rychlejší než změny veličin  $h$  a  $n$ . Jinak řečeno, veličiny  $h$  a  $n$  můžeme považovat za konstantní parametry modelu. Soustava rovnice (6.1) se tak redukuje na rovnice dvě,

$$\begin{aligned} C \frac{\partial V}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \gamma_1 m^3 (V - V_{\text{Na}}) - \gamma_2 V + \gamma_3 + I_a, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_m (m_\infty(V) - m), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{6.2}$$

kde  $\gamma_1 = g_{\text{Na}} h$ ,  $\gamma_2 = g_{\text{K}} n^4 - g_{\text{L}}$ ,  $\gamma_3 = g_{\text{K}} n^4 V_{\text{K}} + g_{\text{L}} V_{\text{L}}$ . Tento model obsahuje dvě stavové proměnné – napětí  $V$  a hustotu aktivních kanálků pro sodíkové ionty  $m$ . Přitom proměnná  $V$  se mění rychleji než proměnná  $m$ .

Na základě těchto úvah lze sestavit abstraktnější, ale jednodušší model, obsahující pouze dvě stavové proměnné: rychlou proměnnou  $v$  vyjadřující excitaci (lze si ji představit jako membránové

napětí) a pomalou proměnnou  $w$  vyjadřující obnovu (lze si ji představit jako vodivost membrány pro sodíkové ionty). Tento model sestává z jedné parciální a jedné obyčejné diferenciální rovnice

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v, w), \quad \frac{dw}{dt} = g(v, w).$$

Tyto rovnice se nazývají zobecněné FitzHughovy-Nagumovy.

Rychlost  $g$  obnovy aktivačních kanálků roste s růstem napětí, při jejich větší hustotě se naopak zmenšuje. Nejjednodušší tvar takové funkce je

$$g(v, w) = v - bw$$

Tok iontů přes membránu roste s klesajícím napětím, tj. s napětím v absolutní hodnotě rostoucím (připomeňme si, že membránové napětí je v polarizovaném stavu záporné) a také klesá s poklesem hustoty aktivačních kanálků. Navíc, pokud je membránové napětí vyšší než jistá excitační hodnota, tok iontů se zvětší. Reakční člen  $f$  tedy můžeme vyjádřit ve tvaru po částech lineární funkce

$$f(v, w) = c + \begin{cases} -v - w, & v < a \\ 1 - v - w, & v > a. \end{cases}$$

Popsanou závislost můžeme také vyjádřit pomocí kubického polynomu, tj. spojitě diferencovatelné funkce

$$f(v, w) = v(v - a)(1 - v) - w + c.$$

(Nakreslete si obrázek pro  $0 < a \ll 1$ .)

Tradiční tvar zobecněných FitzHughových-Nagumových rovnic tedy je

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} &= \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v(v - a)(1 - v) - w + c, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{dw}{dt} &= v - bw, & t > 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Tyto rovnice již nelze považovat za model konkrétního procesu – vedení vzruchu v neuronu. Jeho parametry  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  nemají jasnou interpretaci, tvar funkce  $f$  vyjadřuje závislost proudu na napětí a hustotě aktivačních kanálků pouze kvalitativně, totéž lze říci o závislosti  $g$  rychlosti obnovy kanálků na těchto veličinách. Ale v této abstraktnosti je i jejich síla – rovnice (6.3) slouží jako základ modelování excitabilních systémů nejen v neurobiologii, ale i v mnoha jiných oblastech.

### 6.1.2 Excitace „bodového neuronu“

Provedeme další krok abstrakce: neuron si nebudeme představovat jako axon (dlouhý útvar), ale jako bezrozměrný objekt, který však má jakousi „hranici“ (membránu), „vnitřek“ a „vnějšek“. Napětí na membráně v takovém případě nezávisí na žádné prostorové proměnné, ale pouze na čase,  $V = V(t)$ . Takový abstraktní neuron je je základem neuronových sítí (vrcholem v grafu).

Hodgkinovy-Huxleyho rovnice (6.2) se zjednoduší na dvě, obecně nelineární, obyčejné diferenciální rovnice

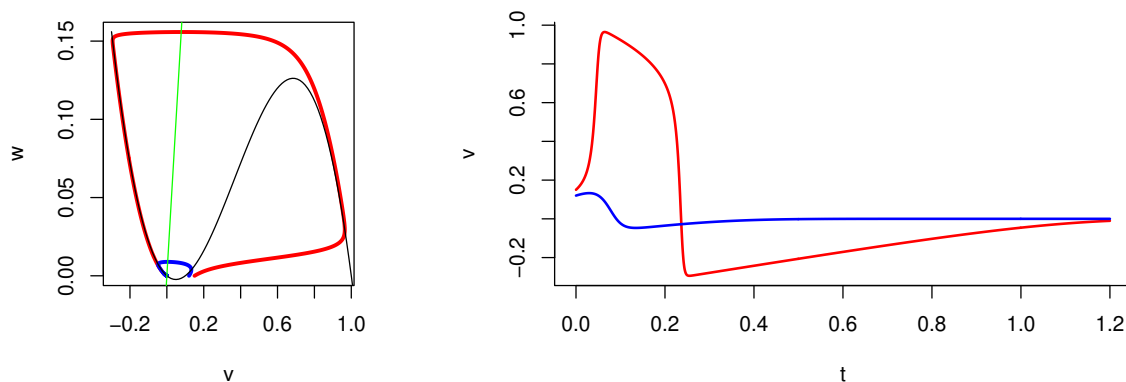
$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dv}{dt} &= I_a - \gamma_1 m^3 (V - V_{Na}) - \gamma_2 V + \gamma_3, \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_m (m_\infty(V) - m). \end{aligned}$$

Zobecněné FitzHughovy-Nagumovy rovnice (6.3) v prostorově nezávislém tvaru jsou systémem nelineární a lineární obyčejné diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dv}{dt} &= v(v - a)(1 - v) - w + c, \\ \frac{dw}{dt} &= v - bw. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Systém (6.4) představuje původní FitzHughovy-Nagumovy rovnice<sup>2</sup>. Dvě numerická řešení systému (6.4) pro stejné hodnoty parametrů, ale pro různé počáteční podmínky jsou na Obrázku 6.2. Můžeme na něm vidět, že první složka  $v$  řešení obyčejných FitzHughových-Nagumových rovnic (tedy potenciál na membráně neuronu) má všechny kvalitativní vlastnosti pozorované u skutečného neuronu: při malé depolarizaci se polarita vrátí do klidového stavu. Při větším počátečním stimulu napětí na membráně prudce vzroste, nějakou dobu zůstane v excitovaném stavu, posléze klesne na nižší než klidovou hodnotu a postupně se na klidové hodnotě ustálí. Rozdíl počátečních stimulů pro tato dvě kvalitativně odlišná řešení přitom nemusí být nijak velký.

Systém autonomních rovnic (6.4) lze považovat za matematický model fyzikálního modelu (6.1) excitace neuronu a vedení vzruchu v něm.



Obrázek 6.2: Numerické řešení obyčejných FitzHughových-Nagumových rovnic (6.4) s parametry  $\varepsilon = 0,003$ ,  $a = 0,1$ ,  $b = 0,5$  a  $c = 0$ . Počáteční podmínky jsou  $v(0) = 0,12$ ,  $w(0) = 0$  (modré křivky) a  $v(0) = 0,15$ ,  $w(0) = 0$  (červené křivky).

Vlevo trajektorie a nulkliny (černá křivka –  $v$ -nulklina, zelená křivka –  $w$ -nulklina), vpravo časový průběh napětí  $v$ .

<sup>2</sup>R. FITZHUGH: Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane, *Biophysical Journal* 1961, vol. 1, no. 6, p. 445–466.

J. NAGUMO, S. ARIMOTO, S. YOSHIKAWA: An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon, *Proceedings of the IRE* 1962, vol. 50, no. 10, p.2061–2070.



# Příloha A

## Distribuce

### A.1 Základní pojmy

Nechť  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce  $n$  proměnných definovaná na celém prostoru  $\mathbb{R}^n$ . *Nosič funkce*  $\varphi$  definujeme jako uzávěr množiny  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}$  a značíme ho  $\text{Supp } \varphi$ .

#### Testovací funkce

Symbolem  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  označíme množinu funkcí definovaných na  $\mathbb{R}^n$ , které jsou třídy  $C^\infty$  (mají spojité všechny parciální derivace libovolného řádu) a jejichž nosič je množina  $A$  kompaktní v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Množina funkcí  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  s obvykle definovaným sčítáním funkcí a násobením číslem, tj.  $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$  a  $(c\varphi)(x) = c\varphi(x)$ , je vektorovým prostorem. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme prostor  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  značit stručně  $\mathcal{D}$ .

Na množině  $\mathcal{D}$  definujeme metriku  $\rho$  vztahem

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} (\varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})) \right| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, (i_1, i_2, \dots, i_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \right\}.$$

Množinu  $\mathcal{D}$  s touto metrikou nazýváme *prostor testovacích funkcí*, jeho prvky nazýváme *testovací funkce*.

#### Příklady testovacích funkcí.

Položme

$$\lambda(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Funkce  $\lambda$  má spojité derivace všech řádů, neboť

$$\frac{d^k}{dx^k} e^{-1/x^2} = \frac{\text{polynom v } x}{\text{polynom v } x} e^{-1/x^2} \quad \text{a z toho plyne} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{d^k}{dx^k} e^{-1/x^2} = 0.$$

Funkce  $\varphi$  definovaná vztahem  $\varphi(x) = \lambda(x)\lambda(1-x)$  má kompaktní nosič  $[0, 1]$  a má derivace všech řádů.

Pro libovolné reálné  $c > 0$  položme

$$\kappa_c(x) = \frac{\lambda(x)}{\lambda(x) + \lambda(c-x)}. \tag{A.1}$$

Pak  $\kappa_c$  je neklesající nezáporná funkce, která má derivace všech řádů a platí pro ni

$$\kappa_c(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > c. \end{cases}$$

Funkce  $\kappa_c$  tedy na intervalu délky  $c$  vyhlazuje skok funkčních hodnot.

Funkce  $\psi$  definovaná vztahem

$$\psi(x) = 1 - \kappa_c(|x| - \frac{1}{2})$$

je nezáporná funkce, která má derivace všech řádů a

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{1}{2} + c, \\ 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

a tedy má kompaktní nosič  $[-\frac{1}{2} - c, \frac{1}{2} + c]$ .

Funkce  $\varphi, \psi$  jsou typické testovací funkce z prostoru  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Testovací funkce z prostoru  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  můžeme získat jako součin funkcí „jednorozměrných“, např.

$$\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1)\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n), \quad \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_1)\psi(x_2) \cdots \psi(x_n).$$

### Operace v prostoru testovacích funkcí

Kromě standardních operací součtu a součinu funkcí a násobení funkce číslem zavádíme operace:

- *Posunutí (translace)* testovací funkce o vektor  $\mathbf{y}$  je definována vztahem  $\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ .
- *Změna měřítka (přeškálování)* nezávisle proměnné faktorem  $\alpha > 0$  je definováno vztahem  $\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) = \varphi(\alpha\mathbf{x})$ .

Pomocí těchto operací můžeme snadno vytvářet další testovací funkce ze známých.

### Lineární funkcionál

Zobrazení  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , pro které platí

$$T(\varphi + \psi) = T(\varphi) + T(\psi), \quad T(c\varphi) = cT(\varphi), \quad c \in \mathbb{R}$$

nazýváme *lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí*. Obraz funkce  $\varphi$  při zobrazení  $T$ , tj. číslo  $T(\varphi)$ , budeme stručně značit  $T\varphi$ .

Množinu všech lineárních funkcionálů  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , která je zase vektorovým prostorem, nazýváme (*algebraický*) *duální prostor k  $\mathcal{D}$*  a značíme ji  $\mathcal{D}'$ .

### Definice distribuce

Spojité lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí se nazývá *distribuce*.

Podrobněji: Zobrazení  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme distribuce, jestliže

$$(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}) \quad T(\varphi + \psi) = T\varphi + T\psi,$$

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}) (\forall c \in \mathbb{R}) \quad T(c\varphi) = cT\varphi,$$

$$(\forall \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}) (\forall \varphi \in \mathcal{D}) \quad \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ v prostoru } (\mathcal{D}, \rho) \Rightarrow T\varphi_n \rightarrow T\varphi \text{ v } \mathbb{R} \text{ s přirozenou metrikou.}$$

Množinu všech lineárních funkcionálů  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme *topologický duální prostor k  $\mathcal{D}$*  a značíme ji  $\mathcal{D}^*$ .

### Příklady distribucí

1. Nechť  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce taková, že pro každou kompaktní množinu  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  existuje konečný integrál  $\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$  (tzv. *lokálně integrabilní funkce na  $\mathbb{R}^n$* ). Definujme distribuci  $T_f \in \mathcal{D}^*$  vztahem

$$T_f\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (\text{A.2})$$

Distribuce  $T \in \mathcal{D}^*$  taková, že existuje lokálně integrabilní funkce  $f$  pro niž

$$T\varphi = \int_{-\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

pro všechny  $\varphi \in \mathcal{D}$ , se nazývá *regulární distribuce*. Distribuce, která není regulární, se někdy nazývá *singulární*.

Každá lokálně integrabilní funkce určuje distribuci, můžeme tedy lokálně integrabilní funkce považovat za distribuce<sup>1</sup>. Z tohoto důvodu se distribuce někdy nazývají *zobecněné funkce*.

2. Funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  je lokálně integrabilní na otevřeném intervalu  $(0, \infty)$ , ale není lokálně integrabilní na celém  $\mathbb{R}$ . Avšak pro všechna  $a, b, a < 0 < b$  je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^b \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \ln \frac{\varepsilon}{|a|} + \ln \frac{b}{\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{b}{|a|} = \ln \frac{b}{|a|}.$$

Tuto limitu označíme vp  $\int_a^b \frac{dx}{x}$  a nazveme *integrál ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty*.

Tuto úvahu zobecníme. Nechť funkce  $f$  je lokálně integrabilní na  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ . Položme

$$B_{\mathbf{x}_0}^r = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r\}$$

(otevřená koule se středem  $\mathbf{x}_0$  a poloměrem  $r$ ). Integrál z funkce  $f$  ve smyslu hlavní hodnoty definujeme jako

$$\text{vp} \int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{K \setminus B_{\mathbf{x}_0}^\varepsilon} f(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

pokud limita na pravé straně existuje.

Má-li funkce  $f$  pro každou kompaktní množinu  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  integrál ve smyslu hlavní hodnoty, pak zobrazení  $T_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  definované vztahem

$$T_f \varphi = \text{vp} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{A.3}$$

je distribucí.

3. *Diracova distribuce*  $\delta$  přiřadí každé testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  hodnotu  $\varphi(0)$ . Diracova distribuce není regulární.

Výrazy na pravých stranách rovností (A.2) a (A.3) formálně připomínají skalární součin. Proto hodnoty těchto distribucí zapisujeme ve tvaru

$$\langle f(\mathbf{x}) | \varphi(\mathbf{x}) \rangle, \text{ nebo stručně } \langle f | \varphi \rangle$$

Přestože Diracova distribuce není regulární ani není definována pomocí nějaké (klasické) funkce, používáme pro ni zápis

$$\langle \delta | \varphi \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}) | \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \varphi(0).$$

<sup>1</sup>Povšimněme si, že dvě různé funkce mohou určovat tutéž distribuci; konkrétně jde o funkce, které se od sebe liší na množině nulové míry. Funkce  $f$  a  $g$  takové, že  $\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_K g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$  pro každou kompaktní  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  jsou pro určení regulární distribuce ekvivalentní. Přesněji bychom tedy měli říkat, že ztotožňujeme distribuce a třídy ekvivalentních funkcí.



Podobným způsobem budeme zapisovat jakékoliv distribuce. V Diracově terminologii je tedy distribuce bravenektorem a testovací funkce ketvektorem. Diracovu distribuci  $\langle \delta$  budeme jednoduše psát jako  $\delta$ , případně  $\delta(\mathbf{x})$  pro zdůraznění nezávisle proměnné testovacích funkcí.

Symbolem  $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  označme množinu lokálně integrovatelných funkcí na  $\mathbb{R}^n$  (přesněji, množinu tříd ekvivalentních lokálně integrabilních funkcí). Testovací funkce jakožto spojité funkce jsou lokálně integrabilní. Určují tedy regulární distribuce. Platí tedy

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

### Nosič distribuce

Řekneme, že distribuce  $T \in \mathcal{D}'$  je na množině  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  nulová, jestliže  $T\varphi = 0$  pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  takovou, že  $\text{Supp } \varphi \subseteq A$ .

Nosič distribuce  $T$  je nejmenší (vzhledem k množinové inklusi) uzavřená množina taková, že na jejím komplementu je  $T$  nulová. Nosič distribuce  $T$  označíme  $\text{Supp } T$ .

Nosič Diracovy distribuce je jednoprvková množina  $\{0\}$ .

### Základní operace v prostoru distribucí

- Součet distribucí  $T, S \in \mathcal{D}'$ :  
 $T + S \in \mathcal{D}'$  je distribuce, která splňuje rovnost

$$(T + S)\varphi = T\varphi + S\varphi$$

pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

- Násobení distribuce  $T \in \mathcal{D}'$  funkcí  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  třídy  $C^\infty$ :  
 Je-li  $\varphi \in \mathcal{D}$  testovací funkce, pak  $\varphi$  má kompaktní nosič. To znamená, že také funkce  $a\varphi$  má kompaktní nosič, tedy  $a\varphi \in \mathcal{D}$ .  
 $aT \in \mathcal{D}'$  je distribuce, která splňuje rovnost

$$(aT)\varphi = T(a\varphi)$$

pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

- Posunutí (translace) distribuce  $T \in \mathcal{D}'$  o vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ :  
 $\mathbf{y}T \in \mathcal{D}'$  je distribuce, která splňuje rovnost

$$\mathbf{y}T\varphi = T\varphi_{\mathbf{y}}$$

pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Pro regulární distribuci určenou funkcí  $f$  platí

$$(\mathbf{y}T_f)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z} - \mathbf{y})\varphi(\mathbf{z})d\mathbf{z};$$

v integrálu jsme použili substituci  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ .

S pomocí Diracovy symboliky můžeme definice operací s distribucemi zapsat ve tvaru:

- Součet:  $\langle f + g | \varphi \rangle = \langle f | \varphi \rangle = \langle f | \varphi \rangle + \langle g | \varphi \rangle$
- Násobek funkcí:  $\langle af | \varphi \rangle = \langle f | a\varphi \rangle$
- Translace:  $\langle f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) | \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \langle f(\mathbf{x}) | \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle$

Zejména pro Diracovu distribuci platí

$$\langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mid \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}) \mid \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle = \varphi(\mathbf{y}), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y});$$

$$\langle \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mid \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{z}) \varphi(\mathbf{y} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{y}).$$

Translace Diracovy distribuce o vektor  $\mathbf{y}$ , tedy distribuce zapisovaná jako  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  se nazývá *Diracova distribuce soustředěná v bodě  $\mathbf{y}$* . Přitom platí

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Konvergence v prostoru distribucí

Řekneme, že posloupnost distribucí  $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}^*$  konverguje pro  $k \rightarrow \infty$  k distribuci  $T \in \mathcal{D}^*$  a píšeme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

jestliže pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  je  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k \varphi = T \varphi$  (v tomto případě jde o konvergenci číselných posloupností).

Definici lze zapsat také v Diracově symbolice: Řekneme, že posloupnost distribucí  $\{\langle f_k \rangle_{k=1}^{\infty}$  konverguje pro  $k \rightarrow \infty$  k distribuci  $\langle f \rangle$  a píšeme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k \rangle = \langle f \rangle$ , jestliže pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}^*$  je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k \mid \varphi \rangle = \langle f \mid \varphi \rangle$ .

Pro konvergenci v prostoru distribucí platí následující věty:

**Věta 1:** Necht'  $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}^*$  je posloupnost distribucí taková, že pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  existuje limita posloupnosti čísel  $\{T_k \varphi\}_{k=1}^{\infty}$ . Definujme zobrazení  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  předpisem

$$T(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k \varphi.$$

Pak  $T$  je distribuce,  $T \in \mathcal{D}^*$ .

Linearita plyne z linearity každé z distribucí  $T_k$  a z linearity operátoru limity posloupností), spojitost je dokázána např. v knize: LAURENT SCHWARTZ. *Théorie des distributions*, Paris 1973.

**Věta 2:** Ke každé distribuci  $T \in \mathcal{D}^*$  existuje posloupnost testovacích funkcí  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}$ , že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi_k \rangle = T, \quad \text{neboli } (\forall \varphi \in \mathcal{D}) \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi_k \mid \varphi \rangle = T \varphi.$$

tj. že tato posloupnost testovacích funkcí konverguje k  $T$  ve smyslu distribucí.

Každou distribuci lze aproximovat pomocí posloupnosti testovacích funkcí.

### A.2.1 $\delta$ -vytvorující posloupnosti

Necht'  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  je posloupnost lokálně integrabilních funkcí na  $\mathbb{R}^n$  takových, že posloupnost regulárních distribucí  $\{T_{f_k}\}_{k=1}^{\infty}$  konverguje k Diracově distribuci, tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k \mid \varphi \rangle = \varphi(0)$$

pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Pak posloupnost  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  se nazývá  *$\delta$ -vytvorující posloupnost*, funkce  $f_k$  se nazývají *impulsní funkce*.

### Příklady $\delta$ -vytvorujících posloupností:

Následující posloupnosti funkcí konvergují k Diracově distribuci na prostoru  $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ .

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & |x| \leq \frac{1}{2k}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2k}, \end{cases} \quad f_k(x) = \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \leq \frac{1}{k}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{k}, \end{cases}$$

$$f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-kx^2/2}, \quad f_k(x) = \frac{\sin kx}{\pi x},$$

$f_k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha_k}{x^2 + \alpha_k^2}$ , kde  $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$  je libovolná posloupnost kladných čísel taková, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ ,

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{m=1}^k \cos \frac{2\pi m}{\ell} x, & |x| \leq \frac{1}{2}\ell, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}\ell. \end{cases}$$

Na obrázcích A.1 je znázorněno několik prvních členů některých  $\delta$ -vytvorujících posloupností.

## A.3 Derivování distribucí

Nechť  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je diferencovatelná (a tedy lokálně integrabilní) funkce,  $\varphi \in \mathcal{D}$  je testovací funkce. Pak platí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( [f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})]_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n = - \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

poněvadž  $\text{Supp } \varphi$  je kompaktní.

Provedený výpočet motivuje následující definici.

### Definice derivace distribuce

Parciální derivace distribuce  $T \in \mathcal{D}^*$  podle první proměnné je distribuce  $\frac{\partial}{\partial x_1} T$ , pro niž platí

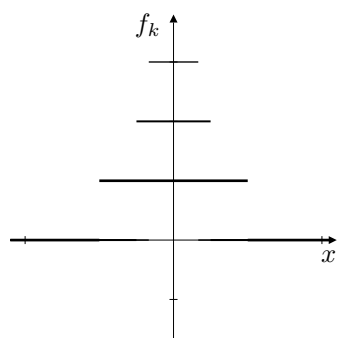
$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} T \right) \varphi = -T \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)$$

pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

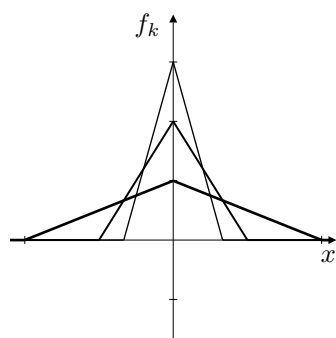
Obecně definujeme parciální derivace distribuce podle libovolných proměnných libovolného řádu rovností

$$\left( \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} T \right) \varphi = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} T \left( \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} \varphi \right)$$

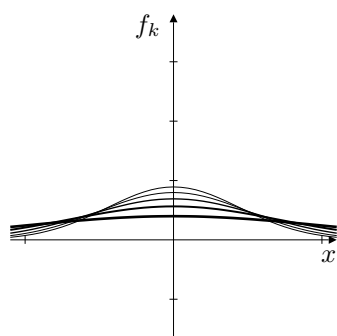
pro každou testovací funkci  $\varphi$  a každý multiindex  $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ . Je zřejmé, že parciální derivace distribuce je lineární operátor na prostoru distribucí  $\mathcal{D}^*$ .



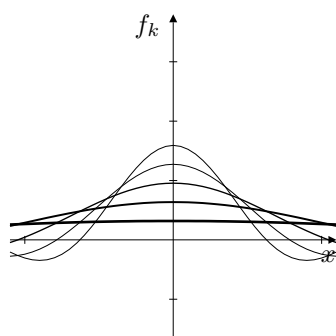
$$f_k(x) = \begin{cases} k, & |x| \leq 1/(2k) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



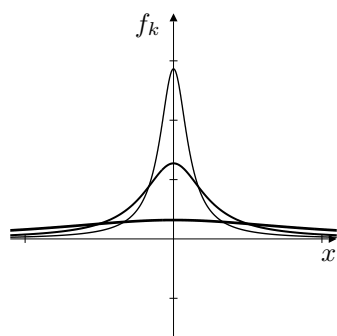
$$f_k(x) = \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \leq 1/k \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



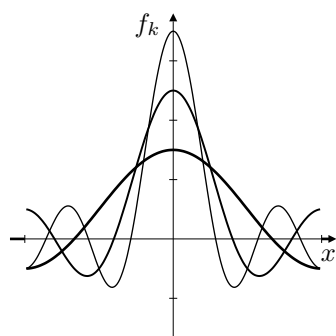
$$f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}kx^2}$$



$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{\pi x}$$



$$f_k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{k^2}{k^4x^2 + 1}$$



$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\pi x, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Obrázek A.1: Příklady  $\delta$ -vytvóřujících posloupností na prostoru  $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ . S rostoucím  $k$  se zmenšuje síla čáry.

Každá distribuce má derivace libovolného řádu.

Každá lokálně integrabilní funkce  $f$  určuje regulární distribuci. Tato distribuce má derivaci libovolného řádu definovanou rovností

$$\left\langle \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} \middle| \varphi \right\rangle = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} \left\langle f \middle| \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} \varphi \right\rangle$$

V tomto smyslu lze říci, že každá lokálně integrabilní funkce  $f$  má derivaci libovolného řádu. Tato distribuce však obecně není funkcí ale distribucí. Nazýváme ji *distributivní derivací funkce  $f$* .

### Příklady distributivních derivací funkcí

- **Derivace absolutní hodnoty:**

Pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  platí

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} |x| \middle| \varphi(x) \right\rangle &= - \langle |x| \middle| \varphi'(x) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx = [x\varphi(x)]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx - [x\varphi(x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

tedy  $\frac{\partial}{\partial x} |x| = \operatorname{sgn} x$  ve smyslu distribucí.

- **Heavisidova skoková funkce (distribuce):**

Funkce  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná vztahem

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

je lokálně integrabilní. Určuje tedy regulární distribuci, pro niž platí

$$\langle H \middle| \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Povšimněme si, že Heavisidova funkce je limitou funkcí  $\kappa_{1/k}$  definovaných vztahem (A.1); tuto limitu můžeme chápat tak, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} \kappa_{1/k}(x) = H(x)$  pro každé  $x \neq 0$ , nebo, při použití Diracovy symboliky, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \kappa_{1/k} \rangle = \langle H \rangle$  ve smyslu distribucí. Dále platí

$$\langle H' \middle| \varphi \rangle = - \langle H \middle| \varphi' \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = - [\varphi(x)]_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta \middle| \varphi \rangle,$$

tedy distributivní derivací Heavisidovy funkce  $H$  je Diracova distribuce,  $H' = \delta$ , podrobněji  $H'(x) = \delta(x)$ . Analogicky lze ukázat, že  $H'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$  a  $H'(x_0 - x) = -\delta(x - x_0)$ .

Obecně: Funkce  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná vztahem

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

určuje regulární distribuci:

$$\begin{aligned}\langle H | \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H(x_1, x_2, \dots, x_n) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Z výpočtu } \left\langle \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} H \middle| \varphi \right\rangle &= \\ &= (-1)^n \left\langle H \middle| \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \varphi \right\rangle = \\ &= (-1)^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \\ &= (-1)^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2 \partial x_3 \cdots \partial x_n} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \right]_{x_1=0}^{\infty} dx_2 dx_3 \cdots dx_n = \\ &= -(-1)^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2 \partial x_3 \cdots \partial x_n} \varphi(0, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \cdots dx_n = \cdots = \\ &= (-1)^{2n} \varphi(0, 0, \dots, 0) = \varphi(0, 0, \dots, 0),\end{aligned}$$

nyň plyne, že distributivní derivace  $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} H$  určuje Diracovu distribuci na prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

### Distributivní derivace funkcí jedné proměnné

Nechť funkce  $f$  je spojitá na každém z intervalů  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \infty)$  a existuje

$$\sigma_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Pak je tato funkce lokálně integrabilní na  $\mathbb{R}$ , určuje tedy regulární distribuci  $T_f$ . Pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  platí

$$\begin{aligned}T'_f \varphi &= -\langle f(x) | \varphi'(x) \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^0 f(x) \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \\ &= -[f(x) \varphi(x)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 f'(x) \varphi(x) dx - [f(x) \varphi(x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \\ &= \varphi(0) \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \\ &= \sigma_0 \varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \sigma_0 \langle \delta | \varphi \rangle + \langle f' | \varphi \rangle = \sigma_0 \langle \delta | \varphi \rangle + T_{f'} \varphi,\end{aligned}$$

tj.

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}) \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f \middle| \varphi \right\rangle = \sigma_0 \langle \delta \middle| \varphi \rangle + \langle f' \middle| \varphi \rangle, \quad \text{symbolicky } T'_f = \sigma_0 \delta + T_{f'}.$$

Obecně: Necht' funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je třídy  $C^\infty$  na každém z intervalů  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \infty)$  a necht' každá její derivace je lokálně integrabilní. Tato funkce určuje regulární distribuci  $T_f$ .

Označme

$$\sigma_m = \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(m)}(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f^{(m)}(x) \quad \text{a} \quad T'_f = \frac{\partial}{\partial x} T, \quad T''_f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T \quad \dots, \quad T_f^{(k)} = \frac{\partial^k}{\partial x^k} T.$$

Pak pro každou testovací funkci  $\varphi \in \mathcal{D}$  platí

$$\left\langle \frac{\partial^k}{\partial x^k} f \middle| \varphi \right\rangle = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-m-1} \sigma_m \langle \delta \middle| \varphi^{(k-m-1)} \rangle + \langle f^{(k)} \middle| \varphi \rangle,$$

tj.

$$T_f^{(k)} \varphi = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-m-1} \sigma_m \varphi^{(k-m-1)}(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) \varphi(x) dx.$$

Symbolicky

$$T_f^{(k)} = \sum_{m=0}^{k-1} \sigma_m \delta^{(k-m-1)} + T_{f^{(k)}}.$$

## Cvičení

- 1) Vypočítejte druhou distributivní derivaci funkce  $f(x) = |x|$ .
- 2) Necht'  $H$  je Heavisidova funkce a položme  $x_+ = xH(x)$ ,  $x_- = -xH(-x)$ . Vypočítejte distributivní derivace těchto funkcí.
- 3) Určete distribuci  $x^n \delta^{(n)}(x)$

**Výsledky:** 1)  $2\delta(x)$  2)  $x'_+ = H(x)$ ,  $x'_- = -H(-x)$  3)  $(-1)^n n! \delta(x)$

## Příloha B

# Integrální transformace

### B.1 Fourierova transformace a konvoluce

O všech funkcích nezávisle proměnné  $x$ , které se v tomto oddíle vyskytnou, budeme předpokládat, že jsou definovány na celé množině  $\mathbb{R}$ , mají po částech spojitou derivaci a konvergují dostatečně rychle k nule pro  $|x| \rightarrow \infty$ . „Dostatečně rychlou konvergencí“ budeme rozumět, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Fourierova transformace  $\mathcal{F}$  převádí reálnou funkci  $f$  jedné reálné proměnné na komplexní funkci  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  jedné reálné proměnné definovanou vztahem

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Obraz funkce  $f$  při Fourierově transformaci (Fourierův obraz funkce) můžeme také vyjádřit jako součet reálné a imaginární části,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x\xi dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x\xi dx.$$

*Poznámka 1.* Fourierův obraz funkce  $f$  bývá v (technických) aplikacích nazýván *spektrum (signálu)*  $f$ , někdy také *spektrální funkce* nebo *spektrální hustota*.

Z linearity integrálu plyne, že Fourierova transformace je lineární, tj.

$$\mathcal{F}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(\xi) = c_1 \hat{f}_1(\xi) + c_2 \hat{f}_2(\xi).$$

#### Příklady:

- Najdeme Fourierův obraz funkce  $f$  dané předpisem  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ , kde  $\alpha > 0$ .

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(\alpha-i\xi)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(\alpha+i\xi)} dx = \int_0^{\infty} e^{-x(\alpha-i\xi)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(\alpha+i\xi)} dx = \\ &= \left[ -\frac{e^{-x(\alpha-i\xi)}}{\alpha-i\xi} - \frac{e^{-x(\alpha+i\xi)}}{\alpha+i\xi} \right]_{x=0}^{\infty} = \left[ -\frac{e^{-x\alpha}(\cos x\xi + i \sin x\xi)}{\alpha-i\xi} - \frac{e^{-x\alpha}(\cos x\xi - i \sin x\xi)}{\alpha+i\xi} \right]_{x=0}^{\infty} = \\ &= \frac{1}{\alpha-i\xi} + \frac{1}{\alpha+i\xi} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}. \end{aligned}$$



- Najdeme Fourierův obraz funkce  $f$  dané předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & |x| < \beta, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{kde } \beta > 0.$$

Při výpočtu využijeme skutečnosti, že funkce  $\cos$  je sudá a funkce  $\sin$  je lichá. Dostaneme

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx = \alpha \int_{-\beta}^{\beta} (\cos x\xi + i \sin x\xi) dx = 2\alpha \int_0^{\beta} \cos x\xi dx = 2\alpha \left[ \frac{\sin x\xi}{\xi} \right]_{x=0}^{\beta} = 2\alpha \frac{\sin \beta\xi}{\xi}.$$

■

Pro Fourierův obraz derivace funkce  $f$  dostaneme integrací per partes a s využitím vlastnosti  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  vztah

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\xi} dx = [f(x)e^{-ix\xi}]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi)e^{-ix\xi} dx = \\ &= i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx = i\xi \mathcal{F}(f)(\xi), \end{aligned}$$

tj.

$$\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi). \quad (\text{B.1})$$

Fourierova transformace převádí infinitesimální operaci, derivaci funkce, na operaci aritmetickou, na násobení.

Fourierova transformace není prostá – dvě funkce, které se liší na množině míry nula mají stejný Fourierův obraz. Pokud však ztotožníme funkce, lišící se na množině míry nula, tj. provedeme rozklad uvažované třídy funkcí podle ekvivalence

$$f \equiv g \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx = 0,$$

můžeme na těchto třídách ekvivalence považovat Fourierovu transformaci za prostou a v tomto smyslu mluvit o transformaci inverzní. *Inverzní Fourierova transformace*  $\mathcal{F}^{-1}$  převádí komplexní funkci  $\hat{f}$  zpět na reálnou funkci  $f$  na celém oboru  $\mathbb{R}$ ; funkce  $f$  je dána vztahem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi; \quad (\text{B.2})$$

nevlastní integrál na pravé straně přitom chápeme ve smyslu hlavní hodnoty.

### Příklad:

Najdeme vzor funkce

$$\hat{f}(\xi) = 2\alpha \frac{\sin \beta\xi}{\xi},$$

jinak řečeno, najdeme funkci  $f$  jejíž spektrum je  $\hat{f}$ .

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-\ell}^{\ell} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi = \frac{\alpha}{\pi} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sin \beta\xi}{\xi} (\cos x\xi + i \sin x\xi) d\xi.$$

Imaginární část integrálu se rovná nule, neboť integrovaná funkce je lichá. V reálné části integrujeme sudou funkci, počítáme tedy integrál

$$2 \int_0^{\ell} \frac{\sin \beta \xi}{\xi} \cos x \xi d\xi = \int_0^{\ell} \frac{1}{\xi} (\sin(\beta + x)\xi + \sin(\beta - x)\xi) d\xi.$$

Tento integrál rozdělíme na součet dvou. V prvním z nich substitucí  $(\beta + x)\xi = s$  dostaneme

$$\int_0^{\ell} \frac{\sin(\beta + x)\xi}{\xi} d\xi = \int_0^{(\beta+x)\ell} \frac{\sin s}{s} ds = \text{Si}(\beta + x)\ell,$$

kde Si označuje funkci integrálsinus<sup>1</sup>. Podobně najdeme

$$\int_0^{\ell} \frac{\sin(\beta - x)\xi}{\xi} d\xi = \text{Si}(\beta - x)\ell.$$

Celkem tedy máme

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \lim_{\ell \rightarrow \infty} (\text{Si}(\beta + x)\ell + \text{Si}(\beta - x)\ell).$$

Pokud je  $-\beta < x < \beta$ , jsou oba výrazy  $\beta + x$  a  $\beta - x$  kladné a tedy

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} (\text{Si}(\beta + x)\ell + \text{Si}(\beta - x)\ell) = 2 \lim_{y \rightarrow \infty} \text{Si}(y) = \pi.$$

Pokud je  $x < -\beta$  nebo  $x > \beta$ , mají výrazy  $\beta + x$  a  $\beta - x$  opačná znaménka a protože je funkce Si lichá, platí

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} (\text{Si}(\beta + x)\ell + \text{Si}(\beta - x)\ell) = \lim_{y \rightarrow \infty} \text{Si}(y) + \lim_{y \rightarrow -\infty} \text{Si}(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Pokud je  $x = -\beta$  nebo  $x = \beta$ , platí

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} (\text{Si}(\beta + x)\ell + \text{Si}(\beta - x)\ell) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \text{Si}(2\beta\ell) = \frac{\pi}{2}.$$

Tyto výpočty ukazují, že

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in (-\beta, \beta), \\ \frac{1}{2}\alpha, & x \in \{-\beta, \beta\}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Porovnáním s předchozím příkladem vidíme, že funkce  $f$  se shoduje s funkcí, která byla „původním“ vzorem funkce  $\hat{f}$ , ve všech bodech spojitosti. V bodech nespojitosti nabývá hodnot, které jsou průměrem limity zprava a zleva. ■

*Poznámka 2.* Vzorce pro Fourierovu transformaci a pro inverzní Fourierovu transformaci jsou poněkud nesymetrické, rušivě působí faktor  $1/(2\pi)$ . Proto v někteřích (teoretičtěji zaměřených) publikacích bývá Fourierova transformace definována vztahem

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

<sup>1</sup>Funkce Si je definována vztahem

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n+1)!}$$

Tato funkce je lichá a splňuje rovnosti  $\text{Si}(0) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Si}(t) = \frac{1}{2}\pi$ .

Inverzní transformace v takovém případě vyjde

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Tyto vzorce se liší jen znaménkem u výrazu  $ix\xi$ .

Konvoluce funkcí  $f, g$  definovaných na  $\mathbb{R}$  je funkce  $f * g$  daná vztahem

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

**Příklad:**

Vypočítáme konvoluci funkcí  $f$  a  $g$  daných předpisem  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ ,  $g(x) = e^{-\beta|x|}$ ; konstanty  $\alpha, \beta$  jsou kladné.

Konvoluce je dána nevlastním integrálem

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|y|} e^{-\beta|x-y|} dy.$$

Pro  $x < 0$  tento integrál upravíme,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|y|} e^{-\beta|x-y|} dy &= \int_{-\infty}^x e^{\alpha y} e^{-\beta(x-y)} dy + \int_x^0 e^{\alpha y} e^{\beta(x-y)} dy + \int_0^{\infty} e^{-\alpha y} e^{\beta(x-y)} dy = \\ &= \frac{e^{-\beta x}}{\alpha + \beta} \left[ e^{(\alpha+\beta)y} \right]_{y=-\infty}^x + \frac{e^{\beta x}}{\alpha - \beta} \left[ e^{(\alpha-\beta)y} \right]_{y=x}^0 - \frac{e^{\beta x}}{\alpha + \beta} \left[ e^{-(\alpha-\beta)y} \right]_{y=0}^{\infty} = \\ &= \frac{e^{-\beta x} e^{(\alpha+\beta)x}}{\alpha + \beta} + \frac{e^{\beta x} (1 - e^{(\alpha-\beta)x})}{\alpha - \beta} + \frac{e^{\beta x}}{\alpha + \beta} = \frac{e^{\alpha x} + e^{\beta x}}{\alpha + \beta} + \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{\alpha - \beta} = \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} e^{\beta x} - \frac{2\beta}{\alpha^2 - \beta^2} e^{\alpha x} = \frac{2}{\alpha^2 - \beta^2} \left( \alpha e^{-\beta|x|} - \beta e^{-\alpha|x|} \right). \end{aligned}$$

Analogicky vypočítáme, že také pro  $x \geq 0$  je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|y|} e^{-\beta|x-y|} dy = \frac{2}{\alpha^2 - \beta^2} \left( \alpha e^{-\beta|x|} - \beta e^{-\alpha|x|} \right).$$

Výrazem na pravé straně této rovnosti je tedy dána hodnota konvoluce funkcí  $f$  a  $g$ . ■

Fourierův obraz konvoluce funkcí  $f, g$  je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) e^{-ix\xi} dy \right) dx = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y) e^{-ix\xi} dx dy. \end{aligned}$$

V tomto dvojném integrálu budeme transformovat proměnné tak, že položíme  $x = z + y$ ,  $y = y$ . Jacobián tohoto zobrazení je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dále  $e^{-ix\xi} = e^{-iy\xi}e^{-iz\xi}$ , tedy

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(y)g(z)e^{-iy\xi}e^{-iz\xi}dzdy = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-iz\xi}dz \right) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

To znamená, že

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}, \quad (\text{B.3})$$

Fourierova transformace převádí konvoluci funkcí na jejich součin.

## B.2 Laplaceova transformace

Bud'  $M$  množina reálných funkcí definovaných na intervalu  $(0, \infty)$  takových, že nevlastní integrál  $\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$  konverguje a  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} = 0$  pro všechna  $p > 0$ .

Laplaceova transformace  $\mathcal{L}$  převádí reálnou funkci  $f \in M$  na reálnou funkci  $\mathcal{L}\{f\}$ , nebo stručněji  $\mathcal{L}f$ , definovanou na intervalu  $(0, \infty)$  vztahem

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Z uvedeného definičního vztahu plyne, že Laplaceův obraz funkce  $f \in M$  je funkcí ohraničenou a že Laplaceova transformace je lineární, tj.

$$\mathcal{L}(c_1f_1 + c_2f_2)(p) = c_1\mathcal{L}f_1(p) + c_2\mathcal{L}f_2(p).$$

Obrazy některých funkcí v Laplaceově transformaci jsou uvedeny v tabulce B.1.

Vypočítáme Laplaceův obraz derivace funkce:

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}dt = [f(t)e^{-pt}]_{t=0}^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = -\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) + p\mathcal{L}f(p).$$

Při označení  $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$  tedy platí

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}f(p) - f(0+). \quad (\text{B.4})$$

Stejně jako v případě Fourierovy transformace lze ukázat, že Laplaceova transformace převádí konvoluci na součin funkcí,  $\mathcal{L}\{f * g\}(p) = \mathcal{L}f(p)\mathcal{L}g(p)$ .

## Cvičení

1. Najděte Fourierův obraz (spektrum) funkce  $f(x) = e^{-cx^2}$ , kde  $c$  je kladná konstanta.
2. Vypočítejte konvoluci funkcí  $f(x) = e^{-ax^2}$ ,  $g(x) = e^{-bx^2}$ , kde  $a, b$  jsou kladné konstanty.

**Výsledky:**

1.  $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \exp\left(-\frac{x^2}{4c}\right)$ ; návod: ukažte, že  $\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = -\frac{\xi}{2c}\hat{f}(\xi)$
2.  $\sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \exp\left(-\frac{ab}{a+b}x^2\right)$

| $f(t)$                               | $\mathcal{L}f(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ | $f(t)$                 | $\mathcal{L}f(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$              |
|--------------------------------------|--|------------------------|---|
| 1                                    | $\frac{1}{p}$                                      | $t \sin \omega t$      | $\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$                          |
| $t$                                  | $\frac{1}{p^2}$                                    | $t \cos \omega t$      | $\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$                     |
| $t^n, n = 1, 2, \dots$               | $\frac{n!}{p^{n+1}}$                               | $e^{at} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}$                           |
| $t^a, a > -1$                        | $\frac{\Gamma(a + 1)}{p^{a+1}}$                    | $e^{at} \cos \omega t$ | $\frac{p - a}{(p - a)^2 + \omega^2}$                            |
| $e^{at}$                             | $\frac{1}{p - a}$                                  | $\sin^2 \omega t$      | $\frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$                          |
| $te^{at}$                            | $\frac{1}{(p - a)^2}$                              | $\cos^2 \omega t$      | $\frac{p^2 + 2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$                    |
| $t^n e^{at}, n = 1, 2, \dots$        | $\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$                         | $\sinh at$             | $\frac{a}{p^2 - a^2}$   |
| $t^\nu e^{at}, \nu > -1$             | $\frac{\Gamma(\nu + 1)}{(p - a)^{\nu+1}}$          | $\cosh at$             | $\frac{p}{p^2 - a^2}$   |
| $\sin \omega t$                      | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$                    | $t \sinh at$           | $\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$                                     |
| $\cos \omega t$                      | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$                         | $t \cosh at$           | $\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$                               |
| $\frac{e^{-a/t}}{\sqrt{t^3}}, a > 0$ | $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ap}}$             | $J_\nu(at), \nu > -1$  | $\frac{(\sqrt{p^2 + a^2} - p^\nu)^\nu}{a^\nu \sqrt{p^2 + a^2}}$ |

Tabulka B.1: „Operátorový slovník“ pro Laplaceovu transformaci

## Příloha C

# Okrajové úlohy pro obyčejné lineární rovnice druhého řádu

### C.1 Formulace úloh

Označme  $C^k(\alpha, \beta)$  množinu funkcí  $k$ -krát diferencovatelných na intervalu  $(\alpha, \beta)$ . O interval  $(\alpha, \beta)$  předpokládáme, že je nedegenerovaný, tj.  $\alpha < \beta$ . Interval  $(\alpha, \beta)$  může být omezený nebo neomezený, tedy  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

#### Diferenciální operátor

Buďte  $a, b, c \in C^0(\alpha, \beta)$  a  $a(x) \neq 0$  pro  $x \in (\alpha, \beta)$ . Lineární diferenciální operátor druhého řádu  $L = L(a, b, c) : C^2(\alpha, \beta) \rightarrow C^0(\alpha, \beta)$  definujeme předpisem

$$Ly(x) = a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Rovnice

$$Ly = g,$$

kde  $g \in C^0(\alpha, \beta)$  je lineární diferenciální rovnice druhého řádu; v případě  $g \equiv 0$  homogenní, v opačném nehomogenní.

Buďte  $p \in C^1(\alpha, \beta)$ ,  $q \in C^0(\alpha, \beta)$ . Pak operátor  $L(-p, -p', q)$  daný vztahem

$$L(-p, -p', q)y(x) = -p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x)$$

nazveme *samoadjungovaný*. Každý lineární diferenciální operátor druhého řádu  $L(a, b, c)$ , pro jehož koeficienty  $a, b$  platí

$$b(x) = a'(x), \quad x \in (\alpha, \beta)$$

je samoadjungovaný. Rovnice

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (\alpha, \beta)$$

se nazývá *samoadjungovaná* nebo *Sturmova-Liouvilleova* rovnice.

**Tvrzení 7.** Každou lineární diferenciální rovnici s koeficientem  $a \in C^1(\alpha, \beta)$  lze vyjádřit v samoadjungovaném tvaru.

*Důkaz:* Buď

$$h(x) = \int \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)} dx, \quad \varrho(x) = e^{h(x)}.$$

Pak

$$\begin{aligned}(\varrho(x)a(x))' &= \left(e^{h(x)}a(x)\right)' = e^{h(x)}h'(x)a(x) + e^{h(x)}a'(x) = \\ &= \varrho(x)\frac{b(x) - a'(x)}{a(x)}a(x) + \varrho(x)a'(x) = \varrho(x)b(x),\end{aligned}$$

tedy

$$\varrho(x)a(x)y''(x) + \varrho(x)b(x)y'(x) + \varrho(x)c(x)y(x) = \varrho(x)g(x)$$

je samoadjungovaná rovnice,  $p = -\varrho a$ ,  $q = \varrho c$ ,  $f = \varrho g$ . □

### Okrajové podmínky

Budeme hledat řešení rovnice

$$Ly = f,$$

na intervalu  $(\alpha, \beta)$ , které splňuje některé z následujících podmínek.

- *Dirichletovy podmínky:*

$$y(\alpha) = y_0, \quad y(\beta) = y_1,$$

pokud  $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} y(x) = y_0, \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} y(x) = y_1$$

obecně.

- *Neumannovy podmínky:*

$$y'(\alpha) = Y_0, \quad y'(\beta) = Y_1,$$

pokud  $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} y'(x) = Y_0, \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} y'(x) = Y_1$$

obecně.

- *Robinovy (Newtonovy) podmínky:*

$$\alpha_0 y(\alpha) + \beta_0 y'(\alpha) = \eta_0, \quad \alpha_1 y(\beta) + \beta_1 y'(\beta) = \eta_1,$$

pokud  $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} (\alpha_0 y(x) + \beta_0 y'(x)) = \eta_0, \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} (\alpha_1 y(x) + \beta_1 y'(x)) = \eta_1$$

obecně; přitom platí  $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0 \neq \alpha_1^2 + \beta_1^2$ .

- *Podmínky omezenosti:*

$$\limsup_{x \rightarrow \alpha^+} |y(x)| < \infty, \quad \limsup_{x \rightarrow \beta^-} |y(x)| < \infty.$$

- *Podmínky periodičnosti (periodické podmínky):*

$$y(\alpha) = y(\beta), \quad y'(\alpha) = y'(\beta),$$

pokud  $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ ,

$$y(x) = y(x + l), \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}, x > \alpha,$$

pokud  $\beta = \infty$ ; přitom  $l > 0$ .

Dirichletovy podmínky jsou zvláštním případem podmínek Robinových pro  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = 0$ ; Neumannovy podmínky jsou zvláštním případem Robinových podmínek pro  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = 1$ .

Podmínky různého typu lze kombinovat; můžeme například požadovat splnění Neumanovy podmínky v levém krajním bodě a podmínky omezenosti v pravém krajním bodě.

Jakékoliv okrajové podmínky nazveme *homogenní*, jestliže s libovolnými dvěma funkcemi  $y_1, y_2$ , které této podmínce vyhovují, vyhovuje téže podmínce i jejich libovolná lineární kombinace  $k_1y_1 + k_2y_2$ .

Robinovy podmínky s  $y_0 = y_1 = 0$ , podmínky periodičnosti i podmínky omezenosti s  $y_1 = 0$  nebo  $y_0 = 0$  jsou homogenní.

Okrajová úloha, v níž rovnice i okrajové podmínky jsou homogenní se nazývá *homogenní okrajová úloha*, v opačném případě *nehomogenní okrajová úloha*.

### Symetrický diferenciální operátor

Řekneme, že operátor  $L$  je *symetrický na množině*  $M \subseteq C^2(\alpha, \beta)$ , jestliže pro všechny  $u, v \in M$  platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} Lu(x)v(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)Lv(x)dx.$$

Bud'  $L = L(-p, -p', q)$  samoadjungovaný operátor. Pak platí (při výpočtu využíváme integraci „per partes“, pokud je některá z integračních mezí nevlastní, při výpočtu uvažujeme příslušnou jednostrannou limitu)

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} Lu(x)v(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} u(x)Lv(x)dx = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \left( - (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) \right) v(x) - u(x) \left( - (p(x)v'(x))' + q(x)v(x) \right) \right] dx = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( (p(x)v'(x))' u(x) - (p(x)u'(x))' v(x) \right) dx = \\ &= [p(x)v'(x)u(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} p(x)v'(x)u'(x)dx - [p(x)u'(x)v(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} p(x)u'(x)v'(x)dx = \\ &= p(\beta)v'(\beta)u(\beta) - p(\alpha)v'(\alpha)u(\alpha) - p(\beta)u'(\beta)v(\beta) + p(\alpha)u'(\alpha)v(\alpha) = \\ &= p(\beta)(v'(\beta)u(\beta) - u'(\beta)v(\beta)) - p(\alpha)(v'(\alpha)u(\alpha) - u'(\alpha)v(\alpha)). \end{aligned}$$

Z tohoto výpočtu plyne:

- Samoadjungovaný operátor  $L = L(-p, -p', q)$  je symetrický na množině funkcí, které splňují homogenní Robinovy podmínky.

*Důkaz:* Je-li  $\beta_0 \neq 0$ , pak  $u'(0) = -\frac{\alpha_0}{\beta_0}u(0)$ ,  $v'(\alpha) = -\frac{\alpha_0}{\beta_0}v(\alpha)$ , takže

$$v'(\alpha)u(\alpha) - u'(\alpha)v(\alpha) = 0.$$

Je-li  $\alpha_0 \neq 0$ , pak  $u(\alpha) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}u'(\alpha)$ ,  $v(\alpha) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}v'(\alpha)$ , takže opět  $v'(\alpha)u(\alpha) - u'(\alpha)v(\alpha) = 0$ .

Analogicky ověříme, že  $v'(\beta)u(\beta) - u'(\beta)v(\beta) = 0$ . □

- Pokud funkce  $p$  je  $l$ -periodická, přičemž  $l = \beta - \alpha$ , pak samoadjungovaný operátor  $L = L(-p, -p', q)$  je symetrický na množině  $l$ -periodických funkcí.



## C.2 Homogenní okrajová úloha s parametrem

Nechť  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Uvažujme homogenní okrajovou úlohu pro rovnici

$$Lv(x) = \lambda v(x).$$

Tato úloha má vždy *triviální řešení*  $v \equiv 0$ . Pokud existuje netriviální řešení  $v = v(x)$ , nazveme ho *vlastní funkcí okrajové úlohy* a parametr  $\lambda$  nazveme *vlastním číslem operátoru*  $L$ .

Je-li  $\lambda$  vlastní číslo operátoru  $L$  a  $v = v(x)$  je příslušná vlastní funkce uvažované okrajové úlohy, pak také funkce  $cv$  je pro libovolnou konstantu  $c \in \mathbb{R}$  vlastní funkcí.

Jestliže vlastnímu číslu  $\lambda$  odpovídá  $k$  lineárně nezávislých vlastních funkcí, řekneme, že  $\lambda$  je *k-násobné vlastní číslo*.

### Příklady:

Uvažujme samoadjungovaný operátor  $L = L(-a^2, 0, 0)$ , kde  $a$  je nějaká nenulová konstanta. Rovnici

$$-a^2 y''(x) = \lambda y(x) \tag{C.1}$$

můžeme přepsat na tvar

$$y''(x) + \frac{\lambda}{a^2} y(x) = 0.$$

Řešení této homogenní lineární rovnice druhého řádu závisí na znaménku parametru  $\lambda$ . Obecné řešení rovnice je dáno vztahem

$$y(x) = \begin{cases} A \exp\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}x\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}x\right), & \lambda < 0, \\ Ax + B, & \lambda = 0, \\ A \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|x} + B \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|x}, & \lambda > 0, \end{cases}$$

kde  $A, B$  jsou nějaké konstanty.

1) Hledáme řešení rovnice (C.1) na intervalu  $(0, l)$ , které splňuje Dirichletovy homogenní okrajové podmínky

$$y(0) = 0 = y(l).$$

Je-li  $\lambda = 0$ , pak má platit

$$y(0) = 0 = B, \quad y(l) = 0 = Al + B,$$

takže  $B = 0$  a v důsledku toho také  $A = 0$  a rovnice má pouze triviální řešení.

Je-li  $\lambda < 0$ , pak má platit

$$y(0) = 0 = A + B, \quad \text{tj. } B = -A, \quad y(l) = 0 = Ae^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}l} - Ae^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}l} = 2A \sinh\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}l;$$

pro  $-\lambda > 0$  je však  $\sinh\frac{\sqrt{-\lambda}}{|a|}l > 0$  a z toho plyne, že  $A = 0$ . Rovnice (C.1) má opět pouze triviální řešení.

Je-li  $\lambda > 0$ , pak má platit

$$y(0) = 0 = A, \quad y(l) = 0 = B \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l.$$

Odtud plyne, že  $\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = k\pi$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$ , tedy  $\lambda = \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2$  pro  $k = 1, 2, 3, \dots$ , neboť  $\lambda > 0$ .

Vlastní čísla operátoru  $L(-a^2, 0, 0)$  s homogenními Dirichletovými podmínkami na intervalu  $(0, l)$  a příslušné vlastní funkce jsou

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

2) Nyní hledáme řešení rovnice (C.1) na  $\mathbb{R}$ , které splňuje podmínky periodičnosti

$$y(x) = y(x + l).$$

Je-li  $\lambda < 0$ , pak je řešení  $y(x)$  je monotonní; konkrétně rostoucí pro  $A > 0$  nebo  $A = 0, B < 0$ , klesající pro  $A < 0$  nebo  $A = 0, B > 0$  a konstantní nulové pro  $A = B = 0$ . Úloha má tedy pouze triviální řešení.

Pro  $\lambda = 0$  má rovnice řešení  $y(x) = Ax + B$ , které je periodické a netriviální pouze pro  $A = 0, B \neq 0$ . První vlastní číslo tedy je  $\lambda_0 = 0$  a příslušná vlastní funkce  $v_0$  je nenulová konstanta.

Pro  $\lambda > 0$  má rovnice řešení  $y(x) = A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$  které má splňovat podmínku

$$\begin{aligned} A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x &= A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}(x + l) + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}(x + l) = \\ &= A \left( \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l - \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l \right) + B \left( \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l + \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l \right) = \\ &= \left( A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l \right) \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x + \left( -A \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l + B \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l \right) \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x. \end{aligned}$$

Poněvadž funkce  $\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$  a  $\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}x$  jsou nezávislé, plyne odtud

$$A \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l + B \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = A, \quad -A \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l + B \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = B,$$

neboli

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l - 1 \right) A + \left( \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l \right) B &= 0, \\ \left( -\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l \right) A + \left( \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l - 1 \right) B &= 0. \end{aligned}$$

Tato homogenní soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé  $A, B$  má nenulové řešení právě tehdy, když determinant její matice je nulový, tj. právě tehdy, když

$$\left( \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l - 1 \right)^2 + \left( \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l \right)^2 = 0.$$

Tato rovnost je splněna právě tehdy, když  $\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = 1$  a  $\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = 0$ , což znamená, že  $\frac{\sqrt{\lambda}}{|a|}l = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Celkem tedy vlastní čísla operátoru  $L(-a^2, 0, 0)$  s podmínkami periodičnosti a příslušné vlastní funkce jsou

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, \quad v_0(x) = \text{const} \neq 0, \\ \lambda_k &= \left(\frac{2k\pi a}{l}\right)^2, \quad v_k(x) = \cos \frac{2k\pi}{l}x, \quad \tilde{v}_k(x) = \sin \frac{2k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Kladná vlastní čísla jsou tedy dvojnásobná.

**3)** Nakonec najdeme řešení rovnice (C.1) na  $(0, \infty)$ , které splňuje podmínky omezenosti

$$y(x) \text{ je omezená pro } x \rightarrow 0+ \text{ a pro } x \rightarrow \infty.$$

Je-li  $\lambda < 0$ , pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |y(x)| = \begin{cases} \infty, & A \neq 0, \\ 0, & A = 0. \end{cases}$$

V tomto případě tedy všechna záporná čísla  $\lambda_-$  jsou vlastními čísly a příslušné vlastní funkce jsou

$$v_-(x) = e^{-\frac{\sqrt{-\lambda_-}}{|a|}x}.$$

Podobně pro  $\lambda = 0$  je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |y(x)| = \begin{cases} \infty, & A \neq 0, \\ B, & A = 0. \end{cases}$$

Číslo  $\lambda_0 = 0$  je vlastním číslem a příslušná vlastní funkce je

$$v_0(x) = \text{const} \neq 0.$$

Pro  $\lambda > 0$  jsou všechna řešení omezená, takže jakékoliv kladné číslo  $\lambda_+$  je vlastním číslem a příslušné vlastní funkce jsou

$$v_+(x) = \cos \frac{\sqrt{\lambda_+}}{|a|}x, \quad \tilde{v}_+(x) = \sin \frac{\sqrt{\lambda_+}}{|a|}x.$$

■

**Tvrzení 8.** Označme  $M_L \subseteq C^2(\alpha, \beta)$  množinu funkcí splňujících nějaké homogenní okrajové podmínky. Je-li operátor  $L$  symetrický na množině  $M_L$  a  $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$  jsou jeho dvě vlastní čísla, pak odpovídající vlastní funkce jsou orthogonální v prostoru  $\mathcal{L}^2(\alpha, \beta)$ .<sup>1</sup>

*Důkaz:*

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} v_1(x)v_2(x)dx &= \frac{1}{\lambda_1} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_1 v_1(x)v_2(x)dx = \frac{1}{\lambda_1} \int_{\alpha}^{\beta} L v_1(x)v_2(x)dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \int_{\alpha}^{\beta} v_1(x)L v_2(x)dx = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_{\alpha}^{\beta} v_1(x)v_2(x)dx. \end{aligned}$$

Odtud

$$\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \int_{\alpha}^{\beta} v_1(x)v_2(x)dx = 0$$

a poněvadž  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , musí platit  $\int_{\alpha}^{\beta} v_1(x)v_2(x)dx = 0$ . □

---

<sup>1</sup>Prostor  $\mathcal{L}^2(\alpha, \beta)$ :

Množina funkcí definovaných na intervalu  $(\alpha, \beta)$  takových, že  $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x))^2 dx < \infty$ , tvoří vektorový prostor. Skalární součin funkcí  $f, g$  v tomto prostoru definujeme vztahem  $(f | g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx$  a normu funkce  $f$  vztahem  $\|f\| = \sqrt{(f | f)}$ . Funkce  $f$  a  $g$  v tomto prostoru považujeme za ekvivalentní, pokud  $\|f - g\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))^2 dx = 0$ . Pokud ekvivalentní funkce ztotožníme, dostaneme prostor  $\mathcal{L}^2(\alpha, \beta)$ .

### Sturmova-Liouvilleova úloha

Jedná se o samoadjungovanou rovnici na konečném intervalu s homogenními Robinovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) &= \lambda y(x), & x \in (0, l), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0 &= \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

**Věta 3.** Platí následující tvrzení:

- Sturmova-Liouvilleova úloha má nekonečně mnoho vlastních čísel  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , pro která platí

$$\min\{q(x) : x \in [0, l]\} \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

- Každému vlastnímu číslu Sturmovy-Liouvilleovy úlohy přísluší právě jedna normovaná vlastní funkce.
- Vlastní funkce  $v_n = v_n(x)$  odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda_n$  má v intervalu  $(0, l)$  právě  $n - 1$  nulových bodů. Mezi každými dvěma sousedními nulovými body vlastní funkce  $v_n$  leží právě jeden nulový bod vlastní funkce  $v_{n+1}$ . Zejména vlastní funkce  $v_1$  nemění znaménko na intervalu  $(0, l)$ .
- Posloupnost  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  normovaných vlastních funkcí Sturmovy-Liouvilleovy úlohy tvoří úplnou orthonormální posloupnost na  $[0, l]$ . Tj. je-li funkce  $f \in \mathcal{L}^2(0, l)$ , pak Fourierova řada funkce  $f$  vzhledem k orthonormální posloupnosti  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k funkci  $f$  podle středu (konvergence v prostoru  $\mathcal{L}^2(0, l)$ ). Je-li funkce  $f$  navíc spojitá a splňuje homogenní okrajové podmínky, je tato konvergence stejnoměrná.

*Důkaz:* Viz J. KALAS, M. RÁB: *Obyčejné diferenciální rovnice*. MU, Brno 1995, str. 158–163. Důkaz je tam proveden pro případ  $p \equiv 1$ .  $\square$

Tvrzení věty jsou ilustrována třemi příklady na str. 206–208: Dirichletova úloha

$$\begin{aligned} -a^2 y'' &= \lambda y & 0 < x < l, \\ y(0) = 0 &= y(l) \end{aligned}$$

má vlastní čísla

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

kteřá evidentně tvoří rostoucí posloupnost s nevlastní limitou  $\infty$ , ke každému vlastnímu číslu přísluší právě jedna normovaná vlastní funkce

$$v_n(x) = \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Přitom nulové body vlastní funkce  $v_n$  uvnitř intervalu  $(0, l)$  a nulové body vlastní funkce  $v_{n+1}$  uvnitř intervalu  $(0, l)$  a jsou

$$x_k = \frac{kl}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad \text{a} \quad x_\kappa = \frac{\kappa l}{n+1}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \dots, n$$

a pro tyto hodnoty platí

$$\frac{(q-1)l}{n} < \frac{ql}{n+1} < \frac{ql}{n}, \quad q = 1, 2, \dots, n.$$

Poslední tvrzení věty plyne z teorie trigonometrických Fourierových řad.

Periodická úloha

$$\begin{aligned} -a^2 y'' &= \lambda y & x \in \mathbb{R}, \\ y(x) &= y(x+l) & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

má vlastní čísla

$$\lambda_n = \left( \frac{2n\pi a}{l} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

kteřá opět tvoří rostoucí posloupnost s nevlastní limitou  $\infty$ . Ovšem ke každému z vlastních čísel  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  existují dvě nezávislé vlastní funkce

$$\cos \frac{n\pi}{l} x \quad \text{a} \quad \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Předpoklad věty, že homogenní okrajová podmínka je Robinova, tedy nelze zeslabit tak, že by okrajová podmínka mohla být i periodická.

Libovolné reálné číslo je vlastním číslem okrajové úloha s podmínkami ohraničenosti

$$\begin{aligned} -a^2 y'' &= \lambda y & x \in (0, \infty), \\ \limsup_{x \rightarrow \infty} |y(x)| &< \infty. \end{aligned}$$

Tato vlastní čísla tvoří posloupnost; říkáme, že spektrum operátoru je spojité (není diskrétní).

Vlastní čísla a vlastní funkce některých speciálních (ale důležitých) Sturmových-Liouvilleových úloh tvaru

$$\begin{aligned} -a^2 y'' &= \lambda y, & 0 < x < l, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l) \end{aligned} \tag{C.3}$$

jsou uvedeny v tabulce C.1.

### C.3 Nehomogenní rovnice s homogenními okrajovými podmínkami

Budeme hledat řešení nehomogenní rovnice v samoadjungovaném tvaru s homogenními Robinovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} Ly(x) &\equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), & x \in (0, l), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l). \end{aligned}$$

#### Fourierova metoda

- Najdeme posloupnost vlastních čísel  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  a ortogonální posloupnost příslušných vlastních funkcí  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  Sturmovy-Liouvilleovy úlohy, tj. rostoucí posloupnost čísel  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  a posloupnost funkcí  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ , které splňují:

$$Lv_n(x) = \lambda_n v_n(x),$$

$$\alpha_0 v_n(0) + \beta_0 v_n'(0) = 0 = \alpha_1 v_n(l) + \beta_1 v_n'(l).$$

- Funkci  $f$  vyjádříme ve tvaru Fourierovy řady vzhledem k ortogonálnímu systému vlastních funkcí

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x), \quad \text{kde} \quad d_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^l f(\xi) v_n(\xi) d\xi.$$

| $\alpha_0$ | $\beta_0$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\lambda_n$   | $v_n(x)$   | $\ v_n\ ^2$   |
|------------|-----------|------------|-----------|---|--|---|
| 1          | 0         | 1          | 0         | $\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$  | $\sin \frac{n\pi}{\ell} x$   | $\frac{\ell}{2}$                                    |
| 1          | 0         | 0          | 1         | $\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$  | $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x$   | $\frac{\ell}{2}$                                    |
| 0          | 1         | 1          | 0         | $\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$  | $\cos \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x$   | $\frac{\ell}{2}$                                    |
| 0          | 1         | 0          | 1         | 0, $\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$   | 1, $\cos \frac{n\pi}{\ell} x$  | $\ell, \frac{\ell}{2}$                              |
| 1          | 0         | $h$        | 1         | kladné kořeny rovnice<br>$\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} \ell)$                                       | $\sin \sqrt{\lambda_n} x$  | $\frac{\ell}{2} + \frac{h}{2(h^2 + \lambda_n)}$     |
| 0          | 1         | $h$        | 1         | kladné kořeny rovnice<br>$h = \sqrt{\lambda} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} \ell)$  | $\cos \sqrt{\lambda_n} x$  | $\frac{\ell}{2} + \frac{h}{2(h^2 + \lambda_n)}$     |
| $-h$       | 1         | $h$        | 1         | kladné kořeny rovnice<br>$\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} = 2 \operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda} \ell)$ | $\cos \sqrt{\lambda_n} x + \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} x$ | $\frac{\ell}{2} + \frac{h^2 \ell + 2h}{2\lambda_n}$ |

Tabulka C.1: Vlastní hodnoty a vlastní funkce úlohy (C.3) pro některé speciální tvary okrajových podmínek.

- Řešení úlohy hledáme také ve tvaru Fourierovy řady

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x).$$

Musí tedy platit

$$Ly(x) = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Lv_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x),$$

takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x).$$

z čehož podle věty o jednoznačnosti Fourierovy řady plyne

$$c_n = \frac{d_n}{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

pokud všechna vlastní čísla jsou nenulová.

Hledané řešení tedy je

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int_0^l f(\xi) v_n(\xi) d\xi = \int_0^l \left( f(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2} \right) d\xi.$$

Označíme-li

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \|v_n\|^2},$$

lze řešení zapsat ve tvaru integrálu

$$y(x) = \int_0^l f(\xi) G(x, \xi) d\xi.$$

### Metoda variace konstant

- Najdeme řešení  $u, v$  dvou pomocných homogenních úloh s jednou okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} Lu &= -(pu')' + qu = 0, & \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) &= 0, \\ Lv &= -(pv')' + qv = 0, & \alpha_1 v(l) + \beta_1 v'(l) &= 0. \end{aligned}$$

Funkce  $u, v$  nejsou určeny jednoznačně. Vezmeme ty, které jsou lineárně nezávislé.

- Pro Wronskián  $W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$  funkcí  $u, v$  platí  $p(x)W(x) \equiv K$ , kde  $K$  je nenulová konstanta, neboť

$$\begin{aligned} (pW)' &= (p(uv' - u'v))' = p'uv' + pu'v' + puv'' - p'u'v - pu''v - pu'v' = \\ &= (pv'' + p'v')u - (pu'' + p'u')v = (pv')'u - (pu')'v = qvu - quv = 0, \end{aligned}$$

kdyby  $K = 0$ , pak by  $W \equiv 0$ , což by byl spor s lineární nezávislostí.

- Řešení nehomogenní úlohy hledáme metodou variace konstant, tedy ve tvaru

$$y(x) = c_1(x)u(x) + c_2(x)v(x).$$

Funkce  $y$  má být řešením dané nehomogenní rovnice, takže musí platit

$$\begin{aligned} f &= L(c_1u + c_2v) = -(p(c_1u)')' + qc_1u - (p(c_2v)')' + qc_2v = \\ &= -p(c_1''u + 2c_1'u' + c_1u'') - p'(c_1'u + c_1u') + qc_1u - \\ &\quad - p(c_2''v + 2c_2'v' + c_2v'') - p'(c_2'v + c_2v') + qc_2v = \\ &= c_1(-pu'' - p'u' + qu) - pc_1'u' - p(c_1''u + c_1'u') - p'c_1'u + \\ &\quad c_2(-pv'' - p'v' + qv) - pc_2'v' - p(c_2''v + c_2'v') - p'c_2'v = \\ &= c_1Lu - pc_1'u' - (p(c_1'u))' + c_2Lv - pc_2'v' - (p(c_2'v))' = \\ &= -p(c_1'u' + c_2'v') - (p(c_1'u + c_2'v))'. \end{aligned}$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když funkce  $c_1, c_2$  splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x)u(x) + c_2'(x)v(x) &= 0, \\ c_1'(x)u'(x) + c_2'(x)v'(x) &= -\frac{f(x)}{p(x)}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Platí tedy

$$c_1'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & v(x) \\ -\frac{f(x)}{p(x)} & v'(x) \end{vmatrix} = \frac{f(x)v(x)}{K}, \tag{C.5}$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} u(x) & 0 \\ u'(x) & -\frac{f(x)}{p(x)} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)u(x)}{K}.$$

- Funkce  $y(x)$  má splňovat okrajové podmínky, tj.

$$\begin{aligned}\alpha_0 [c_1(0)u(0) + c_2(0)v(0)] + \beta_0 [c_1'(0)u(0) + c_1(0)u'(0) + c_2'(0)v(0) + c_2(0)v'(0)] &= 0 \\ \alpha_1 [c_1(l)u(l) + c_2(l)v(l)] + \beta_1 [c_1'(l)u(l) + c_1(l)u'(l) + c_2'(l)v(l) + c_2(l)v'(l)] &= 0,\end{aligned}$$

po úpravě s využitím (C.4)

$$\begin{aligned}c_1(0)(\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0)) + c_2(0)(\alpha_0 v(0) + \beta_0 v'(0)) &= 0, \\ c_1(l)(\alpha_1 u(l) + \beta_1 u'(l)) + c_2(l)(\alpha_1 v(l) + \beta_1 v'(l)) &= 0;\end{aligned}$$

každá z funkcí splňuje jednu okrajovou podmínku, tedy

$$\begin{aligned}c_2(0)(\alpha_0 v(0) + \beta_0 v'(0)) &= 0, \\ c_1(l)(\alpha_1 u(l) + \beta_1 u'(l)) &= 0,\end{aligned}$$

takže

$$c_1(l) = 0, \quad c_2(0) = 0. \quad (\text{C.6})$$

- Funkce  $c_1, c_2$  jsou řešením rovnic (C.5) s počátečními podmínkami (C.6) a jsou tedy dány výrazy

$$c_1(x) = \frac{1}{K} \int_l^x f(\xi)v(\xi)d\xi, \quad c_2(x) = -\frac{1}{K} \int_0^x f(\xi)u(\xi)d\xi.$$

- Řešení úlohy je

$$y(x) = -\frac{u(x)}{K} \int_x^l f(\xi)v(\xi)d\xi - \frac{v(x)}{K} \int_0^x f(\xi)u(\xi)d\xi.$$

Označíme-li

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{u(x)v(\xi)}{K}, & 0 \leq x < \xi \leq l \\ -\frac{v(x)u(\xi)}{K}, & 0 \leq \xi < x \leq l \end{cases},$$

lze řešení zapsat ve tvaru jediného integrálu

$$y(x) = \int_0^l f(\xi)G(x, \xi)d\xi.$$

### Greenova funkce

Funkci  $G : [0, l] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme *Greenovou funkcí homogenní okrajové úlohy*

$$\begin{aligned}Ly(x) &\equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0, \quad x \in (0, l), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l).\end{aligned}$$

kde  $p(x) > 0$  pro  $x \in [0, l]$ , jestliže

- (i)  $G$  je spojitá pro  $x \in [0, l] \times [0, l]$ ,
- (ii)  $G$  je symetrická, tj.  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ ,
- (iii) pro každé  $\xi \in [0, l]$  má funkce  $G(\cdot, \xi)$  spojitě derivace druhého řádu,
- (iv) pro každé  $\xi \in [0, l]$  je funkce  $G(\cdot, \xi)$  řešením uvažované okrajové úlohy,



$$(v) \lim_{x \rightarrow \xi^+} G_x(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^-} G_x(x, \xi) = -\frac{1}{p(\xi)} \text{ pro } \xi \in (0, l).$$

**Věta 4.** Má-li uvažovaná homogenní okrajová úloha jen triviální řešení  $y \equiv 0$  a jsou-li funkce  $p \in C^1(0, l)$ ,  $q \in C^2(0, l)$ , existuje právě jedna její Greenova funkce. Nehomogenní okrajová úloha

$$\begin{aligned} Ly(x) &\equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), & x \in (0, l), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l). \end{aligned}$$

má pak jediné řešení tvaru

$$y(x) = \int_0^l f(\xi)G(x, \xi)d\xi.$$

*Důkaz:* Viz I. KIGURADZE: *Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic.* MU, Brno 1997, str. 82. Důkaz je proveden pro mnohem obecnější situaci.  $\square$

## C.4 Úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} Ly(x) &\equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x), & x \in (0, l), \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= \eta_0, & \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l) = \eta_1. \end{aligned}$$

Jestliže funkce  $w = w(x)$  splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0) = \eta_0, \quad \alpha_1 w(l) + \beta_1 w'(l) = \eta_1$$

a funkce  $u = u(x)$  je řešením úlohy

$$Lu(x) = f(x) - Lw(x)$$

s homogenními okrajovými podmínkami

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = 0 = \alpha_1 u(l) + \beta_1 u'(l),$$

pak funkce

$$y(x) = u(x) + w(x)$$

je řešením uvažované úlohy, jak se snadno přesvědčíme přímým výpočtem.

Funkci  $w$  je vhodné volit v co nejjednodušším tvaru, například polynom. Konkrétně lze volit polynom nejvýše druhého stupně ve tvaru

$$w(x) = \begin{cases} \frac{\beta_0 \eta_1 - \beta_1 \eta_0 - \alpha_1 \eta_0 l}{\beta_0 (\alpha_1 l + 2\beta_1) l} x^2 + \frac{\eta_0}{\beta_0} x, & \beta_0 (\alpha_1 l + 2\beta_1) \neq 0, \\ \frac{\alpha_0 \eta_1 - \alpha_1 \eta_0}{\alpha_0 (\alpha_1 l + 2\beta_1) l} x^2 + \frac{\eta_0}{\alpha_0}, & \beta_0 = 0 \neq \alpha_1 l + 2\beta_1, \\ \frac{\alpha_1 \eta_0 - \alpha_0 \eta_1}{\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0} x + \frac{\beta_1 \eta_0 + \beta_0 \eta_1}{\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0}, & \alpha_1 l + 2\beta_1 = 0 \neq \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0, \\ \frac{\alpha_1 \eta_0 - \alpha_0 \eta_1}{\alpha_0 \alpha_1 l} x + \frac{\eta_1}{\alpha_1}, & \alpha_1 l + 2\beta_1 = 0 = \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0, \frac{\eta_1}{\alpha_1} = \frac{\eta_0}{\alpha_0}, \\ \frac{\eta_1}{l} x, & \alpha_1 l + 2\beta_1 = 0 = \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0, \alpha_0 \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

## Cvičení

Řešte okrajové úlohy

- 1)  $-y'' - \frac{2}{x}y' = 0$ ,  $x \in (0, 1)$ ;  $y(1) = y_0$ ,  $y$  je omezená pro  $x \rightarrow 0_+$ .
- 2)  $-(x^2y')' = 0$ ,  $x \in (1, \infty)$ ;  $y(1) = y_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ .
- 3)  $-(xy')' = 0$ ,  $x \in (1, \infty)$ ;  $y(1) = y_0$ ,  $y$  je omezená pro  $x \rightarrow \infty$ .
- 4)  $-xy'' - y' = 0$ ,  $x \in (1, 2)$ ;  $y(1) = y_1$ ,  $y(2) = 0$ .
- 5)  $-x^2y'' - xy' + k^2y = 0$ ,  $x \in (0, l)$ ;  $y(l) = 1$ ,  $y$  je omezená pro  $x \rightarrow 0_+$ ;  $k$  je parametr.
- 6)  $-xy'' - y' = -x$ ,  $x \in (0, l)$ ;  $y(0) = y(l) = 0$ .
- 7)  $-y'' = \sin x$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ ;  $y'(0) = y'(2\pi) = 0$ .

Najděte vlastní funkce okrajových úloh a vlastní čísla příslušných operátorů

- 8)  $-v'' = \lambda v$ ,  $x \in (0, l)$ ;  $v'(0) = v'(l) = 0$ .
- 9)  $-v'' = \lambda v$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $v(x) = v(x + 2\pi)$ .
- 10)  $-v'' + qv = \lambda v$ ,  $x \in (0, l)$ ;  $v'(0) = 0$ ,  $v(l) = 0$ ;  $q$  je parametr.

Řešte okrajové úlohy

- 11)  $-y'' - \omega^2y = f(x)$ ,  $x \in (0, l)$ ;  $y(0) = y(l) = 0$ ;  $\omega$  je parametr.
- 12)  $-y'' - 3y = \frac{\pi - x}{2}$ ,  $x \in (0, \pi)$ ;  $y(0) = y(\pi) = 0$ .
- 13) Najděte Greenovu funkci úlohy  $-y'' + y = 0$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ .
- 14) Ověřte výsledky uvedené v tabulce C.1.

**Výsledky:**

- 1)  $y(x) = y_0$  2)  $y(x) = \frac{y_0}{x}$  3)  $y(x) = y_0$  4)  $y(x) = y_1 \frac{\ln 2 - \ln x}{\ln 2}$  5)  $y(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{|k|}$  6) nemá řešení
- 7)  $y(x) = \sin x - x + C$ ,  $C$  je libovolná konstanta
- 8)  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ,  $v_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l}x$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- 9)  $\lambda_n = n^2$ ,  $v_n(x) = C_n \cos nx + D_n \sin nx$ ,  $C_n, D_n$  jsou libovolné konstanty,  $C_0 \neq 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- 10)  $\lambda_n = q + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$ ,  $v_n(x) = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l}x$ .

$$11) y(x) = B \sin \frac{k\pi}{l}x + \frac{1}{\omega} \int_0^x f(\xi) \sin \frac{k\pi}{l}(\xi - x) d\xi \text{ pro } \frac{\omega l}{\pi} = k \in \mathbb{N} \text{ a } \int_0^l f(\xi) \sin \frac{k\pi}{l}\xi d\xi = 0,$$

$B$  je libovolná konstanta;

$$y(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x f(\xi) \sin \omega(\xi - x) d\xi - \frac{\sin \omega x}{\omega \sin \omega l} \int_0^l f(\xi) \sin \omega(\xi - x) d\xi = 2l \int_0^x f(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{l}\xi \sin \frac{k\pi}{l}x}{k^2\pi^2 - \omega^2l^2} d\xi$$

pro  $\frac{\omega l}{\pi} \notin \mathbb{N}$

$$12) y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k^2-3)} = \frac{\pi}{6} (\cos \sqrt{3}x - \cotg \sqrt{3}\pi \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{6}(x - \pi)$$

$$13) G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sinh(1-x) \sinh \xi}{\sinh 1}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\ \frac{\sinh x \sinh(1-\xi)}{\sinh 1}, & 0 \leq x < \xi \leq 1 \end{cases}$$



# Příloha D

## Speciální funkce

### D.1 Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

#### D.1.1 Definice

Čebyševův-Hermiteův polynom stupně  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je pro každé  $x \in \mathbb{R}$  definován vztahem

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Zejména

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 & H_2(x) &= 4x^2 - 2 & H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_1(x) &= 2x & H_3(x) &= 8x^3 - 12x & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned}$$

#### D.1.2 Rekurentní vztahy pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

S využitím Leibnizovy formule pro výpočet vyšší derivace součinu funkcí dostaneme pro každé  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} = (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (-2xe^{-x^2}) = \\ &= 2(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (xe^{-x^2}) = 2(-1)^n e^{x^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} x \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{-x^2} = \\ &= 2(-1)^n e^{x^2} \left[ \binom{n}{0} x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + \binom{n}{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right] = \\ &= 2x(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} - 2n(-1)^{n-1} e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \end{aligned}$$

tedy

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \quad (\text{D.1})$$

Této rovnice lze využít k postupnému výpočtu Čebyševových-Hermiteových polynomů pomocí prvních dvou.

Dále platí

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= \frac{d}{dx} \left[ (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right] = 2x(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} - (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} = \\ &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Odtud s využitím (D.1) dostaneme

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad (\text{D.2})$$

tj. vyjádření derivace polynomu  $H_n$  pomocí polynomu nižšího stupně.

### D.1.3 Diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

S využitím vztahů (D.2) a (D.1) dostaneme

$$\begin{aligned} H''_n(x) &= (2nH_{n-1}(x))' = (2xH_n(x) - H_{n+1}(x))' = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H'_{n+1}(x) = \\ &= 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - 2(n+1)H_n(x) = 2xH'_n(x) - 2nH_n(x). \end{aligned}$$

Pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  je tedy Čebyševův-Hermiteův polynom  $H_n(x)$  řešením diferenciální rovnice

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0, \quad (\text{D.3})$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left(e^{-x^2}y'\right)' + 2ne^{-x^2}y = 0.$$

Poznamenejme ještě, že Čebyševův-Hermiteův polynom je řešením rovnice (D.3) s okrajovými podmínkami

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2}y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2}y(x) = 0.$$

**Věta 5** (Orthogonalita Čebyševových-Hermiteových polynomů). *Pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 2^n n! \sqrt{\pi}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

*Důkaz:* Pro určitost budeme předpokládat, že  $m \leq n$ . Označme

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx.$$

Pro výpočet tohoto integrálu použijeme  $m$  krát metodu per partes; přitom využijeme (D.2) a skutečnost, že pro libovolný polynom  $P$  platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2}P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2}P(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} J &= (-1)^n \left( \left[ H_m(x)e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx \right) = \\ &= (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx = (-1)^{n-2} 2m2(m-1) \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-2}(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2} dx = \\ &= \dots = (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Je-li  $m < n$ , pak

$$J = (-1)^{n-m} 2^m m! \left[ \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0;$$

je-li  $m = n$ , pak

$$J = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

□

**Důsledek 3.** *Funkce*

$$\psi_n = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tvorí ortonormální posloupnost v prostoru  $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ .

Z věty plyne, že f

### D.1.4 Rekurentní vztahy pro koeficienty Čebyševových-Hermiteových polynomů

Hledáme řešení rovnice (D.3) ve tvaru mocninné řady  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x^k$ .

Platí

$$\begin{aligned} 2ny(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2na_{nk} x^k, \\ 2xy'(x) &= 2x \sum_{k=0}^{\infty} ka_{nk} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2ka_{nk} x^k, \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_{nk} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_{nk} x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{n(k+2)} x^k. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (D.3) dostaneme

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{n(k+2)} - 2ka_{nk} + 2na_{nk}] x^k = 0,$$

a tedy

$$a_{n(k+2)} = \frac{2(n-k)}{(k+2)(k+1)} a_{nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n-2.$$

## D.2 Besselovy funkce

**Definice 1.** Obyčejná lineární homogenní rovnice druhého řádu

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0, \quad (\text{D.4})$$

kde  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $x \in (0, \infty)$  se nazývá *Besselova rovnice řádu  $\nu$* .

Rovnici (D.4) lze ekvivalentně zapsat

$$x(xy'(x))' + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0.$$

## D.2.1 Řešení rovnice (D.4) Frobeniovou metodou

Hledáme nějaké řešení rovnice (D.4). Budeme předpokládat, že je tvaru

$$y(x) = a_0x^\sigma + a_1x^{\sigma+1} + a_2x^{\sigma+2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{\sigma+k}, \quad (\text{D.5})$$

kde  $\sigma \in \mathbb{R}$  je tzv. *charakteristický součinitel*, jehož hodnotu určíme později. Pak je

$$\begin{aligned} x^2y'' &= a_0\sigma(\sigma-1)x^\sigma + a_1(\sigma+1)\sigma x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\sigma+k)(\sigma+k-1)x^{\sigma+k}, \\ xy'(x) &= a_0\sigma x^\sigma + a_1(\sigma+1)x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\sigma+k)x^{\sigma+k}, \\ x^2y(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{\sigma+k}, \\ -\nu^2y(x) &= -\nu^2a_0x^\sigma - \nu^2a_1x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-\nu^2a_k)x^{\sigma+k}. \end{aligned}$$

Tedy

$$a_0(\sigma^2 - \nu^2)x^\sigma + a_1(\sigma^2 + 2\sigma + 1 - \nu^2)x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k(\sigma^2 + 2\sigma k + k^2 - \nu^2) + a_{k-2})x^{\sigma+k} = 0,$$

takže (D.5) je formálním řešením Besselovy rovnice (D.4) pokud platí rovnosti

$$\begin{aligned} a_0(\sigma^2 - \nu^2) &= 0 \\ a_1(\sigma^2 + 2\sigma + 1 - \nu^2) &= 0 \\ a_k(\sigma^2 + 2\sigma k + k^2 - \nu^2) + a_{k-2} &= 0, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

První z těchto rovností je splněna, pokud  $\sigma$  a  $\nu$  vyhovují tzv. *charakteristické rovnici*

$$\sigma^2 - \nu^2 = 0, \quad \text{tj. } \sigma = \pm\nu. \quad (\text{D.6})$$

Položíme  $\sigma = \nu$  a dosadíme do zbývajících rovností. Dostaneme

$$a_1(2\nu + 1) = 0 \quad (\text{D.7})$$

$$a_k(2\nu + k)k = a_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (\text{D.8})$$

Rovnost (D.7) a rovnosti (D.8) s lichými indexy  $k$ , tj.  $k = 2m + 1$  pro vhodné  $m \in \mathbb{N}$ , jsou zřejmě splněny, pokud  $a_{2m+1} = 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Najdeme podmínky, za jakých jsou splněny rovnosti (D.8) se sudými indexy  $k$ . Pokud  $2\nu + k \neq 0$  pro  $k = 2, 4, 6, \dots, 2m$ , pak

$$\begin{aligned} a_{2m} &= -\frac{a_{2(m-1)}}{2^2m(m+\nu)} = -\frac{\frac{a_{2(m-2)}}{2^2(m-1)(m-1+\nu)}}{2^2m(m+\nu)} = \frac{a_{2(m-2)}}{2^4m(m-1)(m+\nu)(m-1+\nu)} = \dots \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m(m-1)\dots 1 \cdot (m+\nu)(m-1+\nu)\dots (1+\nu)} = \\ &= \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1+\nu)}{2^{2m}m!(m+\nu)(m-1+\nu)\dots (1+\nu)\Gamma(1+\nu)} = \\ &= \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1+\nu)}{2^{2m}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}. \end{aligned}$$

Tento výpočet naznačuje, že lze volit

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} \Gamma(m+1) \Gamma(m+\nu+1)}.$$

Pokud  $2\nu + k = 0$  pro nějaké  $k = 2m_1$ , pak  $2\nu + k$  je celé záporné číslo pro všechna  $k = 2, 4, 6, \dots, 2(m_1 - 1)$  a  $2\nu + k > 0$  pro všechna  $k = 2(m_1 + 1), 2(m_1 + 2), \dots$ . Tedy  $1 + \nu, 2 + \nu, \dots, m_1 + \nu$  nejsou v definičním oboru funkce  $\Gamma$  a  $m_1 + \nu + 1, m_1 + \nu + 2, \dots$  v něm jsou. V takovém případě lze volit

$$a_0 = a_2 = \dots = a_{2(m_1-1)} = 0, \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} \text{ pro } m \geq m_1.$$

Snadno ověříme, že při uvedené volbě budou rovnosti (D.8) splněny pro každý sudý index  $k$ .

Formální řešení rovnice (D.4) je tedy tvaru

$$y(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (\text{D.9})$$

kde

$$k_0 = \begin{cases} 0, & \nu \notin (-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}, \\ -\nu, & \nu \in (-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Abychom ověřili, že se jedná o řešení, je potřeba ukázat, že tato řada konverguje pro každé  $x > 0$ . Pro poloměr konvergence  $r$  mocninné řady

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k}$$

podle Cauchyovy-Hadamardovy věty a s využitím vlastností funkce  $\Gamma$  platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2\pi(k+1)^{k+1/2}(k+\nu+1)^{k+\nu+1/2}e^{-2k+\nu-1}}} = 0, \end{aligned}$$

takže tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně pro každé  $x \in \mathbb{R}$ . Řada (D.9) tedy konverguje absolutně a stejnoměrně pro každé  $x > 0$ . (Pro  $x = 0$  nemusí být  $y(x) = x^\nu S(x)$  vůbec definována.)

**Definice 2.** Funkce

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

se nazývá *Besselova funkce prvního druhu řádu  $\nu$* . Je-li pro nějaké  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  číslo  $k + \nu + 1$  celé nekladné (tj.  $k + \nu + 1 \notin \text{Dom } \Gamma$ ), klademe  $k$ -tý člen uvažované řady roven 0.

Označme

$$u_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Pak je  $J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x)$ .

*Poznámka 3.*

$$u_\nu(0) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}, \quad u'_\nu(0) = 0.$$



*Důkaz:* První vzorec plyne z toho, že  $\Gamma(1) = 1$ .

$$\begin{aligned} u'_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}. \end{aligned}$$

(Poslední rovnost plyne z faktu, že  $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$ .) □

## D.2.2 Vlastnosti Besselovy funkce prvního druhu

1. Funkce  $J_\nu(x)$  je spojitá na  $(0, \infty)$ .

*Důkaz:* Plyne z toho, že  $u_\nu(x)$  jakožto součet mocninné řady je funkce spojitá. □

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \nu = 0 \\ 0, & \nu > 0 \text{ nebo } \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ \infty(-1)^{[\nu]}, & \nu \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z} \end{cases}.$$

*Důkaz:* Plyne bezprostředně z 3. □

3. Pro  $n \in \mathbb{N}$  platí  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$  pro všechna  $x \in (0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \textit{Důkaz: } J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned} \quad \square$$

4.  $(x^{-\nu} J_\nu(x))' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$ ,  $(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$ .

*Důkaz:* Platí:

$$\begin{aligned} (x^{-\nu} J_\nu(x))' &= \left( 2^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right)' = \\ &= 2^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\ &= 2^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\ &= 2^{-\nu} \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)} = \\ &= 2^{-\nu} \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \\ &= -2^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \\ &= -x^{-\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \\ &= -x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+(\nu+1)+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1} \end{aligned}$$

Druhý vztah lze dokázat analogicky. □

$$5. J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x) - J_{\nu-1}(x), \quad J'_{\nu}(x) = \frac{1}{2}(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)).$$

První formule (rekurentní vzorec) umožňuje vypočítat  $J_{\nu+1}(x)$  ze znalosti  $J_{\nu}(x)$  a  $J_{\nu-1}(x)$ ; druhá formule je vzorec pro derivaci Besselovy funkce prvního druhu.

*Důkaz:* První formuli z 4. vynásobíme  $x^{\nu}$ , druhou  $x^{-\nu}$  a rozepíšeme derivaci součinu. Tím dostaneme

$$J'_{\nu}(x) - \frac{\nu}{x}J_{\nu}(x) = -J_{\nu+1}(x), \quad J'_{\nu}(x) + \frac{\nu}{x}J_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x).$$

Odečtením těchto rovnic dostaneme první formuli, sečtením druhou. □

6. Platí

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

$$7. J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

*Důkaz:* Poněvadž podle vlastností funkce  $\Gamma$  je pro každé  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) &= \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(k - \frac{2k-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2^k} \sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{(2k)!! 2^k} \sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}} \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

kde  $(2k)!! = 2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2$ , tak platí  $\Gamma(k+1)\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = k! \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}} \sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{2^{2k}} \sqrt{\pi}$  a tedy

$$\begin{aligned} J_{-1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{aligned}$$

Druhý vztah se dokáže analogicky. □

Rekurentní formule uvedené v 5 spolu s vyjádřením funkcí  $J_0, J_1, J_{-n}, J_{-1/2}, J_{1/2}$  uvedenými v 6, 3 a 7 umožňují vypočítat Besselovy funkce 1. druhu libovolného celočíselného a poločíselného řádu.

**Věta 6** (Nulové body Besselových funkcí celočíselného řádu). *Funkce  $J_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  má jednoduché nulové body  $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots$  takové, že*

$$0 < x_{n1} < x_{n2} < x_{n3} < \cdots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{nk} = \infty$$

*a posloupnost  $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$  nemá hromadné body. Funkce  $J_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  má navíc  $n$ -násobný nulový bod  $x_{n0} = 0$ .*

*Důkaz:* Viz např. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922, kap. XV. □

**Věta 7** (Orthogonalita Besselových funkcí celočíselného řádu). *Besselovy funkce prvního druhu  $J_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  splňují pro každé  $a > 0$  a všechna  $k, l \in \mathbb{N}$  rovnost*

$$\int_0^a \xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right) d\xi = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \frac{1}{2}a^2 (J_{n+1}(x_{nk}))^2, & k = l \end{cases}$$

kde  $x_{nk}$  (resp.  $x_{nl}$ ) je  $k$ -tý (resp.  $l$ -tý) jednoduchý nulový bod funkce  $J_n$ .

*Důkaz:* Položme  $f(\xi) = J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)$ ,  $g(\xi) = J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right)$ . Pak

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \frac{x_{nk}}{a} J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right), \quad \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} = \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 J_n''\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right).$$

Poněvadž  $J_n$  je řešením Besselovy rovnice (D.4), platí

$$\begin{aligned} \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} &= \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 \left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^{-2} \left(-\frac{x_{nk}}{a}\xi J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) - \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right) J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{\xi^2} \left(\xi \frac{df(\xi)}{d\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right) f(\xi)\right), \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df(\xi)}{d\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right) f(\xi) = 0.$$

Analogicky dostaneme

$$\frac{d^2g(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dg(\xi)}{d\xi} + \left(\left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right) g(\xi) = 0.$$

První rovnost vynásobíme  $\xi g$ , druhou vynásobíme  $\xi f$  a odečteme je:

$$\xi (gf'' - fg'') + (gf' - fg') + \xi fg \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2\right) = 0.$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} \xi (gf'' + g'f' - g'f' - fg'') + (gf' - fg') + \xi fg \frac{x_{nk}^2 - x_{nl}^2}{a^2} &= 0, \\ \frac{d}{d\xi} (\xi (gf' - fg')) &= \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2} \xi fg. \end{aligned}$$

Integrací poslední rovnosti v mezích od 0 do  $a$  dostaneme

$$a(g(a)f'(a) - f(a)g'(a)) = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2} \int_0^a \xi f(\xi)g(\xi) d\xi.$$

Poněvadž  $f(a) = J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}a\right) = 0$  a  $g(a) = J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}a\right) = 0$ , platí

$$0 = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2} \int_0^a \xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right) d\xi,$$

takže pro  $k \neq l$  je dokazovaná rovnost splněna.

Poněvadž  $J_n$  splňuje Besselovu rovnici (D.4), platí pro každé  $x > 0$  rovnost

$$x^2 J_n(x) = n^2 J_n(x) - x J_n'(x) - x^2 J_n''(x).$$

Integrací per partes s využitím této rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \int x(J_n(x))^2 dx &= \frac{1}{2}x^2(J_n(x))^2 - \int x^2 J_n(x)J_n'(x) dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2(J_n(x))^2 - \int \left( n^2 J_n(x)J_n'(x) - x(J_n'(x))^2 - x^2 J_n''(x)J_n'(x) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2(J_n(x))^2 - \int \left( \frac{n^2}{2} [(J_n(x))^2]' - \left[ \frac{x^2}{2} (J_n'(x))^2 \right]' \right) dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2(J_n(x))^2 - \frac{n^2}{2}(J_n(x))^2 + \frac{x^2}{2}(J_n'(x))^2 = \frac{x^2}{2} \left( (J_n(x))^2 + (J_n'(x))^2 \right) - \frac{n^2}{2}(J_n(x))^2. \end{aligned}$$

Podle D.2.2.5 je  $(J_n(x))^2 + (J_n'(x))^2 = (J_n(x))^2 + (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x))^2$  a tento výraz je podle D.2.2.2 pro  $x$  z pravého okolí nuly ohraničený. To znamená, že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} \left[ (J_n(x))^2 + (J_n'(x))^2 \right] = 0.$$

Dále podle D.2.2.2 je také

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} (nJ_n(x))^2 = 0.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} \int_0^a \xi \left[ J_n \left( \frac{x_{nk}}{a} \xi \right) \right]^2 d\xi &= \frac{a^2}{x_{nk}^2} \int_0^{x_{nk}} x [J_n(x)]^2 dx = \\ &= \frac{a^2}{x_{nk}^2} \left[ \frac{x_{nk}^2}{2} \left( (J_n(x_{nk}))^2 + (J_n'(x_{nk}))^2 \right) - \frac{n^2}{2} (J_n(x_{nk}))^2 \right] = \frac{a^2}{2} (J_n'(x_{nk}))^2. \end{aligned}$$

Podle D.2.2.4 je

$$-x^{-n} J_{n+1}(x) = (x^{-n} J_n(x))' = -\frac{n}{x^{n+1}} J_n(x) + x^{-n} J_n'(x),$$

takže  $J_n'(x_{nk}) = -J_{n+1}(x_{nk})$ . Celkem tedy

$$\int_0^a \xi \left[ J_n \left( \frac{x_{nk}}{a} \xi \right) \right]^2 d\xi = \frac{a^2}{2} (J_{n+1}(x_{nk}))^2,$$

což je dokazovaná rovnost pro  $k = l$ . □

**Věta 8.** *Nechť  $\nu \in \mathbb{Z}$  a  $v$  je řešením Besselovy rovnice (D.4) lineárně nezávislé na  $J_\nu$ . Pak*

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) \right| = \infty.$$

*Důkaz:* Označme

$$W = W(x) = W(x; J_\nu, v) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & v(x) \\ J_\nu'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = J_\nu(x)v'(x) - J_\nu'(x)v(x)$$

wronskián funkcí  $J_\nu, v$ . S využitím faktu, že  $J_\nu$  a  $v$  jsou řešením rovnice (D.4) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W &= \frac{d}{dx} (J_\nu v' - J_\nu' v) = J_\nu' v' + J_\nu v'' - J_\nu'' v - J_\nu' v' = J_\nu v'' - J_\nu'' v = \\ &= J_\nu \frac{(\nu^2 - x^2)v - xv'}{x^2} - v \frac{(\nu^2 - x^2)J_\nu - xJ_\nu'}{x^2} = \frac{1}{x} (J_\nu' v - J_\nu v') = -\frac{1}{x} W. \end{aligned}$$

Wronskián  $W$  tedy splňuje diferenciální rovnici  $W' = -\frac{W}{x}$ , což znamená, že

$$W(x) = \frac{C}{x},$$

kde  $C$  je nějaká nenulová konstanta (neboť funkce  $J_\nu, v$  jsou nezávislé). Dále platí

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v}{J_\nu} \right) = \frac{v'J_\nu - vJ_\nu'}{J_\nu^2} = \frac{W}{J_\nu^2} = \frac{C}{xJ_\nu^2}.$$

Bud'  $\alpha > 0$  libovolná konstanta. Integrací poslední rovnosti v mezích od  $x$  do  $\alpha$  dostaneme

$$\frac{v(x)}{J_\nu(x)} = D - C \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2},$$

kde  $D = \frac{v(\alpha)}{J_\nu(\alpha)}$  je konstanta. Odtud plyne, že pro každé  $x \in (0, \alpha)$  platí

$$v(x) = J_\nu(x) \left( D - C \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} \right)$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = D \lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) - C \lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2}. \quad (\text{D.10})$$

Bud'  $\varepsilon > 0$  libovolné. Položme  $\eta = \begin{cases} (1 + \varepsilon)^2, & \nu = 0 \\ \varepsilon^2, & \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$ . Pak  $\eta > 0$  a podle [D.2.2.2](#) k němu existuje  $\delta > 0$  takové, že pro všechna  $\xi \in (0, \delta)$  je  $(J_\nu(\xi))^2 < \eta$ . Odtud plyne, že pro  $x \in (0, \delta)$  platí

$$\int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} = \int_x^\delta \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} + \int_\delta^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} > \frac{1}{\eta} \int_x^\delta \frac{d\xi}{\xi} + \int_\delta^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{\delta}{x} + \int_\delta^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2},$$

tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} \geq \int_\delta^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} + \frac{1}{\eta} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{\delta}{x} = \infty.$$

Odtud vzhledem k [D.2.2.2](#) a [\(D.10\)](#) dále plyne, že pro  $\nu = 0$  je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = (-\operatorname{sgn} C) \infty$$

a pro  $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  podle de l'Hôpitalova pravidla a podle [D.2.2.5](#) je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) &= -C \lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2} = -C \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi(J_\nu(\xi))^2}}{\frac{1}{J_\nu(x)}} = \\ &= -C \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x(J_\nu(x))^2}}{\frac{1}{(J_\nu(x))^2}} = -C \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{xJ_\nu'} = -C \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x))}. \end{aligned}$$

Podle D.2.2.2 je funkce  $x \mapsto J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}$  v pravém okolí nuly ohraničená a tedy

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) \right| = \infty.$$

□

**Věta 9.** Je-li  $\nu \notin \mathbb{Z}$ , jsou Besselovy funkce prvního druhu  $J_\nu$  a  $J_{-\nu}$  řešením rovnice (D.4) a jsou lineárně nezávislé.

*Důkaz:* Funkce  $J_\nu$ ,  $J_{-\nu}$  byly v D.2.1 nalezeny jako řešení rovnice (D.4). Stačí tedy ověřit tvrzení o nezávislosti.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že  $\nu > 0$ .

Wronskián funkcí  $J_\nu$ ,  $J_{-\nu}$  je

$$\begin{aligned} W(x, J_\nu, J_{-\nu}) &= \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} = J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x)J'_\nu(x) = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x) \left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x)\right)' - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x) \left(\left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x)\right)' = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x) \left(-\frac{\nu}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1} u_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u'_{-\nu}(x)\right) - \\ &\quad - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x) \left(\frac{\nu}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} u_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u'_\nu(x)\right) = \\ &= u_\nu(x)u'_{-\nu}(x) - u_{-\nu}(x)u'_\nu(x) - \frac{2\nu}{x}u_\nu(x)u_{-\nu}(x). \end{aligned}$$

Podle 3 pro  $\nu \notin \mathbb{Z}$  platí  $\left| \lim_{x \rightarrow 0^+} W(x, J_\nu, J_{-\nu}) \right| = \infty$ , což znamená, že pro nějaké  $x > 0$  je

$W(x, J_\nu, J_{-\nu}) \neq 0$  a tedy podle známé věty z teorie lineárních homogenních obyčejných diferenciálních rovnic funkce  $J_\nu$ ,  $J_{-\nu}$  tvoří fundamentální systém řešení rovnice (D.4). □

Pro  $\nu \notin \mathbb{Z}$  tedy Besselovy funkce prvního druhu  $J_\nu$  a  $J_{-\nu}$  tvoří fundamentální systém řešení rovnice (D.4). V případě  $\nu \in \mathbb{Z}$  máme pouze jedno bázevé řešení (sr. D.2.2.3).

**Definice 3.** Funkce  $Y_\nu$  definovaná pro každé  $\nu \in \mathbb{R}$  a každé  $x \in (0, \infty)$  vztahem

$$Y_\nu(x) = \lim_{\xi \rightarrow \nu} \frac{J_\xi(x) \cos \pi \nu - J_{-\xi}(x)}{\sin \pi \xi}$$

se nazývá *Besselova funkce druhého druhu řádu  $\nu$* . (Někdy také *Neumannova funkce*.)

Pokud  $\nu \notin \mathbb{Z}$ , je jmenovatel zlomku za limitou nenulový a tedy pro  $\nu \notin \mathbb{Z}$  lze psát

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}.$$

Je-li  $\nu = n \in \mathbb{Z}$ , jsou čitatel i jmenovatel zlomku za limitou nulové a limitu lze tedy vypočítat podle de l'Hospitalova pravidla:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right]_{\nu=n} \right).$$

**Věta 10.** Funkce  $Y_\nu$  je řešením rovnice (D.4) pro libovolné  $\nu \in \mathbb{R}$ . Pro wronskián funkcí  $J_\nu$  a  $Y_\nu$  platí  $W(x, J_\nu, Y_\nu) = \frac{2}{\pi x}$ . (Funkce  $J_\nu$  a  $Y_\nu$  tedy tvoří fundamentální systém řešení rovnice (D.4).)

*Důkaz:* Viz např. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922, str. 58–76. □

*Poznámka 4.* Besselovy funkce druhého druhu splňují stejné vztahy, jako funkce prvního druhu:

$$\begin{aligned}(x^{-\nu}Y_{\nu}(x))' &= -x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x), \\(x^{\nu}Y_{\nu}(x))' &= x^{\nu}Y_{\nu-1}(x), \\Y_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x}Y_{\nu}(x) - Y_{\nu-1}(x), \\Y_{\nu}'(x) &= \frac{1}{2}(Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x))\end{aligned}$$